Systeme linearer DGL's

Wir betrachten ein System von zwei linearen DGLs

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1$$
$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2$$

Wichtig hierbei ist, dass x und y je zwei gesuchte Funktionen sind, die von einer Variablen abhängen - sagen wir z.B. $x(t)$ & $y(t)$. Mit

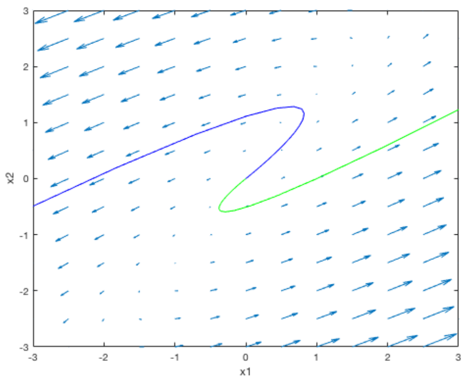
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

können wir auch schreiben

$$\dot{\vec{x}} = A\,\vec{x} + \vec{b}$$

Phasen - Portrait (lineare & nicht lineare Systeme)

Betrachtet man den oben definierten Vektor $\vec{x}$, also die Lösung des DGL Systems, als Parametrisierung einer Kurve, so stellt das DGL System ein Geschwindigkeitsfeld dar, d.h. in jedem Punkt (x, y) der Ebene wird von dem System eine Geschwindigkeit vorgeschrieben. Die Lösung ist eine Kurvenschar, wobei jede Kurve in jedem Punkt die Geschwindigkeit besitzt, die dort von dem System vorgeschrieben wird.



Vor allem bei nicht linearen Systemen, passiert es häufig, dass man keine geschlossene Lösung angeben kann. In diesem Fall können wir aber versuchen die Art der Lösungen zu verstehen, indem wir auf die korrekte Parametrisierung verzichten und die Lösungskurve stattdessen als Funktion $x \mapsto f(x)$ suchen. Die DGL für diese Lösungskurve ohne Parametrisierung findet man, indem man die Steigung gleich dem Verhältnis der Geschwindigkeitskomponenten setzt.

2D - Fall:

$$\begin{matrix} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{matrix} \qquad \xrightarrow{DGL-Phasenportrait} \qquad y'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$$

3D - Fall: Brauchen wir in der AN II eigentlich nicht!

$$\begin{matrix} \dot{x} = f(x,y,z) \\ \dot{y} = g(x,y,z) \\ \dot{z} = h(x,y,z) \end{matrix} \qquad \xrightarrow{DGL-Phasenportrait} \qquad \frac{dx}{f(x,y,z)} = \frac{dy}{g(x,y,z)} = \frac{dz}{h(x,y,z)}$$

Entkoppelungsmethode (Lin. - Alg. Methode)

Wann eignet sich diese Methode? Die Koeffizientenmatrix A muss diagonalisierbar sein (also algebraische und geometrische Vielfachheit jedes Eigenwertes muss übereinstimmen) und vor allem homogene Systeme lassen sich gut damit lösen.
Betrachten wir also das Problem

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

Die Idee ist, das Problem in der Eigenbasis von A zu betrachten. Damit erhält man ein entkoppeltes System (d.h. die Ableitung einer Funktion hängt nur noch von der Funktion selbst ab), das man sofort lösen kann und man muss nur noch in die alte Basis zurück transformieren. Dazu ein wenig lineare Algebra. Im ganz Allgemeinen kann man sich einen Basiswechsel mit folgendem Bild überlegen

$$\begin{tikzcd}
{[x]_\mathcal{B}} \arrow[r, mapsto, "A"] \arrow[d, mapsto, "T^{-1}"'] & {[\dot{x}]_\mathcal{B}} \\
{[x]_\mathcal{E}} \arrow[r, mapsto, "D"'] & {[\dot{x}]_\mathcal{E}} \arrow[u, mapsto, "T"']
\end{tikzcd}$$

In der alten Basis gilt $\dot{x} = Ax$. Wir wollen jetzt den Umweg über die andere Basis nehmen und das Ergebnis soll natürlich dasselbe bleiben. D.h. wenn man x der Reihe nach mit T^{-1}, dann D und schliesslich T multipliziert soll wieder $\dot{x}$ rauskommen.

$$\dot{x} = TDT^{-1}x$$

Vergleichen der Terme gibt

$$A = TDT^{-1}$$

Wo die Inverse steht hängt natürlich davon ab wie man die Transformationsmatrix T definiert - deshalb überlege ich mir persönlich das immer von neuem.
Aus der linearen Algebra wissen wir jetzt: Wählen wir T so, dass es die Eigenvektoren der Matrix A als Spaltenvektoren besitzt, hat die neue Abbildungsmatrix D eine ganz spezielle Form: Sie ist diagonal mit den Eigenwerten von A als Einträge.

