Differentialgleichungen (ODE's) 4

Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten haben die Form

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = b(x)$$

Da es sich um eine lineare DGL handelt, wissen wir, dass sich die allgemeine DGL schreiben lässt als Superposition der homogenen sowie einer partikulären Lösung, also $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$.

Die zugehörige homogene DGL hat einen n-dimensionalen Vektorraum als Lösungsraum und wir suchen daher n linear unabhängige Basislösungen, sodass wir die allgemeine homogene Lösung als Linearkombination dieser Basislösungen schreiben können. Durch pures Raten machen wir den **Ansatz** (Euler Ansatz)

$$y(x) = e^{\lambda x} \qquad \rightarrow \qquad a_n \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \ldots + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0$$

Durch streichen der Exponentialterme erhält man das sogenannte **charakteristische Polynom** dieser DGL

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Woher dieser Name kommt, sieht man beim Umschreiben der DGL in ein System von DGL 1.Ordnung. Man kann dann eine Koeffizientenmatrix aufstellen und das Eigenwertproblem dieser Matrix führt tatsächlich auf das exakt selbe CP. Man nennt daher auch $\lambda_i, (i = 1, \ldots, n)$ die Eigenwerte der DGL.
Hat man die Eigenwerte gefunden, so sind die Basislösungen laut folgender Tabelle

Lösung des CP		Basislösung der DGL
λ_i	k-fach reel	$y_1 = e^{\lambda x}$, $y_2 = xe^{\lambda x}$, $\ldots$, $y_k = x^{k-1} e^{\lambda x}$
$\lambda_i = a \pm bi$	k-fach komplex	$y_1 = e^{ax} \sin bx, y_3 = xe^{ax} \sin bx, \ldots, y_{2k-1} = x^{k-1} e^{ax} \sin bx$ $y_2 = e^{ax} \cos bx, y_4 = xe^{ax} \cos bx, \ldots, y_{2k} = x^{k-1} e^{ax} \cos bx$

Bemerkung: Von $\lambda = a + bi$ auf $y_{1,2} = e^{ax} (C_1 \sin bx + C_2 \cos bx)$???
Komplexe Eigenwerte treten immer komplex konjugiert auf (da die Koeffizienten des CP reell sind). Also $\lambda_{1,2} = a \pm bi$. Dies entspräche den Lösungen $y_1 = e^{(a+bi)x}$ und $y_2 = e^{(a-bi)x}$. Wegen der Linearität sind dann aber auch Linearkombinationen der Lösungen wiederum Lösungen der DGL. Um ein schöneres Resultat stehen zu haben, bilden wir

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1 &= \frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2 = e^{ax} \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2} = e^{ax} \cos bx \\ \tilde{y}_2 &= \frac{1}{2i} y_1 - \frac{1}{2i} y_2 = e^{ax} \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i} = e^{ax} \sin bx\end{aligned}$$

zwei neue linear unabhängige Basislösungen.

Beispiel 1:
Bestimme die Lösung folgender homogener DGL

1. $y'' + 6y' + 9y = 0$
2. $y'' - 4y' + 13y = 0$
3. $y''' - y'' - 3y' + 3y = 0$

I:
Wir machen den Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}, y'(x) = \lambda e^{\lambda x}, y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Einsetzen in die DGL führt auf das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \lambda^2 e^{\lambda x} + 6\lambda e^{\lambda x} + 9e^{\lambda x} &= 0 \\ \lambda^2 + 6\lambda + 9 &= 0 \\ (\lambda + 3)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Es ist also $\lambda = -3$ eine Nullstelle des CP mit algebraischer Vielfachheit 2. Damit wissen wir, wie zwei Basislösungen dieser DGL aussehen

$$y_1 = e^{-3x} \qquad y_2 = xe^{-3x}$$

Die allgemeine Lösung ist eine Linearkombination

$$y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$$

II:
Wenn man das Prozedere ein paar mal gemacht hat, kann man das CP direkt von der DGL hinschreiben. Man ersetzt einfach die i-te Ableitung von y durch ein λ^i. In diesem Fall also

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm 3i$$

Damit ist die Lösung dieser homogenen DGL

$$y(x) = e^{2x} \cdot (C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x))$$

III:
Das CP ist

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 3\lambda + 3 = 0$$

Durch Raten finden wir $\lambda_1 = 1$, damit können wir den Fundamentalsatz der Algebra anwenden und eine Polynomdivision durchführen

$$\begin{aligned} (\lambda^3 - \lambda^2 - 3\lambda + 3) : (\lambda - 1) &= \lambda^2 - 3 \\ \lambda_{2,3} &= \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

Die Lösung lautet

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{\sqrt{3}x} + C_3 e^{-\sqrt{3}x}$$

Alte Prüfungsaufgabe:
Gegeben ist die von Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + \alpha y = 1$$

Man finde die allgemeine Lösung in Abhängigkeit von α (Fallunterscheidung!).

