

Lineare Gleichungssysteme (LGS):

Schreibweisen:

↳ LGS mit m Gleichungen und n Variablen:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

↳ Matrixschreibweise: $Ax = b$, mit einer $m \times n$ Matrix A und einem Spaltenvektor b . x wird dann der Lösungsvektor

↳ Erweiterte Matrix:

x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n	1
a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\dots$	a_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	$\dots$	a_{mn}	b_m

Gauss-Algorithmus:

↳ Das LGS in ein äquivalentes, einfacher zu lösendes umformen und Rückwärtseinsetzen

↳ Umformen:

- Zeilen vertauschen

- Vielfache einer Zeile zu anderen addieren/subtrahieren

- Eine Zeile mit einem Faktor multiplizieren ($C \neq 0$)

↳ Lösungsfälle:

- Leere Lösungsmenge (Überbestimmtes LGS; Verträglichkeitsbedingungen nicht erfüllt)

(erkant man erst, sobald das LGS in Zeilenstufenform gebracht wurde)

- Unendliche Lösungsmenge (Unterbestimmtes LGS; Der Rang ist kleiner als m und Verträglichkeitsbedingungen erfüllt $\rightarrow$ freie Parameter)

- Konkrete Lösungsmenge (Der Rang ist gleich m)

↳

x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n	1
p_1	a_{12}	a_{13}	$\dots$	a_{1n}	b_1
0	0	p_2	$\dots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	0	$\dots$	p_n	b_n
0	0	0	$\dots$	0	b_{n+1}

m

- Zeilenstufenform: Solange Gauss bis

keine Pivots mehr erzeugt werden können

- Pivot: Davon und darunter $\rightarrow$ Nullen

- Freie Parameter: z.B.: x_2

- Rang: Anzahl der b 's vor 0-Zeilen

- Verträglichkeitsbedingung: Letzte Zeile!

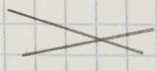
Für $b_{n+1} \neq 0 \rightarrow$ Leere Lösungsmenge

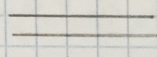
- Werden alle Pivots 1 und oberhalb Nullen, spricht man von der normierten Zeilenstufenform

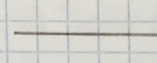
↳ Besitzt ein LGS mindestens eine Lösung, so ist es „konsistent“.

Anwendungen:

↳ Geometrie: - LGS mit 2 Variablen $\rightarrow$ Geraden in der Ebene

 $\rightarrow$ Endliche Lösungsmenge

 $\rightarrow$ Leere Lösungsmenge

 $\rightarrow$ Unendliche Lösungsmenge

- LGS mit 3 Variablen $\rightarrow$ Ebenen im Raum

↳ Stöchiometrie: LGS zum Lösen von Reaktionsgleichungen in der Chemie

Für ein LGS gilt:

↳ Der Rang r ist immer: $r \geq 0$, $r \leq m$, $r =$ Anzahl der Pivot-Variablen, $r \leq n$

↳ Ein LGS hat mindestens eine Lösung, falls: $- r = m$

$- r < m$ und Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sind

↳ Die Lösung eines LGS ist genau dann eindeutig, falls $r = m$ (keine freien Parameter)

↳ Ein homogenes LGS $:= Ax = 0$

↳ Ein HLGS ist immer konsistent (es besitzt immer die triviale Lösung $x = 0$)

↳ Ein HLGS besitzt genau dann nicht-triviale Lösungen, falls $r < n$,
dann dann hat es $n - r$ freie Parameter

$$\text{Rang}(AB) \leq \min\{\text{Rang} A, \text{Rang} B\}$$

↳ Ein LGS ist für alle b lösbar, falls $r = m$

↳ Ein quadratisches LGS hat eine eindeutige Lösung, falls es für alle b lösbar ist: $r = n = m$

↳ Ein LGS ist genau dann für alle b lösbar, falls das zugehörige HLGS nur die triviale Lösung besitzt.

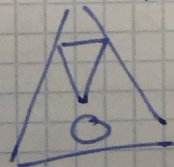
Zur Partikulären Lösung eines inhomogenen DGL- Sys.:

↳ Es kann genauso mit Ansatz gesucht werden

↳ Beispiel: $Y' = AY + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, Setze $Y_p = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$, $Y_p' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Löse das LGS } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Bzw. } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$



Matrizen:

Definitionen:

- Eine $m \times n$ Matrix A ist ein Schema mit m Zeilen und n Spalten $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$
 - Eintrag in der Zeile i und Spalte $j =: (A)_{ij}$
 - Quadratische Matrix $A := n \times n$
 - Nullmatrix $A := (A)_{ij} = 0 \forall i, j$ (MATLAB: `zeros(m, n)`)
 - Obere Dreiecksmatrix (= Rechtsdreiecksmatrix) $R := (R)_{ij} = 0 \forall i > j$ (MATLAB: `triu(A)`)
 - Untere Dreiecksmatrix (= Linksdreiecksmatrix) $L := (L)_{ij} = 0 \forall i < j$ (MATLAB: `tril(A)`)
 - Diagonalmatrix $D :=$ gleichzeitig Rechts- und Linksdreiecksmatrix $(D)_{ij} = 0 \forall i \neq j$ (MATLAB: `diag(A)`)
 - Einheitsmatrix (= Identität) $I := (I)_{ij} = 0 \forall i \neq j$ und $(I)_{ij} = 1 \forall i = j$ (MATLAB: `eye(3) = I_3`). Kronecker-Delta $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \delta_{ij} = (I)_{ij}$
 - Spaltenvektor: Eine $n \times 1$ Matrix
 - Zeilenvektor: Eine $1 \times n$ Matrix
 - Die Transponierte einer Matrix $A^T := (A^T)_{ij} = (A)_{ji}$, z.B. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$ (MATLAB: `A.' = A^T`). $(A^T)^T = A; (A+B)^T = A^T + B^T; (AB)^T = B^T \cdot A^T$
 - Symmetrische Matrix: $A^T = A$
 - Antisymmetrische Matrix $A^T = -A$
- $A^T A$ ist immer symmetrisch:
 $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A \quad \square$

Jede Matrix kann in eine Summe aus einem symmetrischen und einem antisymmetrischen Matrix geschrieben werden! $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$

Rechenregeln:

- Für zwei $m \times n$ Matrizen gilt: $-(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$
 $-(\alpha A)_{ij} = \alpha \cdot (A)_{ij}$
- Für eine $m \times n$ Matrix A und eine $n \times p$ Matrix B gilt:
 $(AB)_{ij} := \sum_{a=1}^n (A)_{ia} \cdot (B)_{aj} = (A)_{i1} \cdot (B)_{1j} + \dots + (A)_{in} \cdot (B)_{nj}$
D.h. das Skalarprodukt zwischen Zeile von A mit Spalte von B
- „Einstein'sche Summenkonvention“: Über mehrfach vorkommende Indizes wird stillschweigend aufsummiert.
- Für Matrizen gilt: - Kommutativgesetz der Addition
- Assoziativgesetz der Addition und Multiplikation
- Distributivgesetz

RANG

- Für Matrizen gilt nicht: Kommutativgesetz der Multiplikation!