Seien also $EW = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ und $EV = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots\}$ die Eigenwerte, bzw. die Eigenvektoren der Matrix A. Wählen wir die Transformationsmatrix als $T = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \ldots]$, dann gilt in der neuen Basis

$$[\dot{x}]_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} [x]_\mathcal{E}$$

Das ist ein entkoppeltes System. Für jeden Eintrag des Vektors $[x]_\mathcal{E}$ haben wir eine einfache DGL zu lösen. Z.B. für den ersten Eintrag - nennen wir ihn kurz $x_1(t)$

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 \cdot x_1 \qquad \rightarrow \qquad x_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 \cdot t}$$

Damit erhalten wir den Vektor

$$[x]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 \cdot t} \\ C_2 e^{\lambda_2 \cdot t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n \cdot t} \end{pmatrix}$$

Aus der Abbildung oben sieht man, wie man den Vektor $[x]_{\mathcal{B}}$ in der alten Basis erhält. Einfach mit T multiplizieren. Damit lautet die allgemeine Lösung des ursprünglichen DGL Systems

$$[x]_{\mathcal{B}} = T \cdot \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 \cdot t} \\ C_2 e^{\lambda_2 \cdot t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n \cdot t} \end{pmatrix} = C_1 \cdot \vec{v}_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + C_2 \cdot \vec{v}_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + \ldots + C_n \cdot \vec{v}_n \cdot e^{\lambda_n \cdot t}$$

REZEPT:

1. Problem: $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$
2. Berechne die Eigenwerte $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ und Eigenvektoren $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots\}$ von A
3. Die allgemeine Lösung lautet

$$\vec{x}(t) = C_1 \cdot \vec{v}_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + C_2 \cdot \vec{v}_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + \ldots + C_n \cdot \vec{v}_n \cdot e^{\lambda_n \cdot t}$$

4. Merke: Hat ein Eigenwert eine höhere Vielfachheit als 1, dann **NICHT** mit t oder so multiplizieren! Einfach die verschiedenen Eigenvektoren nehmen!
5. Was macht man bei komplexen Eigenwerten?
   Wie immer gilt, dass Linearkombinationen von Lösungen wieder eine Lösung ergeben, da es sich hier um ein lineares homogenes System handelt. Ausserdem ist die Koeffizientenmatrix A in unserem Fall immer reell, d.h. falls komplexe Eigenwerte auftauchen, müssen sowohl Eigenwerte, als auch die jeweiligen Eigenvektoren komplex konjugiert sein. Seien die Eigenwerte $\lambda = a \pm bi$ mit Eigenvektoren $\vec{v}$ bzw. $\vec{v}^*$ (* für die komplexe Konjugation). Dann sehen zwei Basislösungen so aus:

$$x_1^B = e^{(a+bi)t} \cdot \vec{v} = e^{at}\big(\cos(bt) + i \cdot \sin(bt)\big)\vec{v}$$
$$x_2^B = e^{(a-bi)t} \cdot \vec{v}^* = e^{at}\big(\cos(bt) - i \cdot \sin(bt)\big)\vec{v}^*$$

   Wobei das zweite Gleichheitszeichen wegen der Euler - Beziehungen gilt. Durch eine passende Linearkombination finden wir Real- und Imaginärteil dieser beiden komplexen Lösungen.
   Reminder: Für eine allgemeine komplexe Zahl z können wir Real- und Imaginärteil wie folgt finden:

$$Re(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)$$
$$Im(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*)$$

In unserem Fall kommen wir damit auf die zwei neuen unabhängigen Basislösungen, die jetzt keine komplexe Einheit mehr enthalten

$$\frac{1}{2}(x_1^B + x_2^B) = e^{at} \cdot \cos(bt) \cdot Re(\vec{v}) - \sin(bt) \cdot Im(\vec{v}) = x_{1,NEU}^B$$
$$\frac{1}{2i}(x_1^B - x_2^B) = e^{at} \cdot \cos(bt) \cdot Im(\vec{v}) + \sin(bt) \cdot Re(\vec{v}) = x_{2,NEU}^B$$

Beispiel 1:
Finde die Lösung des DGL-Systems,

$$\dot{x}_1 = 7x_1 - 5x_2$$
$$\dot{x}_2 = 4x_1 - 2x_2$$

die zum Zeitpunkt $t = 0$ durch den Punkt (6, 5) geht!

