

Differentialgleichungen (ODE's) 2

Recap: Separierbare DGL

Letztes mal haben wir Separation als Lösungsmethode für ODE's 1. Ordnung kennen gelernt. Das war immer möglich, wenn die DGL linear, homogen und auf 1. Ordnung zurückführbar war. Allerdings haben wir auch DGL anderer Art damit lösen können.

Beispiel 1:

Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems $y'(x) = xe^{x+y}$ mit $y(1) = -1$. Welche Anzahl freier Parameter erwarten wir in der allgemeinen Lösung der DGL?

Da es sich um eine DGL 1. Ordnung handelt, muss die allgemeine Lösung genau einen freien Parameter besitzen! Deswegen reicht auch die Spezifizierung von einer Anfangsbedingung aus, um eine eindeutige Lösung zu bestimmen.

Für die Lösung separieren wir und integrieren nach x , indem wir uns an die Kettenregel erinnern. (Rechts: Integration by Parts)

$$\begin{aligned}y'(x) \cdot e^{-y(x)} &= x \cdot e^x \Big| \int dx \\ \int y'(x) \cdot e^{-y(x)} dx &= \int x \cdot e^x dx \\ -e^{-y(x)} &= xe^x - \int e^x dx \\ -e^{-y(x)} &= xe^x - e^x + C \\ y(x) &= \log\left(\frac{1}{e^x(1-x) + C}\right) \quad C \in \mathbb{R}, e^x(x-1) < C\end{aligned}$$

Die gesuchte Kurve erhalten wir durch Einsetzen des gegebenen Punktes

$$\begin{aligned}-1 &= \log\left(\frac{1}{e^x(1-1) + C}\right) \\ 1 &= \log(C) \\ C &= e\end{aligned}$$

Die gesuchte Kurve ist

$$y(x) = \log\left(\frac{1}{e^x(1-x) + e}\right)$$

Lineare homogene DGL

Die Lösungen einer homogenen, linearen DGL nennt man Basislösungen. Da für homogene, lineare DGL das Superpositionsprinzip gilt, ist jede Linearkombination dieser Basislösungen wieder eine Lösung. Man sagt also, dass die Basislösungen einen Vektorraum aufspannen, den Lösungsraum. Dieser ist von der gleichen Dimension n wie die Ordnung der DGL. Theoretisch würde es ausreichen durch Raten n linear unabhängige Lösungen der linearen, homogenen DGL zu finden. Die allgemeine Lösung könnte man dann direkt als Linearkombination dieser hinschreiben.

Beispiel 2:

Bestimme die allgemeine Lösung der DGL $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0$ (Die Lösungen sind von der Form $e^{\lambda x}$)

Wir werden später genau lernen, wie man solche DGL (linear mit konstante Koeffizienten) löst. Wir setzen hier einfach den Tipp ein

$$y(x) = e^{\lambda x} \rightarrow y'(x) = \lambda e^{\lambda x} \rightarrow y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} - 2e^{\lambda x} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

Raten oder Mitternachtsformel gibt $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = (-1)$. Damit haben wir zwei linear unabhängige Lösungen gefunden, nämlich

$$y_1(x) = e^{2x} \quad y_2(x) = e^{-x}$$

Von oben wissen wir jetzt, dass der Lösungsraum (die allg. Lsg.) von diesen beiden Lösungen aufgespannt wird. D.h.

$$y(x)_{\text{Allg}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$$

Oder - für Freunde der linearen Algebra - können wir eine Basis definieren, sodass die allg. Lsg. ein Vektor ist

$$\mathcal{B} = \{e^{2x}, e^{-x}\} \quad y(x)_{\text{Allg}} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Lineare inhomogene DGL

Für lineare, inhomogene DGL setzt sich die allgemeine Lösung zusammen aus

$$y_{\text{ALLGEMEIN}} = y_{\text{HOMOGEN}} + y_{\text{PARTIKULÄR}}$$

Wenn also eine lineare, inhomogene DGL gegeben ist können wir folgendes Vorgehen wählen

1. Schreibe den homogenen Teil auf die eine Seite (alle Terme mit $y(x)$) und den Störterm auf die andere
2. Setze den Störterm gleich Null und löse die homogene DGL mit bekannten Mitteln (Separieren, Substituieren, etc.)
3. Finde eine partikuläre Lösung (Ansatz oder Lagrange's Variation der Konstanten)
4. $y(x) = y_H + y_P$

Bemerkung: Die Lösungsmenge einer inhomogenen DGL ist ein affiner Raum - kein Vektorraum!