Bemerkung: Für den Rang von AB gilt: $\text{Rang}(AB) \leq \min\{\text{Rang}(A), \text{Rang}(B)\}$

Orthogonale Matrizen:

↳ Definition: Eine $n \times n$ Matrix A heißt orthogonal, falls $A^T A = \mathbb{I}$

↳ Es gilt: - $A^T = A^{-1}$

- $A A^T = \mathbb{I}$

- Das Produkt zweier orthogonaler Matrizen ist orthogonal

- $\mathbb{I}$ ist orthogonal

↳ Givens - Rotation: - $U(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}$

↳ Householder Matrizen: $Q(u) := \mathbb{I} - 2uu^T$, mit einem Spaltenvektor u , für den gilt $u^T \cdot u = 1$

↳ Bemerkungen: - Jede Zeile und jede Spalte einer orthogonalen Matrix sind Vektoren der Länge 1

Bemerkung:

→ Orthogonale Matrizen sind Isometrien, d.h. sie beschreiben Abbildungen, die die Länge eines Vektors nicht verändern!

- Jeweils zwei solcher Vektoren stehen senkrecht aufeinander

- Für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ (z.B.: $x \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$)

gilt $|Ax| = |x|$, d.h. eine Abbildung $x \mapsto Ax$

ändert die Länge des Vektors nicht (→ „Kongruenzabbildung“)

- Betrachtet man die Abbildung $Ae^{(i)} = a^{(i)}$, so

wird $a^{(i)}$: - für $A_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ um φ gedreht

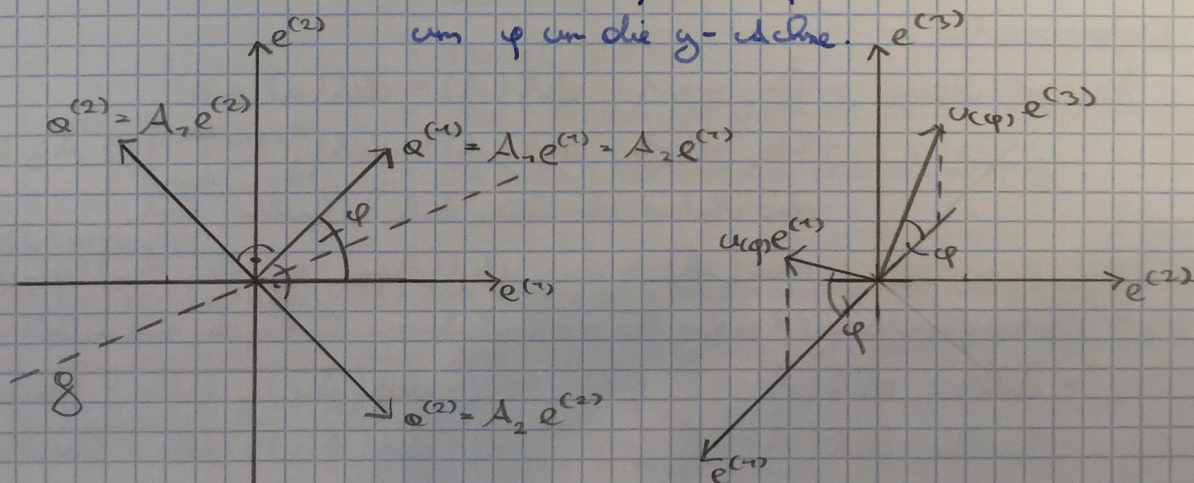
- für $A_2 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$ an der Geraden g mit Steigung $\frac{\varphi}{2}$ gespiegelt

Bemerkung:

→ Für orthogonale Matrizen gilt $\det A = \pm 1$

- Für Givens - Rotationen in $\mathbb{R}^3$ gilt ident:

$U(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}$ bewirkt eine Drehung um φ um die y -Achse.



↳ Eigenschaften: - $\det(A) = \pm 1$

- Eigenwerte von A : $\lambda = \pm 1$

- $\|Q\|$ (Operatornorm) = 1 (Isometrie!)

LR-Zerlegung:

→ Die LR-Zerlegung ist effizienter als jeder Mol Gauss-Algorithmus

→ Vorgehen: - Zerlege A in eine Links- und eine Rechtsdreiecksmatrix

$$A = LR$$

- Löse $Ly = b$ (Vorwärtseinsetzen)

- Löse $Rx = y$ (Rückwärtseinsetzen)

→ Sind Zeilenvertauschungen beim Gauss-Algorithmus nötig, wird zusätzlich eine Permutationsmatrix eingeführt (→ Buchführung über Zeilenvertauschungen)

Finde dann eine Zerlegung $PA = LR$, löse $Ly = Pb$ und löse $Rx = y$.

→ Beispiel:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{5 \cdot 2} \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

→ Bemerkungen: - Beim Gauss-Verfahren: Subtrahieren! (keine Vorzeichenfelber)

- L erhält man, indem man die Faktoren, die eine Null erzeugt haben, an dieselbe Stelle in einer Spalte wieder in der alten zurückführt

- R ist das Endeform des Gauss-Verfahrens (bei $m=n$)

- $\Rightarrow$ Dreiecksmatrix, sonst eine $m \times n$ Zeilenstufenform

- L ist orthogonal und $n \times n$

- P ist orthogonal

- A ist also orthogonal, falls R orthogonal ist

Invertierbar:
(Nur im Fall $m=n$,
also $R \rightarrow$ Rechtsdreiecksmatrix)

$$A \text{ invertierbar} \Leftrightarrow$$

$$R \text{ invertierbar}$$

$$R^{-1} = A^{-1}L$$

$$A^{-1} = R^{-1}L^{-1}$$

Determinante:

→ Definition: - Für $n=1$: $\det(A) = \det(a) = a$

- Für $n > 1$: $\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A_{ij}$ ist die Matrix, die keine Zeile i / Spalte j hat.

$$\det(A) = a_{11} \cdot \det(A_{11}) - a_{21} \cdot \det(A_{21}) + a_{31} \cdot \det(A_{31}) - \dots$$

→ Determinanten gibt es nur für $n \times n$ Matrizen. Sie werden entwickelt nach:

- Zeilen: $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$, falls i konstant

- Spalten: $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$, falls j konstant

→ Benennung: $\rightarrow \det(A_{ij}) := \text{Minoren} \rightarrow \text{Zahl}$

$\rightarrow (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij}) := \text{Kofaktoren} \rightarrow \text{Zahl}$

$\rightarrow [(-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})]^T := \text{Adjunkte} \rightarrow \text{Matrix mit Kofaktoren als Einträgen}$