Die DGL ist linear, d.h. $y(x) = y_H + y_P$. Wir suchen zuerst eine partikuläre Lösung. Weil der Störterm nur aus einer Konstante besteht, machen wir einen Ansatz $y_P = A$ und finden

$$y_P = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha \neq 0$$

Für den Fall, dass $\alpha = 0$ können wir auch einen Ansatz machen $y_{P,0} = Ax + B$ liefert

$$y_{P,0} = -\frac{1}{2}x$$

Für die homogene Gleichung machen wir den Euler Ansatz und kommen auf das CP

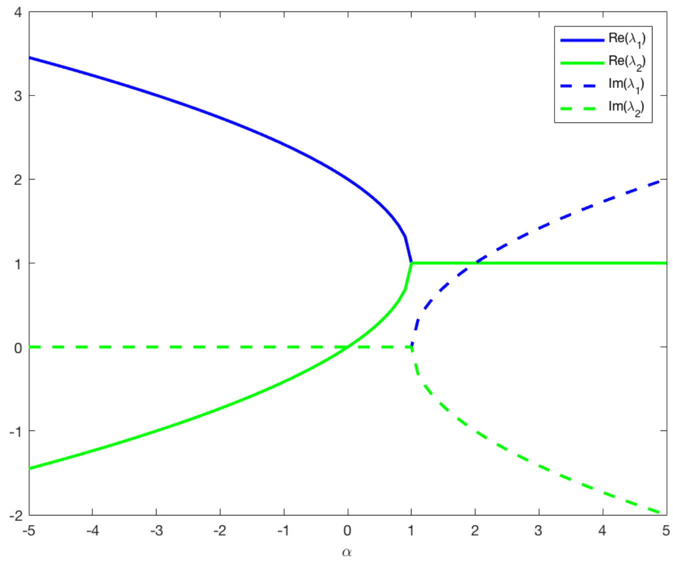
$$\lambda^2 - 2\lambda + \alpha = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \alpha}$$

Jetzt müssen wir eine Fallunterscheidung treffen

$$\begin{aligned}
&y(x) = C_1 e^{(1+\sqrt{1-\alpha})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{1-\alpha})x} + \tfrac{1}{\alpha} && \alpha < 1, \alpha \neq 0 \\
&y(x) = C_1 + C_2 e^{2x} - \tfrac{1}{2}x && \alpha = 0 \\
&y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + 1 && \alpha = 1 \\
&y(x) = e^x \cdot \big(C_1 \sin(\sqrt{\alpha - 1} \cdot x) + C_2 \cos(\sqrt{\alpha - 1} \cdot x)\big) + \tfrac{1}{\alpha} && \alpha > 1
\end{aligned}$$

Zur Veranschaulichung können wir die Nullstellen des CP in Abhängigkeit von α plotten



Euler'sche DGL

Neben den linearen DGL mit konstanten Koeffizienten gibt es eine weitere Art von DGL höherer Ordnung für die explizite Lösungsverfahren existieren: Die Euler'schen Differentialgleichungen. Sie sind von der Form

$$a_n x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = b(x)$$

oder völlig äquivalent

$$a_n y^{(n)}(x) + \frac{a_{n-1}}{x} y^{(n-1)}(x) + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} y'(x) + \frac{a_0}{x^n} y(x) = \tilde{b}(x)$$

Wir lösen die zugehörige homogene Gleichung mit dem Ansatz $y(x) = x^\alpha$. Ableiten, Einsetzen und Kürzen aller x^α führt auf das sogenannte Indexpolynom (siehe Beispiel):

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))a_n + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-2))a_{n-1} + \ldots + \alpha a_1 + a_0 = 0$$

Wenn man entsprechenden α gefunden hat, ergeben sich die n unabhängigen Basislösungen gemäss der Tabelle

Lösung des Indexpolynoms		Basislösung der DGL
α_i	k-fach reel	$y_1 = x^\alpha, y_2 = \log(x)x^\alpha, \ldots, y_k = \log(x)^{k-1}x^\alpha$
$\alpha_i = a \pm bi$	k-fach komplex	$y_1 = x^\alpha \sin(b \cdot \log x), \ldots, y_{2k-1} = \log(x)^{k-1}x^\alpha \sin(b \cdot \log x)$ $y_2 = x^\alpha \cos(b \cdot \log x), \ldots, y_{2k} = \log(x)x^\alpha \cos(b \cdot \log x)$

Alte Prüfungsaufgabe:

1. Finden sie die Lösungen $t \mapsto x(t), t > 0$, der Differentialgleichung

   $$t^2\ddot{x}(t) - x(t) = t^3$$

   welche die Bedingung $\lim_{t\to 0} x(t) = 0$ erfüllen.
2. Bestimmen Sie die Lösungen aus (i), die die zusätzliche Bedingung x(1) = 1 erfüllen.

