

*Kreuzprodukt:*

 *Rechtssystem*

 *Flächeninhalt des Parallelogramms*

*Allgemeines:*

*Skalarprodukt:*

*Cosinus – Satz:*

*Sinus – Satz:*

**Geometrie**



**Trigonometrie**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ϕ | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  | 0 – Stellen |
|  | 0 |  |  |  | 1 |  |  |  | 0 | n ⋅ π |
|  | 1 |  |  |  | 0 |  |  |  |  |  |
|  | 0 |  | 1 |  | / |  |  |  | 0 | n ⋅ π |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**Vektorrechnung**

**Spezialfälle**

1. *Translation*
2. *Rotation*
3. *Ebene Bewegung*

**Allgemeinste Bewegung**

*Kinemate:*

*Invarianten: i) ii)*

**Rotation**

*Zwei Punkte (∈ μ) sind stets in Ruhe!*

**Translation**

*Kongruente Bahnkurven*

**SdpG**

**Starrer Körper**

*Die Beträge und Winkel der Vektoren zwischen drei Punkten im Körper bleiben stets konstant.*

*= Konstant*

**Kreisbewegung**

*(, z sind konstant)*

 *wobei*

*mit*

*Bemerkung:*

 *ist definiert als , wobei den Betrag der Ab-leitung von s(t), welche die Bogenlänge eines Punktes beschreibt, und den Einheits-vektor tangentialen an die Bahnkurve im Punkt angibt.*

|  |  |
| --- | --- |
| *Allgemein* |  (*dr (Differential) = lineare Approximation)* |
| *Kartesisch* |  |  |
| *Zylindrisch* |  |  |
| *Sphärisch* |  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **KARTESISCH** | **ZYLINDRISCH** | **SPHÄRISCH** |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**

*Aufstellen der Komponenten-bedingungen liefert:*

*Da die Trommel mit ω rotiert, gilt das Gleitreibungsgesetz:*

*Nach Integration von 0 bis ϕ ergibt diese Differentialbeziehung*

**Beweise**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *SdpG* | *Zylindrische v–Komponenten* | *Parallelogramm Regel* |
|  *Konstant**(Produktregel)* |  |  |
| *Seilreibung über ein infinitesimales Seilstück dS* | *Kräftemittelpunkt S* |
|  | *Für eine gleichgerichtete Kräftegruppe sei . Es gilt sicher* *und . Reduktion: mit (unbekanntem) Angriffspunkt A. Moment bzgl. O:* *Einsetzen ergibt:* *Es muss also entweder Null oder parallel zu sein: . Für : S* |

**Ebene Bewegung & Fachwerke** *(Def.: Bahnkurven in parallelen Ebenen sind kongruent)*

1. *Durchstoßpunkt von*

*durch die Ebene Momentanzentrum*

*Parallelogramm Regel: Bei Fachwerken haben parallele Stäbe im Parallelogramm das gleiche*

*Bemerkung: Stehen zwei Geschwindigkeiten eines Stabes senkrecht auf diesen: Verbinde die Spitzen.*

 *Das Momentanzentrum ist dann der Schnittpunkt mit dem Stab!*

1. *Z (Momentanzentrum) ist in Ruhe*
2. *Geschwindigkeiten auf*
3. *Z Schnittpunkt der Senkrechten auf die Geschwindigkeiten*

*SvM:*

**Schraubung**

*Die allgemeinste Bewegung ist gegeben durch eine Vektorfunktion, linear abhängig vom Verbindungsvektor (). Die Linearität zeigt sich in . Alle Punkte mit . Z = (Schraube)*

*, und alle Punkte haben dieselbe Geschwindigkeit (denn der Term verschwindet)*

*Der Abstand zur Zentralachse dBZ ist gegeben durch*

**Kreiselung**

*Ein Punkt P des Körpers ist stets in Ruhe ⇒ Momentane Rotation (µ geht durch P) (Bew.: Zwei Ebenen senkrecht zu . Schnittgerade hat wegen Sdpg v = 0)*

**Rollen/Gleiten**

1. *Mom. Rotation*

*µ = Berührungslinie*

*⇒ v = 0*

1. *Es gibt Punkte auf der Berührungslinie mit v ≠ 0*

 

**Linienverteilte Kräfte**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Allgemein** | **Uniforme Verteilung** | **Dreiecksverteilung** |
| *Linienverteilte Kräfte*  | *Uniforme linienverteilte Kräfte können auf eine Einzelkraft mit und Angriffspunkt bei reduziert werden.* | *Dreiecksverteilte Kräfte können auf eine Einzelkraft mit* *und Angriffspunkt bei reduziert werden.* |