- ↳ Bemerkungen:
- Die Determinante einer 2×2 Matrix ist der Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Zeilenvektoren aufgespannt wird: $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = ad - bc$
 - Zeilenoperation I ändert das Vorzeichen der Determinante
 - Zeilenoperation II ändert nichts an der Determinante
- } gilt auch für Spalten
- Die Determinante ist linear in jeder Zeile und Spalte, d.h.:
 - ↳ $\det \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \alpha$
 - ↳ $\det(\dots \alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \dots) = \det(\dots \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \dots) \cdot \alpha$
 - ↳ $\det \begin{pmatrix} \vdots \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\ \vdots \end{pmatrix}$
 - ↳ $\det(\dots \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \dots) = \det(\dots \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \dots) + \det(\dots \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \dots)$
 - Hat A zwei gleiche Zeilen $\rightarrow$ A hat eine Nullzeile, $\det(A) = 0$
 - $\det(2A) = 2^n \cdot \det(A)$, n ist die Anzahl an Spalten
 - Die Determinante einer Dreiecksmatrix: Produkt der Diagonalelemente: $\det(R) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$
 - $\det(A^T) = \det(A)$
 - $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
 - Ist A invertierbar: $\det(A) \neq 0$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
 - $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(C)$

↳ Berechnung über LR-Zerlegung: Für $PA = LR$, gilt
 $\det(A) = \det(P) \cdot \det(R) \Rightarrow \det(P) = (-1)^{\text{Anzahl der Zeilenvertauschungen}}$

↳ Ist die Determinante $\neq 0$, folgt, dass der Rang des LHS gleich n ist

↳ Es ist äquivalent:

- A ist invertierbar

- $\det(A) \neq 0$

- $\text{Rang}(A) = n$

- $Ax = b$ ist für jedes b lösbar und eindeutig

- $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung

Vektorräume:

↳ Ein Vektorraum (VR) ist definiert, als die Menge aller Objekte für die eine Addition, sowie eine Multiplikation mit einer Zahl definiert ist.

↳ Rechenregeln: (A1) $a + b = b + a$

(A4) $a + (-a) = 0$

(A2) $(a + b) + c = a + (b + c)$

(M1) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$

(A3) $a + 0 = a$, $0 \Rightarrow$ Nullvektor

(M2) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$

(M3) $1a = a$

↳ Unterraum: Für eine Teilmenge U von V (ein VR) gilt die Abgeschlossenheit bzgl. der Addition und der Multiplikation mit einer Zahl: $\rightarrow$ Dann heißt U Unterraum von V .
In U gelten A1-M3!

↳ Beispiel: - VR: $C((a, b), \mathbb{R})$... Vektorraum der stetigen Funktionen

$$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

$\rightarrow$ Vereinigung

Ein zugehöriger Unterraum wäre $U: \rightarrow U_1 \cup U_2$ allerdings nicht

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n \dots \text{Menge der Polynome vom Grad 1 bis } \infty.$$

- Für zwei Unterräume U_1, U_2 : $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ sind ebenfalls Unterräume

$\rightarrow$ Durchschnitt

$\rightarrow \text{span}(U_1, U_2)$

- Für ein HLGs $Ax = 0$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, ist die Menge aller Lösungen ein Unterraum des VR $\mathbb{R}^n$:

$$\text{z.B.: } V = \mathbb{R}^4,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 2 & -4 \\ -1 & -3 & 4 & 14 \\ 9 & 20 & 13 & 7 \end{pmatrix} \text{ gilt für } Ax = 0 \text{ die}$$

$$\text{Lösungen: } x_1 = -17x_3 - 43x_4, x_2 = 7x_3 + 19x_4$$

Die Menge aller Vektoren $\begin{pmatrix} -17 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -43 \\ 19 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$ mit $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ spannen also einen Unterraum auf.

↳ Definition: Ein Vektor b ist eine Linearkombination der Vektoren $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ falls $b = \sum_{i=1}^n x_i a^{(i)}$ für gewisse x_i gilt

↳ Definition: $\text{span}\{a^{(1)}, \dots, a^{(n)}\}$ ist die Menge aller Vektoren, die sich als Linearkombination von $a^{(1)} - a^{(n)}$ schreiben lassen.
 $\text{span}\{a^{(1)}, \dots, a^{(n)}\}$ ist ein (aufgespannter) Unterraum.
Ist $U = \text{span}\{a^{(1)}, \dots, a^{(n)}\} = V$, so heißt $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ ein Erzeugendensystem. Besitzt V ein Erzeugendensystem, so heißt V endlichdimensional.

↳ Lineare Abhängigkeit: Eine Menge von Vektoren heißen linear unabhängig, falls sich kein Vektor als Linearkombination der anderen schreiben lässt. (Bem.: Paarweise linear unabhängige Vektoren sind nicht zwingend linear unabhängig.)

↳ Definition: Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem heißt Basis!
Prüfe dazu: $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ heißt Basis falls für $A = (a^{(1)}, \dots, a^{(n)})$, das HLGs $Ax = 0$ nur die triviale Lösung besitzt!

↳ Definition: Die Dimension eines VR $V := \dim V$ ist die Anzahl der Vektoren einer Basis. Verschiedene Basen eines VR haben gleich viele Vektoren. $\dim V$ entspricht der max. Anzahl an linear unabhängigen Vektoren.

↳ Koordinatenvektor: hängt von der Basis ab. Sei eine Basis $a^{(1)}, \dots, a^{(R)}$ gegeben, so hat ein Vektor $\vec{x}$ in dem von der Basis erzeugten VR den Koordinatenvektor

Der Koordinatenvektor ist eindeutig, genau dann, wenn das erzeugende System linear unabhängig ist, es sich also um eine Basis handelt.

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_R)$ mit $x_1, \dots, x_R$ als Lösungen der Gleichung $\vec{x} = \sum_{i=1}^R x_i a^{(i)} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{x}$

↳ Zusammenfassend: - $a^{(1)}, \dots, a^{(R)}$ sind erzeugend, falls $A\vec{x} = \vec{b}$ für jeden $\vec{b}$ lösbar ist $\Rightarrow$ falls $\text{Rang} = n$
 ↳ Vektoren aus $\mathbb{R}^n$
 - $a^{(1)}, \dots, a^{(R)}$ sind eine Basis, falls $A\vec{x} = \vec{0}$ nur die triviale Lösung besitzt $\Rightarrow$ falls $\text{Rang} = R$
 ↳ Rang: # Pivotvariablen
 - Für $a^{(1)}, \dots, a^{(R)}$ ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren = Rang von $A = (a^{(1)}, \dots, a^{(R)})$

Normierte Vektorräume:

↳ Norm: Ordnet jedem Vektor eines VR eine reelle Zahl zu die N1-N3 erfüllen

N1: $\|\alpha\| \geq 0$, $\|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

N2: $\|\lambda \alpha\| = |\lambda| \cdot \|\alpha\|$

N3: $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$ (Dreiecksungleichung)

↳ Siehe bei: Anwendungen Eigenwert-Operat.-Norm: Problem

$\|A\| := \max \{ \|A\vec{x}\|_2 : \|\vec{x}\|_2 \leq 1, \vec{x} \in \mathbb{R}^n \}$

↳ Beispiel einer Norm für $m \times n$ -Matrizen

↳ Notation: $\|\alpha\|$... Betrag / Norm eines Vektors

$|\alpha|$... Betrag einer Zahl

↳ Beispiele: - $L_p \Rightarrow \|\alpha\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p}$ (für $p=2$... Euklidische Norm)

$\|f\|_{L^p} := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$

- Maximumnorm (L_∞) $\Rightarrow \|\alpha\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, |x_3|, \dots)$