Die Koeffizientenmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

deren Eigenwerte erfüllen die Gleichung für die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0 = (7 - \lambda) \cdot (-2 - \lambda) + 20$$
$$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = 2$$

Die zugehörigen Eigenräume werden aufgespannt von den Vektoren, die das folgende homogene LGS erfüllen
Eigenraum zu $\lambda_1 = 3$

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad E_3 := span\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \}$$

Eigenraum zu $\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad E_2 := span\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

Die allgemeine Lösung ist dann gegeben durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^{3t} \\ C_2 e^{2t} \end{pmatrix}$$

Damit haben wir auch eine schöne Schreibweise um die Konstanten zu bestimmen. Einsetzten der Anfangsbedingung $\vec{x}(0) = (6, 5)$ liefert

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Kurve hat also die Parametrisierung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 5e^{3t} + e^{2t} \\ 4e^{3t} + e^{2t} \end{pmatrix}$$

Eliminationsmethode

Das ist bei Systemen 2. und 3. Ordnung in den meisten Fällen die zu bevorzugende Methode. Die Idee ist, das System von n linearen DGL 1. Ordnung in eine DGL n - ter Ordnung zu überführen. Und das macht man so: Löse die erste DGL nach der Variablen auf, die nicht als Ableitung vorkommt, leite die gesamte Gleichung ab und setze dies in die zweite DGL ein.
Löst man diese DGL kann man durch Rückeinsetzen die andere Funktion bestimmen.

Beispiel 2:
Finde die allgemeine Lösung des DGL-Systems,

$$\dot{x}_1 = 7x_1 - 5x_2$$
$$\dot{x}_2 = 4x_1 - 2x_2$$

Wir lösen die zweite Gleichung nach x_1 auf und leiten ab

$$x_1 = \frac{1}{4}(\dot{x}_2 + 2x_2)$$

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{4}(\ddot{x}_2 + 2\dot{x}_2)$$

Einsetzen gibt

$$\ddot{x}_2 - 5\dot{x}_2 + 6x_2 = 0$$

Das charakteristische Polynom dieser Gleichung (jetzt wird hoffentlich der Name klar! Es handelt sich nämlich tatsächlich um das charakteristische Polynom der Koeffizienten - Matrix. Siehe Beispiel 1) lautet

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

mit den Lösungen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$. Damit kennen wir die allgemeine Lösung für x_2

$$x_2(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$$

Jetzt können wir die Ableitung bilden und in die Gleichung für x_1 einsetzen (Achtung: nicht in die Gleichung für $\dot{x}_1$ - da müsste man dann ja noch integrieren und man erhält eine zusätzliche Konstante, die man wieder mit den Gleichungen eliminieren müsste). Es ergibt sich

$$x_1(t) = C_1 e^{2t} + \frac{5}{4} C_2 e^{3t}$$

Bei dem Ergebnis ist zu beachten, dass das Verhältnis der Konstanten in den beiden Gleichungen über die Eigenvektoren verknüpft sind. (Vergleiche mit dem Ergebnis aus Beispiel 1)

Umwandlung DGL n. Ordnung zu n DGLs 1. Ordnung

Bei der Eliminationsmethode haben wir gesehen, wie man ein System von DGLs auf eine DGL höherer Ordnung umwandeln kann. Es ist natürlich auch das umgekehrte möglich. Das illustriert man am besten an einem Beispiel.

Beispiel 3:
Wandle in ein System aus 3 DGL 1. Ordnung um

$$\dddot{x} - 5\ddot{x} + 7\dot{x} - 9x = 0$$

Das Prinzip ist stets dasselbe. Wir definieren uns einen neuen Vektor, der die Funktion $x(t)$ bis zur (n - 1) - ten Ableitung enthält, also

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix}$$

Mit diesem Vektor wollen wir jetzt ein System erstellen, also etwas der Art

$$\dot{\vec{y}} = A \cdot \vec{y} \qquad \rightarrow \qquad \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Die ersten beiden Zeilen von A können wir einfach füllen. Es gilt ja per Definition unseres Vektors $\dot{y}_1 = \dot{x} = y_2$. Die dritte Zeile erhalten wir aus unserer DGL mit $\dddot{x} = \dot{y}_3 = 5y_3 - 7y_2 + 9y_1$ Also:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 9 & -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Gleichgewicht und Stabilität