*2D–Problem: 3 Gl.*

*3D–Problem: 6 Gl.*

*(Nullgruppe: Kräfte-paar mit gleicher Wirkungslinie)*

**Gleichgewichtsbedingungen**

*Gleichgewicht:*

**Spezialfälle**

1. *Reduktion auf Einzelkraft*
2. *Reduktion auf Kräftepaar*

**Leistung** *[Watt ]*

*Leistungslose Kraft:*

*Antriebskraft:*

*Widerstandskraft:*

**Reduktion einer Kräftegruppe**

*Dyname in O:*

 *1. Invariante:*

 *2. Invariante:*

*Reduktion auf die Dyname:*

*Möglichst einfache stat. äqu. Kräftegruppen finden. Besteht maximal aus einer Einzelkraft ( mit A im Kräftemittelpkt. S) und einem Kräftepaar mit Moment .*

**Statische Äquivalenz**

*Def.: stat. äqu. zu falls*

*Gleichbedeutend zu:*

*i) Kräfte in der Ebene: Je für zwei Kräfte*

 *bestimmen mit A = Schnittpkt. Wirklin.*

*ii) Parallele Kräfte mit : berechnen,*

 *A per Hebelgesetz:*

*iii) Kräftepaar (Parallele Kräfte mit ):*

 *Nicht auf Einzelkraft reduzierbar! Konstantes*

 *Moment (b...Abstand Wirklin.)*

**Momente** *[Nm]*

 *(vgl. Rotation)*

 *(Projektion von auf die Achse in Richtung )*

 *(vgl. Starrkörperformel)*

*Verschiebungssatz: Abstand zw. Kraft und Achse entscheidend*

 *Kraft kann verschoben werden*

*Momente können Ursache für eine Rotation sein*

*Bestimmung des Drehsinnes per Rechte–Hand–Regel*

**Kräfte**

*Punktgebundener Vektor (Ursache für Beschleunigung, Deformation, etc.) [N]*

*Reaktionsprinzip (Newton): Jede Actio erzeugt eine Reactio!*

*Kräfte mit gleichem Angriffspunkt:*

*Einteilung: i) Fernkräfte (keine Berührung, z.B.: Gravitation)*

 *ii) Kontaktkräfte (Wechselwirkung per Berührung)*

 *iii) Innere Kräfte (Reactio liegt innerhalb vom betrachteten System)*

 *iv) Äußere Kräfte (Reactio liegt außerhalb vom betrachteten System)*

*Standfläche AS: Kleinste konvexe Berührungsebene*

*Angriffspunkt der reduzierten Normalkraft zwingen in AS, außerdem muss N größer 0 sein.*

**Standfestigkeit**

**Ruhelage bestimmen**

1. *Gleichgewichtsbedingungen (nach Hauptsatz)*
2. *PdvL: Wähle einen zulässigen virtuellen Bewegungszustand und setze (zulässig, um Bestimmung vieler Kräfte zu vermeinden)*

**Hauptsatz der Statik**

*Ein System in Ruhe (keine Änderung der Geschwindigkeit) hat die notwendigen Bedingungen Nicht hinreichend!*

*Folgt aus dem Grundprinzip der Statik: Für ein System in Ruhe sind die Leistungen bei jedem virtuellen Bewegungszustand innerer und äußerer Kräfte gleich Null.*

1. *Freischneiden*
2. *Kräfte eintragen*
3. *GGB (Bestimmtheit?)*
4. *(Systemtrennung)*
5. *Lagerkräfte bestimmen*
6. *Diskussion (Kippen,...)*

**Lagerkräfte bestimmen**

*Bemerkung zum hydrostatischen Druck:*

*Bei der Reduktion einer Kraftdichte die vom hydrostatischen druck stammt () beachten, dass dieser Richtungsunabhängig ist: Immer Normal auf die Ebene, egal unter welchem Winkel diese geneigt ist.*

**Bindungen**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Festlager* |  | *2D: AX AY**3D: AX AY AZ* |
| *Auflager* |  | *2D und 3D: AY (muss nach oben zeigen, sonst nicht in Ruhe)* |
| *Einspannung* |  | *2D: AX AY MZA**3D: AX AY AZ MZA MYA MXA* |
| *Kurzes Querlager* |  | *2D: AY**3D: AY AZ* |
| *Langes Querlager* |  | *2D: AY MZA**3D: AY AZ MZA MYA* |
| *Längslager* |  | *2D und 3D: AY (Kraft darf in beide Richtungen wirken)* |
| *Seil* |  | *Kraftübertragung nur in Seilrichtung. Nur Zugbelastung!* |