Partikuläre Lösung mittels Ansatz - Educated Guess

Die (meist) schnellste Möglichkeit eine partikuläre Lösung zu finden, ist der *Educated Guess*. Dabei ratet man die Form der Lösung und setzt ein (wie beim Beispiel 2 oben). Ausschlaggebend für den *Guess* ist der Störterm. Das Gute an dieser Methode ist, dass sie einfach ist und prinzipiell immer funktioniert, sofern man den richtigen Ansatz wählt. Der Nachteil ist, dass der "richtige" Ansatz manchmal sehr schwer zu sehen ist. In der Praxis hält man sich an Tabellen!

BEVORZUGTE METHODE falls: Koeffizienten konstant, DGL hohe Ordnung

Störterm	Ansatz
Polynom vom Grad n	Polynom vom Grad n (manchmal von höherem Grad)
$A \cdot \sin(\omega x - \varphi)$	$C_1 \cdot \sin(\omega x - \varphi) + C_2 \cdot \cos(\omega x - \varphi)$
$A \cdot \cos(\omega x - \varphi)$	$C_1 \cdot \sin(\omega x - \varphi) + C_2 \cdot \cos(\omega x - \varphi)$
$A \cdot \sinh(\omega x)$	$C_1 \cdot \sinh(\omega x) + C_2 \cdot \cosh(\omega x)$
$A \cdot \cosh(\omega x)$	$C_1 \cdot \sinh(\omega x) + C_2 \cdot \cosh(\omega x)$
$A \cdot e^{ax}$	$C \cdot e^{ax}$

Merke:

- Wähle den Ansatz so allgemein wie möglich!
Störterm: $x^2 \rightarrow y_P = Ax^2 + Bx + C$
- Bei einem Produkt von Störtermen, wähle das entsprechende Produkt an Ansätzen!
Störterm: $x^2 \cdot \sin(3x) \rightarrow y_P = (Ax^2 + Bx + C)(C_1 \cdot \sin(3x) + C_2 \cdot \cos(3x))$
- Bei einer Summe von Störtermen, wähle die entsprechende Summe von Störtermen!
Störterm: $x + e^{2x} \rightarrow y_P = (Ax + B) + Ce^{2x}$
Die Konstante von der Exp - Funktion steckt schon in den anderen Konstanten
- Ist der Störterm bereits eine lineare Kombination der homogenen Lösung, wird der entsprechende Ansatz nicht aufgehen (die eine Seite wird ja Null). Oft löst ein zusätzlicher Faktor x vor dem Ansatz das Problem.

Beispiel 3:

Bestimme die allgemeine Lösung der DGL $y' + 2y = f(x)$, wobei

1. $f(x) = \sin x$
2. $f(x) = xe^x$

Da es sich um eine inhomogene, lineare DGL handelt ist die allgemeine Lösung von der Form $y(x) = y_H + y_P$.

Homogene Lösung: (für beide $f(x)$ dieselbe)

$$y'_H + 2y_H = 0 \rightarrow y_H(x) = Ce^{-2x}$$

I. Partikuläre Lösung

Für diesen Störterm machen wir laut Tabelle den Ansatz

$$y_P(x) = C_1 \cdot \sin(x) + C_2 \cdot \cos(x)$$

$$y'_P(x) = C_1 \cdot \cos(x) - C_2 \cdot \sin(x)$$

Einsetzen in die DGL gibt

$$C_1 \cdot \cos(x) - C_2 \cdot \sin(x) + 2 \cdot (C_1 \cdot \sin(x) + C_2 \cdot \cos(x)) = \sin x$$

Da es sich bei $\sin x$ und $\cos x$ um zwei linear unabhängige Funktionen handelt und diese Gleichung für alle x gelten muss, dürfen wir einen Koeffizienten - Vergleich machen

$$C_1 + 2C_2 = 0 \rightarrow 2C_1 - C_2 = 1$$

$$C_1 = \frac{2}{5}, \quad C_2 = -\frac{1}{5}$$

Das heisst die partikuläre Lösung ist

$$y_P(x) = \frac{2}{5} \cdot \sin(x) - \frac{1}{5} \cdot \cos(x)$$

Und damit die allgemeine Lösung

$$y(x) = Ce^{-2x} \frac{2}{5} \cdot \sin(x) - \frac{1}{5} \cdot \cos(x)$$

II. Partikuläre Lösung

Es handelt sich um ein Produkt vor Störtermen, also nehmen wir das Produkt der allgemeinsten Ansätze

$$y_P = (Ax + B)e^x$$

$$y'_P = e^x(Ax + A + B)$$

Wiederum gibt Einsetzen in die DGL

$$e^x(Ax + A + B) + 2(e^x(Ax + B)) = xe^x$$

$$3Ax + A + 3B = x$$

Koeffizienten Vergleich: $A = \frac{1}{3}$ und $B = -\frac{1}{9}$ Und die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = Ce^{-2x} + \frac{3x - 1}{9}e^x$$

Beispiel 4:

Die DGL $y'' - 2y' + y = e^x$ besitzt die homogene Lösung $y_H(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$. Bestimme eine partikuläre Lösung!