↳ definiert auf dem Intervall $[a, b]$ ↳ Betrag des maximalen Wertes

- Für Funktionen $f: x \mapsto f(x)$: - $\|f\|_\infty = \max(|f(x)|)$

(Induzierte Norm, siehe nächste Seite)

- $\|f\|_1 = \max |f(x)| + \max \left| \frac{df}{dx} \right|$

↳ Konvergenz: Eine Folge von Vektoren x_n konvergiert gegen einen Vektor x , falls $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

↳ $\|x_n\| \rightarrow 0$, genau dann, wenn

- Endlichdimensionalen VR: Konvergenz unabhängig von der Norm $\|x\| \rightarrow 0$

- Unendlichdimensionalen VR: Konvergenz von der Norm abhängig

↳ Bemerkung: In einem endlichdimensionalen VR gilt für zwei Normen $\|x\|$ und $\|x'\|$ und eine Konstante c : $\frac{1}{c} \|x'\| \leq \|x\| \leq \|x'\| \cdot c$

↳ Skalarprodukt: Ordnet jedem Paar von Vektoren eines VR eine reelle Zahl zu $(\vec{x}, \vec{y})$ für die gilt:

S1: $(\vec{x}, \vec{y})$ od. auch $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ ist linear im zweiten Faktor:

i) $(\vec{x}, y^{(1)} + y^{(2)}) = (\vec{x}, y^{(1)}) + (\vec{x}, y^{(2)})$

ii) $(\vec{x}, \alpha \vec{y}) = \alpha \cdot (\vec{x}, \vec{y})$

S2: $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$

S3: Positiv definit, d.h.: $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$, für $(\vec{x}, \vec{x}) = 0$, $\vec{x} = \vec{0}$

↳ Beispiele: - Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$: $(x, y) = x^T y$ ($\rightarrow$ Matrix-Produkt)

- Für eine Diagonalmatrix D : $x^T D y$... Skalarprodukt

- Für zwei Funktionen in $C[0, 1]$: $(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx$

↳ Bemerkungen: - $\cos \varphi = \frac{(a, b)}{\|a\| \|b\|}$ (φ ... Winkel zw. a, b ; $\|a\|$... induzierte Norm)

- Orthogonale Projektion: $(x, y) \cdot \frac{1}{\|y\|} y$

- Schwarz'sche Ungleichung: $(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$

↳ Orthogonal: Bedeutet $(a, b) = 0$ (Orthogonale Vektoren sind linear unabhängig)

↳ Definition: Für ein definiertes Skalarprodukt (a, b) heißt $\| \cdot \| = \sqrt{(a, a)}$

die von (a, b) induzierte Norm. (Nicht jede Norm wird

von einem Skalarprodukt induziert, z.B.: L_∞ -Norm. Wird

eine Norm induziert, so gilt für sie die Parallelogramm-

regel: $\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2 \cdot (\|a\|^2 + \|b\|^2)$. Ist $\| \cdot \|$

gegeben, so kann man auf das Skalarprodukt schließen durch die

Polarisationsformel: $\langle a, b \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$

↳ Orthonomale Basis: In einem n -dimensionalen VR bilden n Vektoren

eine orthonomale Basis, wenn gilt $\|x_1\| = \dots = \|x_n\| = 1$

und $x_1 \perp x_2 \perp \dots \perp x_n$

↳ Gram-Schmidt'sches Orthonormalisierungs Verfahren: Verwandle eine Basis $b^{(1)}, \dots, b^{(n)}$

i) $e^{(1)} = \frac{1}{\|b^{(1)}\|} b^{(1)}$

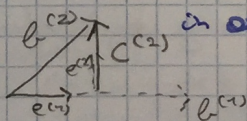
ii) $c^{(2)} = b^{(2)} - (b^{(2)}, e^{(1)}) e^{(1)}$

$- e^{(2)} = \frac{1}{\|c^{(2)}\|} c^{(2)}$

iii) $c^{(3)} = b^{(3)} - (b^{(3)}, e^{(1)}) e^{(1)} - (b^{(3)}, e^{(2)}) e^{(2)}$ (Projektion auf $e^{(1)} e^{(2)}$)

$- e^{(3)} = \frac{1}{\|c^{(3)}\|} c^{(3)}$

iv) ... usw.



Orthogonal-Projektion
auf einen "Raum":

Bestimme eine ortho-
normal-Basis.

Bilde die Orthogonal-
Projektion auf jeden
einzelnen Basisvektor!

Bilde die Summe dieser
Projektionen

FAST APPROACH

Lineare Abbildungen:

↳ Definition: Eine Abbildung $f: x \in V^n \mapsto y = f(x) \in V^m$ heißt linear, falls gilt: i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ii) $f(\alpha x) = \alpha \cdot f(x)$

Den Nullvektor wird immer auf Null abgebildet

Kann zusammenfassend als $f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$ geprüft werden!!!

↳ Sei V^n mit Basis $\{b^{(1)}, \dots, b^{(n)}\}$ und W^m mit Basis $\{c^{(1)}, \dots, c^{(m)}\}$ gegeben.

Jede lineare Abbildung $f: V^n \rightarrow W^m$ lässt sich durch eine $m \times n$ -Matrix beschreiben, sodass $[y]_c = A[x]_b$ mit $y = f(x)$. $A = ([f(b_1)]_c, \dots, [f(b_n)]_c)$, d.h. die Spalten von A sind die Koordinatenvektoren von $f(b_i)$ bzgl. c .

↳ Definition: i) Kern A : $\text{Kern } A := \{x \in V : Ax = 0\}$ → Menge aller Vektoren, die auf Null abgebildet werden
 ii) Bild A : $\text{im } A := \{b \in W : Ax = b \text{ ist lösbar}\}$ → Unterräumen von W^m

↳ Bemerkungen: - Bild $A = \text{im } A = \text{span}\{a^{(1)}, \dots, a^{(n)}\}$ → Falls Basis gefragt: Überprüfe Unabhängigkeit!!!
 - $\dim(\text{Kern } A) + \dim(\text{im } A) = n$
 - $\dim(\text{im } A) = \dim(\text{im } A^T) = \text{Rang } A = \text{Rang } A^T$ → Abbildung von $W^m \rightarrow V^n$

↳ Zusammengesetzte Abbildungen: $(f \circ g)$

i) $G(f(x))$ ist linear!

ii) Für $f(x) = Ax$, $G(x) = Bx$ gilt:
 $g(x) := (G \circ f)(x) = BAx$

↳ A hat die gleiche Anzahl maximal lin. unabh. Zeilen, sowie Spalten!