**Kräftemittelpunkt & Schwerpunkt** *(für gleichgerichtete Kräftegruppen)*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Resultierende* | *Kräftemittelpunkt* | *Linien–/Flächen–/Körper–Schwerpunkt/Mittelpunkt* | *Bemerkungen* |
|   |  | *Schwerpunkt: Bei mehreren Teilkörpern (mit Teilgewichten ) sind die einzelnen Teilschwerpunkte mit dem Gesamt-gewicht G zu mitteln:*  |
|  |  |  | *Polarkoord.: Über die Bogen-länge dl integrieren (). Ersetze dl durch R dϕ und drücke x mit ϕ aus (Grenzen!).* |
|  |  |  | *Ist eine Richtung konstant: Drücke dA durch dx aus!*  |
|  |  |  |  |

 *seien die jeweils entsprechenden Kraftdichten.*



**Statische Bestimmtheit**

*System: m Gleichungen, n Variablen*

* *Stat. bestimmt*
* *Stat. überbestimmt*

*(Zu wenig Lagerkräfte: beweglich)*

*Beurteilung per Kinematik:*

*Wie viele Bindungen müssen auf-gehoben werden, damit beweglich: Genau eine, d.h. statisch bestimmt.*

*Bei Fachwerken:*

* *2D:*
* *3D:*

*(s: #Stäbe, r: #Lagerkräfte, K: #Knoten)*

**Fachwerke & Bestimmung der Stabkräfte**

*Ideales Fachwerk:*

*Stäbe = Pendelstützen (Stäbe: gewichtslos; Knoten: reibungsfreie Gelenke an Stabenden; Belastung nur dort)*

1. *Knotengleichgewicht:*
* *Lagerkräfte bestimmen*
* *Knoten freischneiden und GGB für Komponenten*
* *Stabkräfte als Zugkräfte (vom Knoten weg)*
1. *Dreikräfteschnitt:*
* *Lagerkräfte bestimmen*
* *Systemtrennung durch 3 Stäbe (Stabkräfte auf Zug),*

*s.d. nur zwei Stäbe vom gleichen Knoten kommen*

* *Momentenbedingung, bzw. Komponentenbedingung senkrecht auf die beiden parallelen Stabkräfte*
1. *PdvL:*
* *Bestimmung der Lagerkräfte nicht nötig*
* *Entferne den Stab mit gesuchten Stabkräften*
* *(Zulässigen) virtuellen Bewegungszustand einführen*
* *Kinematik lösen (SdpG, SvM, Parallelogrammregel)*



*Einführung der Beanspruchung in Abhängigkeit von N: In positive x-Richtung, dann auch alle anderen Kräfte & Mom. in pos. Richtung*

**Seilstatik**

*Ein reibungsfreies Seil, das auf einer Rolle haftet, überträgt Kräfte in Seil-richtung ohne Verluste.*

*Mit Reibung ergibt sich für :*

*Für Haftung:*

*Für Reibung:*

**Reibungskraft**

*Reibungszahlen: Empirisch ermittelte Konstanten (werk-stoffabhängig). Kraftaufwand Bewegung zu verursachen, ist größer als Bewegung aufrecht zu halten:*

1. *Haftreibung: Ein System bleibt solang in Ruhe sofern*
2. *Gleitreibung: Gleitet ein System über ein anderes,*

 *erkennt man (näherungsweise) aus dem*

 *Diagramm:*

1. *Rollreibung: Wegen Verformbarkeit der Räder (N ist*

 *nicht mehr gleichmäßig verteilt). für Ruhe*

 *für Rollen*

*Beachte: Sind dimensionslos; hat Einheit [L]*

*Bestimmung:*

1. *Lagerkräfte (falls nötig)*
2. *Schnitt bei x (Vorsicht: Einzelkraft)*
3. *Basis (gekrümmten Stab: zyl.)*
4. *Laufvariablen*
5. *GGB bzw. Reduktion*
6. *Diagramme, Diskussion, Randbed-ingungen (z.B.: Gelenk: MO=0)*

*Schnitt bei x: Innere Kräfte → Äußere. Mit Kräfte-gruppe am gleichen Teilsys. GGB. Stat. äqu. zur Kräftegruppe am anderen Teilsys. Die Red. der stat. äqu. Kräftegruppe auf Flächen-mittelpkt. vom Schnitt nennt man Beanspruchung.*

|  |  |
| --- | --- |
| *N* | *Zug/Druck* |
| *QY QZ* | *Schub* |
| *T* | *Torsion* |
| *MY MZ* | *Biegemoment* |

*Differentialbeziehungen:*

**Beanspruchung**