I:
Da es sich um eine Euler'sche DGL handelt machen wir für die homogene Gleichung den Ansatz $x(t) = t^\alpha$, $\dot{x}(t) = \alpha t^{\alpha-1}$ und $\ddot{x}(t) = \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}$. Durch Einsetzen erhält man

$$\begin{aligned} t^2\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} - t^\alpha &= 0 \\ \alpha(\alpha-1)t^\alpha - t^\alpha &= 0 \\ \alpha(\alpha-1) - 1 &= 0 \\ \alpha_\pm &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Damit haben wir die homogene Lösung

$$x_H(t) = C_1 t^{\alpha_+} + C_2 t^{\alpha_-}$$

Für die partikuläre Lösung machen wir einen Ansatz $x_P = At^3$ (eigentlich sollte man $x_P = At^3 + B^2 + Ct + D$ machen, aber ich will mir Schreibarbeit sparen) und finden

$$x_P(t) = \frac{1}{5} t^3$$

Somit haben wir die allgemeine Lösung

$$x(t) = C_1 t^{\alpha_+} + C_2 t^{\alpha_-} + \frac{1}{5} t^3$$

Da wir nur an den begrenzten Lösungen (für $t \to 0$) interessiert sind, müssen wir den Term t^{α_-} streichen und es bleibt

$$x(t) = C_1 t^{\alpha_+} + \frac{1}{5} t^3$$

II:
Einsetzen der Randbedingung in obige Gleichung gibt

$$1 = C_1 + \frac{1}{5}$$
$$C_1 = \frac{4}{5}$$

Somit

$$x(t) = \frac{4}{5} t^{\alpha_+} + \frac{1}{5} t^3$$

Ansatz bei höherer Ordnung

Das Prinzip ist genau dasselbe wie im Fall erster Ordnung. Nur ist es etwas mühsamer und man muss genauer darauf achten ob der Ansatz nicht eventuell schon eine Lösung der homogenen Gleichung ist. Wir können auch die alten Tabellen verwenden.

Beispiel 4:
Bestimme die allgemeine Lösung der DGL

$$y''(x) - y(x) = \sinh(x) + x$$

Homogene Lösung:
Charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

$$y_H(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Partikuläre Lösung:
Wir teilen den Störterm auf und suchen zwei partikuläre Lösungen, einmal für $b_1(x) = \sinh(x)$ und einmal für $b_2(x) = x$. Das ist dasselbe, als wenn wir für einen Ansatz des gesamten Störtermes die Summe der Ansätze der einzelnen Störterme nehmen, Linearität!

1. $y_{P,1}$ löst $y''(x) - y(x) = \sinh(x)$
   Der erste Ansatz den wir probieren ist $y_{P,1} = A\sinh(x) + B\cosh(x)$. Allerdings ist das bereits eine Linearkombination der homogenen Lösung (Definition der hyperbolischen Funktionen!), daher multiplizieren wir alles mit x

$$
\begin{aligned}
y_{P,1} &= Ax\sinh(x) + Bx\cosh(x) \\
y''_{P,1} &= 2A\cosh(x) + Ax\sinh(x) + 2B\sinh(x) + Bx\cosh(x)
\end{aligned}
$$

   einsetzen zeigt, dass der Ansatz aufgeht und liefert $A = 0$ und $B = \frac{1}{2}$. Damit ist

$$y_{P,1} = \frac{1}{2}x\cosh(x)$$

2. $y_{P,2}$ löst $y''(x) - y(x) = x$
   Der Ansatz $y_{P,2} = Ax + B$ liefert $A = -1$ und $B = 0$ also

$$y_{P,2} = -x$$

Damit ist die allgemeine Lösung der DGL

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}x\cosh(x) - x$$

VDK - 2.Ordnung

Die Lagrange Methode der Variation der Konstanten funktioniert prinzipiell bei jeder Ordnung der DGL. Das Verfahren führt dabei auf ein LGS für die partikulären Lösungen, das man immer lösen kann. Allerdings wird das ganze sehr schnell sehr mühsam. Für uns relevant sind deswegen nur die Fälle von erster und zweiter Ordnung!

1. Gegeben DGL: $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$
2. Zugehörige homogene Lösung hat die Form $y_H(x) = C_1u(x) + C_2v(x)$
3. Ansatz für partikuläre Lösung: $y_P = C_1(x)u(x) + C_2(x)v(x)$
4. Wir wählen einen (arbiträren aber geschickten, Anfangswert) $C_1'(x)u(x) + C_2'(x)v(x) = 0$
5. Einsetzen in die DGL liefert die Gleichung $C_1'(x)u'(x) + C_2'(x)v'(x) = b(x)$
6. Die Lösung dieses lineare Gleichungssystems lautet

$$C_1' = \frac{-b(x)v(x)}{W(x)} \qquad C_2' = \frac{b(x)u(x)}{W(x)}$$

   wobei die Wronski-Determinante $W = uv' - u'v$
7. Bestimme die Konstanten durch Integration