↳ Bemerkungen: - Bild A und Kern A^T - $A: m \times n$ -Matrix - spannen $\mathbb{R}^n$ auf
 - Die Unterräume $\text{im } A$ und $\text{Kern } A^T$ sind orthogonal, d.h. für $y \in \text{im } A$ und $x \in \text{Kern } A^T$ gilt $(y, x) = y^T x = 0$

↳ Fredholm'sche Alternative: $Ax = b$ ist genau dann lösbar, falls b orthogonal zu allen Lösungen von $A^T y = 0$ ist → Bedingung des LGS

Selbstabbildungen:

↳ Definition: Eine Abbildung heißt invertierbar, falls f bijektiv ist. Dann ist A regulär und die Umkehrabbildung f^{-1} wird durch A^{-1} beschrieben. $f \circ f^{-1} = I$

→ invertierbar: jedem x ist ein $f(x)$ zugeordnet
 → surjektiv: jedes $f(x)$ wird genau einmal getroffen

↳ Koordinatentransformation: (Basiswechsel)

Seien $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $B' = (b'_1, \dots, b'_n)$ zwei Basen, dann ist ein Vektor v gegeben durch: $[v]_B = S[v]_{B'}$ bzw. $[v]_{B'} = T[v]_B$ für eine Übergangsmatrix T von B nach B' . $T = ([b_1]_{B'}, \dots, [b_n]_{B'})$
 $S = ([b'_1]_B, \dots, [b'_n]_B)$ → Falls $B = E$, ist S gerade $(b'_1, \dots, b'_n) \rightarrow$ gegeben!

↳ Bemerkung: $S = B^{-1}$

↳ Bem.: Im Buch wird T verwendet als Übergangsmatrix von B' nach B ! (S.130)

↳ Basiswechsel für Abbildungen:

Eine Abbildung $F: x \mapsto Ax$ soll in einer neuen Basis ausgedrückt werden! Für eine Übergangsmatrix von B nach B' , T soll gelten:

Die neue Abbildung $G: y \mapsto B'Gy$ und $y = Tx$ soll das gleiche geben wie T angewandt auf $Fx = Ax$, d.h. $B'Tx = TAx$

Folglich: $B = TAT^{-1}$!

$$\begin{aligned} [v]_{B'} &\xrightarrow{T} [v]_B \\ T \downarrow & \\ [v]_B &\xrightarrow{F} [Fv]_B \\ = T^{-1}[Fv]_{B'} & \end{aligned}$$

→ neben CP, EW, Spektrum, Determinante, Spur

↳ Definition: Zwei Matrizen heißen ähnlich falls gilt $BP = PA$ für eine reguläre Matrix P .

↳ Bemerkung: Die Darstellungsmatrizen einer Abbildung bzgl. verschiedener Basen sind ähnlich!

Das Eigenwert-Problem:

↳ Gleiches CP

↳ Definition: Eine Zahl λ heißt Eigenwert der Matrix A , falls es einen zugehörigen Eigenvektor $\vec{v}$ gibt, s.d. $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

↳ Interpretation: (Betrachte A als Darstellungsmatrix) Ein Eigenvektor wird unter der Abbildung A nur gestreckt (nicht rotiert) und zwar um das λ -fache.

↳ Berechnung: i) EW: $Av = \lambda v \Rightarrow Av - \lambda v = 0 \Rightarrow (A - \lambda I) \cdot v = 0$

Es gibt also entsprechende Vektoren $\vec{v} \neq \vec{0}$, genau dann, falls $\det(A - \lambda I) = 0$.

ii) EV: Wie oben gilt $(A - \lambda I) \cdot v = 0$, d.h. alle EV zum EW λ sind $\in \ker(A - \lambda I)$ (Lös des homogenen LGS)

$\det(A - \lambda I)$ heißt charakteristisches Polynom von A . Das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ einer $n \times n$ -Matrix hat Grad n .

↳ Bemerkungen: - Alle Eigenwerte von A sind Nullstellen von $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

- Ist ein EW λ^* $\mathbb{R}$ -fache Nullstelle von $p_A(\lambda)$, d.h. kommt der Linearfaktor $(\lambda - \lambda^*)$ $\mathbb{R}$ mal in $p_A(\lambda)$ vor, so hat der EW λ^* die algebraische Vielfachheit $\mathbb{R}$.

- Jede $n \times n$ -Matrix hat genau n Eigenwerte, wenn diese mit ihrer alg. Vf. gezählt werden.

↳ Ähnliche Matrizen haben dasselbe CP → Gleiche EW (mit gleicher alg. Vf.)

Sind A & B ähnlich mit $B = T^{-1}AT$ und $\vec{v}$ EV von A zum EW λ , dann ist $T^{-1}\vec{v}$ EV von B zum EW λ .

Bemerkung:
Für komplex konjugiert Eigenwerte sind auch die zugehörigen EV komplex konjugiert!
z.B.: $\lambda_1 = \pm i, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

Eigenvektoren zu verschiedenen EW sind immer linear unabhängig!

Die EW einer Dreiecks-Matrix stehen auf der Diagonalen!!!

EV zu einem bestimmten EW spannen den sog. Eigenraum auf! Alle Vektoren aus dem Eigenraum sind EV zu diesem EW

↳ Definition: $\dim(\ker(A - \lambda I))$ heißt geometrische Vielfachheit des EW λ . D.h. es lassen sich max. so viele linear unabhängige EV zum EW λ finden, wie λ 's geom. VF.

$\ker(A - \lambda I)$ heißt Eigenraum zum EW λ . Seine dim ist die geom. VF von λ

↳ Bemerkung: i) $1 \leq \text{geom. VF} \leq \text{alg. VF} \leq n$
 ii) Die EV zu verschiedenen EW sind linear unabhängig!

↳ Eine Eigenbasis wird von den Eigenvektoren aufgespannt. Sie existiert falls es n linear unabhängige Eigenvektoren gibt, d.h. falls für jeden EW gilt: $\text{geom. VF} = \text{alg. VF}$.

↳ Definition: Eine Matrix heißt
 i) einfach, falls $\text{alg. VF} = \text{geom. VF} = 1$
 ii) halbeinfach, falls $\text{alg. VF} = \text{geom. VF}$. (Es existiert eine Eigenbasis)

↳ Diagonalisierbarkeit:

- Eine Matrix heißt diagonalisierbar, falls es ein T gibt, s.d. $T^{-1}AT$ diagonal ist
- Eine Matrix ist immer diagonal, wenn man sie in ihrer Eigenbasis betrachtet. D.h. es ist äquivalent: i) A ist halbeinfach

Es soll äquivalent sein: Auf einen Vektor A anwenden oder einen Vektor in die die Eigenbasis zu transformieren, dann darauf A anzuwenden und zurück in die Basis zu transformieren: $A = TDT^{-1}$ (denn T^{-1} wird zuerst angewandt!)

→ $(u^{(1)}, \dots, u^{(n)})$... Eigenbasis von A , d.h. $u^{(1)}, \dots, u^{(n)}$ Eigenvektoren von A ! Dann ist für $T = (u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)})$: $A = TDT^{-1}$ mit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

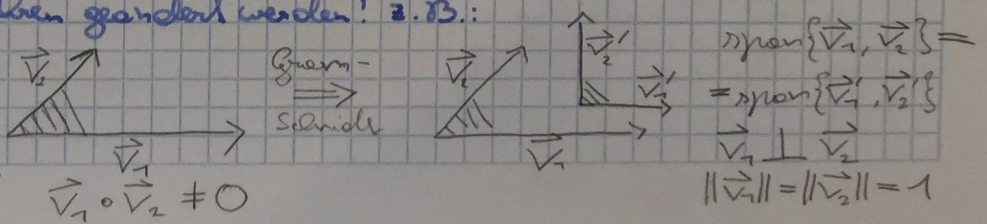
Kann als Koord.-transformation der Matrix A aufgefasst werden (in der Eigenbasis)

↳ Symmetrische Matrizen & ihre Eigenwerte:

- Eigenwerte symmetrischer Matrizen sind reell
- Eigenvektoren verschiedener Eigenwerte sind orthogonal
- Symmetrische Matrizen sind immer diagonalisierbar, d.h. sie besitzen eine Eigenbasis!