Die Tabelle verrät uns für diesen Störterm den Ansatz $y_P = A e^x$. Allerdings entspricht das einer homogenen Lösung und der Ansatz wird nicht aufgehen. Wir können zur Kontrolle sehen was rauskommt (hoffentlich Null)

$$A e^x - 2A e^x + A e^x = e^x$$

$$0 = e^x$$

Das ist eine falsche Aussage, was bedeutet, unser Ansatz war falsch.

Stattdessen können wir den Ansatz aus der Tabelle mit x multiplizieren. Da $y_P = A x e^x$ aber auch eine homogene Lösung ist, multiplizieren wir gleich ein zweites mal mit x . Schliesslich haben wir

$$y_P = A x^2 e^x$$

$$y'_P = A e^x \cdot (x^2 + 2x)$$

$$y''_P = A e^x \cdot (x^2 + 4x + 2)$$

Wir setzen in die DGL ein

$$A e^x \cdot (x^2 + 4x + 2) - 2A e^x \cdot (x^2 + 2x) + A x^2 e^x = e^x$$

$$A x^2 + 4A x + 2A - 2A x^2 - 4A x + A x^2 = 1$$

$$A = \frac{1}{2}$$

Eine partikuläre Lösung ist

$$y_P(x) = \frac{x^2}{2} e^x$$

Lagrange's Variation der Konstanten (VdK) (1. Ordnung)

Für lineare, inhomogene DGL 1. Ordnung (später auch für 2. Ordnung) müssen wir uns nicht auf unser Glück verlassen, dass wir die richtige Form der partikulären Lösung erraten, sondern wir haben ein mächtiges Tool zur Verfügung, um diese zu bestimmen: Lagrange's Variation der Konstanten!

Vorgehen:

1. Bestimme die homogene Lösung der DGL. Dies gibt eine Kurvenschar (für 1. Ordnung mit einem freien Parameter), z.B. $y_H = C \cdot y_1(x)$
2. Mache die homogene Lösung als Ansatz für die partikuläre Lösung mit dem entscheidenden Unterschied, dass wir zulassen, dass der Scharparameter eine Funktion von x darstellt, also $y_P = C(x) \cdot y_1(x)$
3. Bilde die Ableitungen (Kettenregel!) $y'_P = C'(x)y_1 + C(x)y'_1$ und setze alles in die DGL ein.
4. Man erhält einen Ausdruck für $C'(x)$. Die nicht abgeleiteten Terme **müssen** sich wegstreichen (gute Kontrolle ob man richtig abgeleitet hat)
5. Integriere den Ausdruck nach x und setze in den Ansatz ein

Beispiel 5:

Bestimme die allgemeine Lösung der DGL $y' \cdot \sin x + y \cdot \cos x = e^x$

Homogene Lösung:

Die homogene DGL $y' \cdot \sin x + y \cdot \cos x = 0$ ist separierbar!

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= -\frac{\cos x}{\sin x} \Big| \int dx \\ \log(|y(x)|) &= \int -\frac{\cos x}{\sin x} dx = -\log(|\sin x|) + \tilde{C} \\ y(x) &= \frac{C}{\sin x}\end{aligned}$$

Inhomogene Lösung:

Wir lassen jetzt zu dass C eine Funktion von x ist und machen den Ansatz

$$\begin{aligned}y_P &= \frac{C(x)}{\sin x} \\ y'_P &= \frac{C'(x) \cdot \sin x - C(x) \cdot \cos x}{\sin^2 x}\end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL gibt

$$e^x = \frac{C'(x) \cdot \sin x - C(x) \cdot \cos x}{\sin x} + \frac{C(x) \cdot \cos x}{\sin x} e^x = C'(x) \Big| \int dx C(x) = e^x$$

Damit haben wir eine partikuläre Lösung gefunden

$$y_P(x) = \frac{e^x}{\sin x}$$

Und die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = \frac{C + e^x}{\sin x}$$

Bemerkung: Wir haben bei dem Integral $\int C'(x) dx$ keine Integrationskonstante geschrieben, weil wir nur an einer einzigen partikulären Lösung interessiert sind! D.h. wir haben die Konstante aus Bequemlichkeit gleich Null gesetzt!