Differentialgleichungen (ODE's) 3

Exakte Differentialgleichungen

Eine exakte DGL ist eine spezielle Form einer DGL 1. Ordnung, nämlich

$$\frac{\partial F_{(x,y)}}{\partial x} + \frac{\partial F_{(x,y)}}{\partial y} \cdot y'(x) = 0$$

Die Frage ist, wie man erkennt, ob es sich bei den beiden Termen wirklich um partielle Ableitungen ein und derselben Funktion handelt. Die Antwort geben - natürlich - die altbekannten Integrabilitätsbedingungen. D.h. wir verlangen $F_{xy} = F_{yx}$
Lösung:

$$F(x, y_{(x)}) = C$$

Wobei C der Scharparameter ist. Man erhält $F(x, y)$, indem man die beiden partiellen Ableitungen integriert und Terme vergleicht. Dies kann man einsehen, indem das totale Differential nach x auf der linken, sowie der rechten Seite obiger Gleichung bildet (!Verallgemeinerte Kettenregel!)

$$\frac{d}{dx}F(x, y_{(x)}) = \frac{d}{dx}C$$

$$\frac{\partial F_{(x,y)}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F_{(x,y)}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial F_{(x,y)}}{\partial x} + \frac{\partial F_{(x,y)}}{\partial y} \cdot y'(x) = 0$$

Beispiel 1:
Prüfe die DGL auf Exaktheit. Löse diejenigen, die exakt sind!

1. $2xy\cos(x^2) + \left(\sin(x^2) + 6x\right) y'(x) = -6y$
2. $a^y + xya^{y-1}y'(x) = 0$
3. $y \cdot \log|x| + \frac{y^2}{2x}y'(x) = 0$

I: Wir prüfen die Integrabilitätsbedingungen für:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy\cos(x^2) + 6y \qquad \& \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \sin(x^2) + 6x$$

$$F_{xy} = 2x\cos(x^2) + 6 = 2x\cos(x^2) + 6 = F_{yx}$$

Damit ist die DGL exakt. Wir finden die Lösung durch Integration, von

1. $\int F_x \, dx = \int 2xy\cos(x^2) + 6y \, dx = y\sin(x^2) + 6xy + C_1(y)$
2. $\int F_y \, dy = \int \sin(x^2) + 6x \, dy = y\sin(x^2 + 6xy + C_2(x))$

Vergleichen der Terme: $F(x, y) = y\sin(x^2) + 6xy + const$. Die Lösung der DGL lautet

$$y\sin(x^2) + 6xy = C \qquad \text{oder} \qquad y(x) = \frac{C}{\sin(x^2) + 6x}$$

II & III: Diese DGL sind nicht exakt

Orthogonaltrajektorien

Die Orthogonaltrajektorien (OT) einer Kurvenschar beschreiben selbst wieder eine Kurvenschar. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass sie in jedem Punkt orthogonal zu der anderen Kurvenschar sind! Mathematisch gesprochen heisst das für die Steigungen von ursprünglicher Kurvenschar bzw. OT

$$y'(x)_{OT} = -\frac{1}{y'(x)}$$

Diese neue DGL kann man lösen und man findet die gesuchten OT.
Oft ist die Kurvenschar nicht in Form einer DGL gegeben, d.h. man muss erst die DGL finden. Dies passiert so

1. Die Kurvenschar ist von der Form $F(x, y, C) = 0$
2. Bilde die Ableitung nach x: $\frac{d}{dx}F(x, y, C) = 0$
3. Eliminiere die Konstante C aus diesem Gleichungssystem. Übrig bleibt eine DGL der Kurvenschar.
4. Bei mehr Konstanten: Bilde mehr Ableitungen!

Bemerkung: Isogonaltrajektorien
Es handelt sich um Kurven, die die gegebene Kurvenschar unter einem festen Winkel $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ schneiden. Vorgehen:

1. Bestimme die DGL der Kurvenschar $y_1' = f_1(x, y)$
2. Die Isogonaltrajektorien werden beschrieben durch $y_2' = \dfrac{\tan\alpha + y_1'}{1 - y_1' \cdot \tan\alpha}$
3. Löse diese neue DGL

Alte Prüfungsaufgabe
Man bestimme die Orthogonaltrajektorien der Kurvenschar

$$y = x^C \quad (x > 0, C \in \mathbb{R})$$

Zuerst benötigen wir eine DGL dieser Kurvenschar! Dazu bilden wir die Ableitung und finden

$$y'(x) = Cx^{C-1} = \frac{Cx^C}{x} = \frac{Cy}{x}$$

Von oben erhalten wir $\log(y) = C \cdot \log(x) \to C = \frac{\log(y)}{\log(x)}$ Wir haben also die DGL gefunden

$$y'(x) = \frac{y \cdot \log(y)}{x \cdot \log(x)}$$

Für die OT gilt:

$$y'_{OT} = -\frac{1}{y'} = -\frac{x \cdot \log(x)}{y \cdot \log(y)}$$

$$y \cdot \log(y) \cdot y'_{OT} = -x \cdot \log(x)$$

Wir berechnen mittels Substitution und partieller Integration

$$\int x \cdot \log(x)\, dx \qquad\qquad x = e^u, dx = e^u du$$
$$\int ue^{2u}\, du = \frac{1}{2}ue^{2u} - \frac{1}{2}\int e^{2u}\, du =$$
$$= \frac{1}{2}ue^{2u} - \frac{1}{4}e^{2u} + \tilde{C} = \frac{1}{2}e^{2u} \cdot (u - \frac{1}{2}) + \tilde{C}$$