→ Bem.: Die Eigenbasis kann orthonormal gewählt werden!

→ Beachte: Eigenwerte mit $\text{geom. VF} > 1$ besitzen einen Eigenraum mit entsprechender Dimension → EV aus diesem Raum dürfen mit dem Schmid'schen Orthogonalisierungsverfahren geändert werden! z.B.:



Ergänzung:

→ Sei $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ ein EV zum EW λ (A muss sym sein) Dann sind ebenfalls EV: $\vec{v}$ komplex konjugiert

→ $\text{Re}(\vec{v}), \text{Im}(\vec{v})$

D.h. λ hat alg. VF. 4! Voraussetzung: $\text{Re}(\vec{v}), \text{Im}(\vec{v}) \neq 0$

↳ Anwendungen des Eigenwert-Problems:

i) Potenzen von Matrizen: A^R

→ Löse das Eigenwert-Problem und diagonalisiere A , s.d. $D = T^{-1}AT$
(für T , diejenige Matrix mit EV als Spalten)
 $A = TDT^{-1}$

$$\rightarrow A^R = TDT^{-1} \cdot TDT^{-1} \cdot \dots \cdot TDT^{-1} = T D^R T^{-1}$$

$$\rightarrow \text{Wobei } D^R = \text{diag}(\lambda_1^R, \lambda_2^R, \lambda_3^R, \dots, \lambda_n^R)$$

ii) Exponentialfunktion für Matrizen: e^A

$$\rightarrow \text{Definition über Taylor-Reihe: } e^A = \sum_{R=0}^{\infty} \frac{A^R}{R!} = \sum_{R=0}^{\infty} \frac{T D^R T^{-1}}{R!}$$

→ Diagonalisiere A

$$\rightarrow \text{Berechne } e^D = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$$

$$\rightarrow e^A = T e^D T^{-1}$$

Schnelle Berechnung $A^R \cdot x$:
→ $A^R x = T D^R T^{-1} x$
→ Löse: $Tz = x$ (Gauß)
→ Berechne $T D^R z$
→ Vorteil: T^{-1} muss nicht bestimmt werden

$$= T \cdot \left(\sum_{R=0}^{\infty} \frac{D^R}{R!} \right) \cdot T^{-1} = T e^D T^{-1}$$

iii) Matrix-Operator-Norm: $\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$

→ Interpretation: Welche ist die maximale Streckung, die einem Vektor unter der Abbildung A widerfährt? → $\|A\|_2$

→ Berechnung: Ist A symmetrisch?

↳ Nein: → Löse Eigenwertproblem für $A^T A$ und

finde eine Transform.-Matrix, s.d. $D = T^T A^T A T$

(T → orthogonal → $T^T = T^{-1}$) $D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$

(μ_i ... EW von $A^T A$)

$$\rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\max\{\mu_i\}}$$

→ Bemerkung: Alle EW von $A^T A$ sind positiv

Beweis: Sei $x = Ty$, T orthog.

$$\|Ax\|_2^2 = \|ATy\|_2^2 = \langle ATy, ATy \rangle$$

$$= (ATy)^T \cdot ATy = y^T \cdot T^T A^T A T y$$

Wähle also T mit orthonormalen

Eigenvektoren zu $A^T A \Rightarrow$

$$\|Ax\|_2^2 = \langle y, Dy \rangle$$

$$\text{Somit ist: } \max \|Ax\|_2^2 = \max\{\mu_i\}$$

Δ BETRAG

↳ Ja: → Löse Eigenwertproblem für A

$$\rightarrow \|A\|_2 = \max |\lambda_i| \quad (\lambda_i \dots \text{EW von } A)$$

$$\rightarrow \text{Norm der Inversen: } \|A^{-1}\| = \frac{1}{\min\{\mu_i\}}$$

↳ Kleinster Eigenwert von $A^T A$

bzw. falls A symmetrisch

$$\|A^{-1}\| = \frac{1}{\min\{|\lambda_i|\}} \rightarrow \text{Betragsmäßig kleinster EW von } A$$

L

Ausgleichsrechnung - Methode d. kleinsten Quadrate

→ Normalgleichungen:

→ Ausgangslage: Nach einer Messreihe liegen für die gleichen Größen

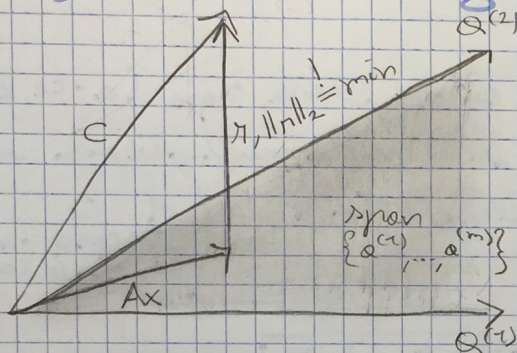
VORAUSSETZUNG:

Gemessene Werte → linear unabhängig → $\text{Rang} = n$

unterschiedliche Werte von → führt auf ein überbestimmtes (i. A. nicht lösbares) Gleichungssystem!

→ Problemstellung: Finde dennoch eine Lösung, indem man nach minimalen Messfehlern sucht!

→ Graphische Anschauung: Das überbestimmte LGS $Ax = c$ ist,



genau dann lösbar, falls c als Linearkombination der Spalten von A geschrieben werden kann, d. h. falls c im $\text{span}\{q^{(1)}, \dots, q^{(n)}\}$ liegt. Falls dies nicht der Fall ist, muss c um einen Vektor r (Residuenvektor) verschoben werden! r gilt es zu "minimieren"!

→ Lösung: Aus dem unlösbaren LGS $Ax = c$ wird das lösbare

LGS $Ax = c + r$ mit $\|r\|_2$ ist genau dann minimal, falls r orthogonal zu $\text{span}\{q^{(1)}, \dots, q^{(n)}\}$ steht, d. h. falls

$\langle q^{(1)}, r \rangle = \langle q^{(2)}, r \rangle = \dots = 0$

Setzt man für $r = Ax - c = q^{(1)}x_1 + q^{(2)}x_2 + \dots + q^{(n)}x_n - c$ ein ergibt sich:

$$\langle q^{(1)}, q^{(1)} \rangle x_1 + \langle q^{(1)}, q^{(2)} \rangle x_2 + \dots = \langle q^{(1)}, c \rangle$$

$$\langle q^{(2)}, q^{(1)} \rangle x_1 + \langle q^{(2)}, q^{(2)} \rangle x_2 + \dots = \langle q^{(2)}, c \rangle$$

u.s.w. $\Rightarrow$ Normalgleichungen!