Wenn wir zurück zur Interpretation eines DGL - Systems als Geschwindigkeitsfeld gehen, kann es sinnvoll sein nach sogenannten Gleichgewichtspunkten (GGW) zu suchen. Das sind Punkte an denen unser System komplett in Ruhe ist, d.h. alle Ableitungen verschwinden. Weiters können wir Aussagen über die Stabilität dieser Punkte treffen, mit folgendem Vorgehen

1. Falls höhere Ableitungen auftauchen, müssen wir diese DGL erst in ein System 1. Ordnung überführen (geht auch für nicht lineare Systeme)
2. Setze alle Ableitungen die im System auftauchen gleich Null und finde die Lösungen (= GGW) von diesem neuen System
3. Falls das System nicht linear ist müssen wir es erst um das GGW linearisieren. Das bedeutet wir müssen die Jacobi - Matrix in den GGW auswerten und können dann ein neues Koordinatensystem einführen, das die Auslenkung weg von diesem GGW beschreibt. (siehe Beispiel)

4. Jetzt können wir die Eigenwerte des Systems berechnen und die Stabilität beurteilen.

$$\begin{array}{ll} \exists\, Re(\lambda) > 0 & \text{Instabil} \\ \exists\, Re(\lambda) = 0 & \text{Grenzstabil} \\ Re(\lambda) < 0 \quad \forall_\lambda & \text{Asymptotisch stabil} \end{array}$$

Mehr zu diesem Thema kommt im 3. Semester in *Control Systems I.*

Beispiel 4:
Finde die Gleichgewichtspunkte des einfachen Pendels - das die DGL

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

erfüllt - und beurteile deren Stabilität.

Zuerst müssen wir aus der gegeben DGL ein System machen. Dafür definieren wir uns wie im linearen Fall zwei neue Variablen

$$\varphi_1 = \varphi \qquad \varphi_2 = \dot{\varphi}$$

Damit lautet das System

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= f(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_2 &= g(\varphi_1, \varphi_2) = -\frac{g}{l} \sin \varphi_1 \end{aligned}$$

Und es besitzt unendlich viele Gleichgewichtspunkte, wobei wir nur die ersten zwei betrachten wollen

$$\text{GGW 1:} \quad \vec{\varphi}_{GGW1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\text{GGW 2:} \quad \vec{\varphi}_{GGW2} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Untersuchen wir zuerst das erste GGW. Wir linearisieren das System indem wir neue Koordinaten einführen $\vec{\Delta\varphi} = (\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2)$

$$\begin{aligned} \dot{\Delta\varphi}_1 &= \left.\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}\right|_{GGW1} \Delta\varphi_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial \varphi_2}\right|_{GGW1} \Delta\varphi_2 \\ \dot{\Delta\varphi}_2 &= \left.\frac{\partial g}{\partial \varphi_1}\right|_{GGW1} \Delta\varphi_1 + \left.\frac{\partial g}{\partial \varphi_2}\right|_{GGW1} \Delta\varphi_2 \end{aligned}$$

In Matrix - Schreibweise führt dies wie versprochen auf die Jacobi - Matrix

$$\dot{\vec{\Delta\varphi}} = J(GGW1) \cdot \vec{\Delta\varphi} = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} \\ \frac{\partial g}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial g}{\partial \varphi_2} \end{pmatrix}\right|_{GGW1} \vec{\Delta\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix} \vec{\Delta\varphi}$$

Für das erste GGW finden wir also die Eigenwerte

$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Das bedeutet $\vec{\varphi}_{GGW1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist grenzstabil. Da wir bei dem Pendel keine Dämpfung angenommen haben, schwingt es ewig um das untere Gleichgewicht.

Für das obere Gleichgewicht ergibt sich

$$\dot{\Delta\vec{\varphi}} = J(GGW2) \cdot \Delta\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} \\ \frac{\partial g}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial g}{\partial \varphi_2} \end{pmatrix} \Bigg|_{GGW2} \Delta\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix} \Delta\vec{\varphi}$$

Mit den Eigenwerten

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Das bedeutet der obere Gleichgewichtspunkt $\vec{\varphi}_{GGW1} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, wie erwartet, instabil.