Rücksubstitution: $u = \log(x), \quad e^{2u} = x^2$

$$\int x \cdot \log(x)\, dx = \frac{1}{2}x^2(\log(x) - \frac{1}{2}) + \tilde(C)$$

Damit ergibt sich für die DGL der OT:

$$\frac{1}{2}y^2 \left(\log(y) - \frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}x^2 \left(\log(x) - \frac{1}{2}\right) + \tilde{C}\right)$$

$$x^2 \left(\log(x) - \frac{1}{2}\right) + y^2 \left(\log(y) - \frac{1}{2}\right) = C$$

Enveloppen

Definition:
Die Enveloppe (Einhüllende) einer Schar $\Phi(x, y, C) = 0$ ist eine Kurve, die **nicht** zur Schar selbst gehört und

1. jede Scharkurve genau einmal berührt (d.h. gleiche Steigung) und
2. in jedem Punktt nur eine Scharkurve berührt

Für die Enveloppe eine Kurvenschar $\Phi(x, y, C) = 0$ gilt das Gleichungssystem

$$\Phi(x, y, C) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial C}\Phi(x, y, C) = 0$$

Die Gleichung der Einhüllenden erhält man durch Eliminieren des Scharparameters aus diesem System.
Enveloppen stellen zusätzliche Lösungen zu DGL's 1. Ordnung dar (singuläre Lösungen), aber nicht jede Kurvenschar besitzt eine DGL!

Alte Prüfungsaufgabe:
Die Gerade $g_C (C \in \mathbb{R})$ verbinde die beiden Punkte (C, C^2) und $(C+1, (C+1)^2)$. Man bestimme die Enveloppe der Schar der Geraden g_C.

Wir müssen erst die Gleichung der Kurvenschar $\Phi(x, y, C)$ aufstellen. Eine Möglichkeit besteht darin, eine Parameterdarstellung, z.B. mit dem Parameter t, für g_C aufzustellen. Die Idee ist dann den Parameter zu eliminieren, um die gesuchte Gleichung zu erhalten. Also:

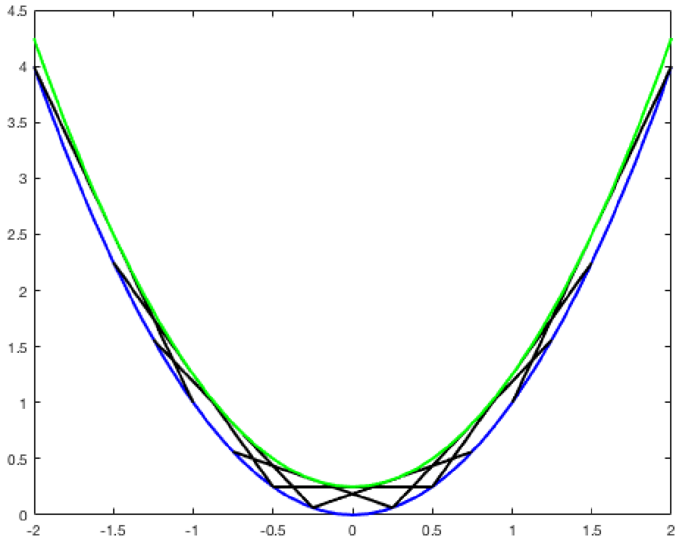
$$\vec{r}_{(t)} = \begin{pmatrix} C \\ C^2 \end{pmatrix} + t \cdot \left[\begin{pmatrix} C+1 \\ (C+1)^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C \\ C^2 \end{pmatrix} \right]$$
$$\vec{r}_{(t)} = \begin{pmatrix} C+t \\ C^2 + t(2C+1) \end{pmatrix}$$
$$x = C + t$$
$$y = C^2 + t(2C+1) = C^2 + (x - C)(2C+1) = x(2C+1) - C^2 - C$$

Das System der Enveloppe lautet

$$\textbf{I: } \Phi(x, y, C) = 0 \to 0 = x(2C+1) - C^2 - C - y$$
$$\textbf{II: } \frac{\partial}{\partial C} \Phi(x, y, C) = 0 \to 0 = 2x - 2C - 1$$

Womit folgt $C = x - \frac{1}{2}$ und oben einsetzen, liefert die Gleichung der Enveloppe

$$y(x) = x^2 + \frac{1}{4}$$



(Enveloppe, Kurvenschar, Hilfskurve) = (Grün, Schwarz, Blau)