→ Kompakte Schreibweise der Normalgleichungen: $A^T A x = A^T c$

(Die eindeutige Lösung x dieses LGS minimiert die Normgl. im Sinne der kleinsten Quadrate)

→ QR-Zerlegung:

→ Normalgleichungen sind schlecht konditioniert $\rightarrow$ numerisch instabil

→ Lösung: i) Bestimme die orthogonale Matrix Q , s.d. $A = QR$,

wobei R eine einfache Gestalt besitzt (R ist eine obere Dreiecksmatrix: REGULAR)

ii) $Ax - c = r$ und $Q^T Ax - Q^T c = Q^T r$ haben

nach dem Prinzip $\|r\|_2 = \min$ dieselbe Lösung, da Multiplikation mit Q^T die Länge von r nicht ändert!

iii) Laut Definition von Q folgt dann das LGS

$$R x = \underbrace{Q^T c}_d = \underbrace{Q^T c}_s$$

$$\begin{bmatrix} R_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$$

L

L

→ Lösung (QR-Zerlegung)

$$\begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \end{bmatrix}$$

iv) Der Vektor x hat offensichtlich keinen Einfluss auf s_1 ;
setze $s_0 = 0$ um $\|s\|$ zu minimieren!

v) Löse durch Rückwärtsbeinsehen $R_0 x = d_0$

vi) Länge des Residuenvektors: $-d_1 = s_1$, d.h. $\|x\| = \|d_1\|$

→ Bemerkung (Dimensionen): $\rightarrow Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$

$\rightarrow R \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$\rightarrow d, s \in \mathbb{R}^m$, wobei $d_0, s_0 \in \mathbb{R}^n$; $d_1, s_1 \in \mathbb{R}^{m-n}$

→ Bestimme die Matrix Q :

i) Ausgangspunkt: A ! Um an der Stelle a_{qp} (q -te Zeile und p -te Spalte) eine Null zu erzeugen, multiplizieren wir mit U_{qp}^T . U_{qp}^T hat folgende Form

ii) Berechne $\cos \varphi$ & $\sin \varphi$:

$$\sin \varphi = -\frac{a_{qp}}{\omega}, \quad \cos \varphi = \frac{a_{pp}}{\omega}, \quad \omega = \sqrt{a_{qp}^2 + a_{pp}^2}$$

$$\begin{matrix} p \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \\ q \rightarrow & \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ p & q & q \end{matrix} \end{matrix}$$

iii) Wiederholen bis A auf die gewünschte Form gekommen ist

iv) $Q^T = U_{qp}^T \cdots U_{p_2 p_2}^T \cdot U_{p_1 p_1}^T$ Erste Givens-Rot. mit der multipliziert wurde!!!

→ Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Schritt: Bringe an der Stelle a_{21} eine Null: $a_{qp} = 1, a_{pp} = 1$

$$\sin \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$U_{21}^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow A' = U_{21}^T A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 2 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Bringe a_{32} auf Null: $a_{qp} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, a_{pp} = 2, \omega = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\sin \varphi = \frac{3}{\sqrt{5}}, \quad \cos \varphi = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$U_{32}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \Rightarrow A'' = U_{32}^T A' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R$$

3. Schritt: $Q^T = U_{32}^T \cdot U_{21}^T$

$$\Delta Q = U_{21} \cdot U_{32}$$

→ Regressions-Gerade:

$$ax_1 + b = y_i = r_i$$

Normalgleichungen liefern:

$(x_i, y_i, \dots, \text{Gemessene Größen})$

$$Q = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$b = \bar{y} - Q\bar{x}$$

$\bar{x}, \bar{y}$ Vektoren mit den Mittelwerten aller Daten als Einträge!

L

Quadratische Formen:

↳ Für symmetrische A heißt $q_A(x) = \langle x, Ax \rangle = x^T A x$

quadratische Form. $\begin{pmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{pmatrix} = A \Rightarrow \langle x, Ax \rangle = ax_1^2 + cx_1x_2 + bx_2^2$

↳ Bemerkung: i) Auf der Diagonalen von A stehen die Koeffizienten der rein quadratischen Terme

Illustration

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_2^2 + \dots + 6x_2x_4 + \dots$$

$x_1 x_2 x_3 x_4$

ii) Für alle Einträge, die sich nicht auf der Diag. befinden gilt: In der j -Zeile und i -Spalte von A steht die Hälfte des Koeffizienten des Produkts $x_i x_j$

Terme wie z.B. $\dots + x_1 + x_1^2 x_2 + \dots$
↳ bei Vektorkomponenten nicht möglich
 sind in quadr. Formen nicht mög.

↳ Hauptachsentransformation

→ Da A immer symmetrisch gewählt werden kann, existiert stets eine orthonormale Eigenbasis zu A ! Somit ist A diagonalisierbar.

Die Transformation $[x]_E = T [x]_B$, wobei T die Vektoren der Eigenbasis als Spalten besitzt bringt $D = T^{-1} A T$ auf die Form $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (T orthogonal $\rightarrow T^{-1} = T^T$)

→ Sei $[x]_E = x$ und $[x]_B = y \Rightarrow x = T y$

In der Eigenbasis betrachtet wird $q_A(x) = x^T A x$ zu

$q_D(y) = y^T T^T A T y = y^T D y$ "rein" quadratische Form

→ Bemerkung: Informationen die man von $q_D(y)$ gewinnt (z.B.: Halbochen, Mittelpunkt) können auf $q_A(x)$ übertragen werden, da T orthogonal und somit längenbew. ist!

→ $q_A(x)$ und $q_D(y)$ beschreiben natürlich dieselbe Figur, aber bezüglich verschiedener Koordinaten!

Kegelschnitte:

↳ Die allgemeine Form lautet: $q(x) = x^T A x + a^T x + b = 0$
 Für $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ heißt $q(x)$ Kegelschnitt, für $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ Fläche 2. Grades Quadric

↳ Um eine gegebene Form zu analysieren: Bringe $q(x)$ auf Normalform.

i) Wegen des Störterms ($a^T x$) reicht die Hauptachsentransf. nicht aus um auf Normalform zu gelangen $\rightarrow$ Translation

ii) Die Translation wird wesentlich durch quadratische Ergänzen!

iii) Die gewonnenen Informationen müssen zurücktransformiert werden: $\rightarrow$ Bestimme zuerst den Mittelpunkt in den alten Basis $\rightarrow$ Träg von dort aus die Halbochen ab (Eigenvektoren)

4

Beispiel: Kegelschnitt $Q: x^T \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix}^T x = 0$

1. Schritt: Hauptachsentransformation: $T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

ORTHONORM. BASIS!

Mit $x = Ty \downarrow$

Wichtig für die Richtbarkeit $\Rightarrow$

y_2 -Richtung
 y_1 -Richtung

$$Q: y^T \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}}_{\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 12\sqrt{5} \end{pmatrix} y = 0$$

2. Schritt: Translation: $Q: y_1^2 + 6y_2^2 + 12\sqrt{5}y_2 = 0$

QUADRATISCH ERGÄNZEN: $y_1^2 + 6 \cdot (y_2 + \sqrt{5})^2 = 30$

II. Transformation: $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 + \sqrt{5} \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ TRANSLATION IN DIE NEGATIVE RICHTUNG
 $\Rightarrow \frac{z_1^2}{30} + \frac{z_2^2}{5} = 1$
 $\hookrightarrow$ D.R. für ein Punkt mit $y_2 = 2 \rightarrow z_2 = 2 + \sqrt{5}$

3. Schritt: Eigenschaften finden & in urspr. Koord.-Sys. bringen

i) Mittelpunkt: In Normalform (z-Koordinaten) immer (0/0)

$\rightarrow$ In $y: (0 \quad -\sqrt{5})$

D.R. $\sqrt{5}$ in Richtung $(-y_2)$

$\rightarrow$ In $x: \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (Betrag: $\sqrt{5}$)

$\rightarrow$ Siehe T-Matrix

$\hookrightarrow$ kann anpassen

ii) Achsen: I: Länge: $\sqrt{30} \Rightarrow$ Vom Mittelpunkt aus gemessen! (ändert sich nicht!!!)

Richtung: In $z: (1 \quad 0)$

In $y: (1 \quad 0)$

In x : Siehe T-Matrix $y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

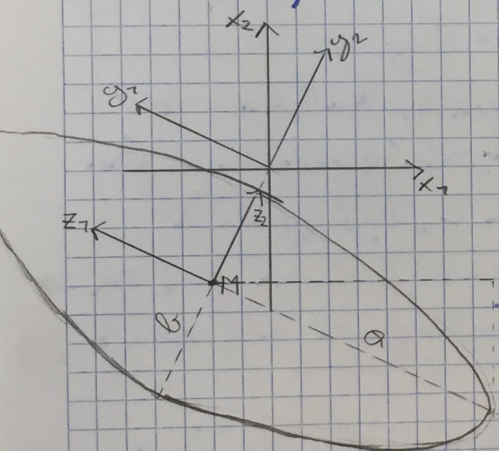
Aber: $\|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\| \neq \sqrt{30} \rightarrow$ Anpassen

Endgültig: $\sqrt{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Vom Mittelpunkt der Kegelschnitte aus NICHT vom Ursprung

II: Analog: Länge $\sqrt{5}$

Richtung: In $z/y: (0 \quad 1)$

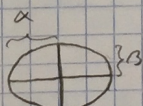
In $x: (1 \quad 2)$



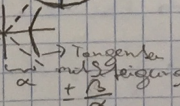
$\hookrightarrow$ Kegelschnitte / Quadriken

(Normalform)

i) Kreis/Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



ii) Hyperbel: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



iii) Leere Menge: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$

iv) Parabel: $x^2 - axy = 0$ (Rang(A)=1)

v) Ellipsoid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

vi) Hyperboloid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

$\hookrightarrow$ Einschalig: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

$\hookrightarrow$ Zweischalig: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

vii) Hyperbolisches Paraboloid: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

$\hookrightarrow$ Signatur:

$\rightarrow$ Sei A symmetrisch, $\mathbb{R}^{m \times m}$

$\rightarrow$ Signatur von A: (p, n, z) $\rightarrow$ positive EV, negative EV, Nullvektoren

$\rightarrow$ Für eine reguläre Metrik W: $\rightarrow$ $\times$ neg. EV

A und $W^T A W$ haben dieselbe Signatur, $\exists W$, s.d.

$$W^T A W = (1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$$

L

Lehre Extrema:

- ↳ Definitheit: Eine quadratische Form $q_A = \langle x, Ax \rangle$ und A heißen:
- positiv definit, falls $x \neq 0 \Rightarrow q_A(x) > 0$ (semi-definit)
 - negativ definit, falls $x \neq 0 \Rightarrow q_A(x) < 0$ (bzw. $\leq$)
 - indefinit: $q_A(x)$ nimmt positive & negative Werte an. Es werden mehrere Werte auf Null abgelesen

- ↳ Für A symmetrisch & W regulär:

- $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ist positiv definit $\Leftrightarrow \lambda_i > 0$
- A ist positiv definit $\Leftrightarrow$ Alle EW > 0
- A ist positiv definit $\Leftrightarrow W^T A W$ ist positiv definit

- ↳ Hurwitz-Kriterium: Eine symmetrische Matrix A ist genau dann positiv definit, falls alle Hauptminoren (Unterdeterminanten) > 0 sind. Bedingung: $a_{11} > 0$, sonst Multiplikation mit (-1)
- Berechne kleine Determinanten
- | | | |
|----------|----------|----------|
| a_{11} | a_{12} | a_{13} |
| a_{21} | a_{22} | a_{23} |
| a_{31} | a_{32} | a_{33} |

- ↳ Sei a ein kritischer Punkt einer Funktion f (d.h. $\nabla f = \vec{0}$)

Die Hesse-Matrix von f lautet $H_f \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$

- H_f ist positiv definit $\Rightarrow a$ ist lokales Minimum
 - H_f ist negativ definit $\Rightarrow a$ ist lokales Maximum
 - H_f ist indefinit $\Rightarrow a$ ist Sattelpunkt
- jeweils ausgewertet in Punkt a

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 + x^2y + xz$$
$$H_f: \begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x & 2x+2y & 2x & 1 \\ y & 2x & 2 & 0 \\ z & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Lineare Differentialgleichungen:

- ↳ Eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung $y' = a y$ (konst. Koeffizient) hat die allgemeine Lösung $y(x) = C e^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$

Eine eindeutige Kurve wird durch die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ oder $C = 1$

festgelegt $\rightarrow y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$ ist die gesuchte Kurve! → Punkt, auf dem 1-dimensionalen Lösungsraum

- ↳ System homogener linearer DGL mit konst. Koeff.:

Kann allgemein geschrieben werden als $Y' = AY$

Alle 3 Funktionen y_1, y_2, y_3 hängen von derselben Variable ab !!

Die Lösung lautet: $Y = C e^{Ax}$, $C \in \mathbb{R}^n$... Sie ist ein n -dimensionaler Unterraum von $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ → Ein Skalar wird auf einen Vektor abgebildet

- ↳ Lösungsmethode: (Entkoppeln) Problem: $Y' = AY$

Wir bringen A auf Diagonalform, so dass jede Zeile eine unabhängige lösbare DGL wird. Die n sogenannten Basislösungen lauten $\{C_1 e^{\lambda_1 x}, \dots, C_n e^{\lambda_n x}\}$. Sie lösen je eine Gleichung:

$z_1' = \lambda_1 z_1, \dots, z_n' = \lambda_n z_n$. Die Lösung für y_i erhält man nun durch eine passende Linearkombination der Basislösungen.

Nämlich genau eine Multiplikation mit den Eigenvektoren!

↳ Entkoppelungsmethode (Systematisch)

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ Y' & \xrightarrow{\quad} & Y' \\ T^{-1} \downarrow & & \uparrow T \\ Z & \xrightarrow{\quad} & Z' \end{array}$$

- Wir betrachten das Problem $Y' = AY$ in der Eigenbasis von A
- Dann gilt für einen Vektor $Z = T^{-1}Y$: $Z' = TZ$
- Wir erhalten für $Z = \text{diag}(e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}) \cdot C$, $C \in \mathbb{R}^n$
- Wir transformieren nun wieder in die alte Basis, wobei $Y = TZ$ und $C = T^{-1}Y_0$: $Y = T \cdot \text{diag}(e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}) T^{-1} Y_0$

↳ Dies entspricht der Lösung wie vorher angegeben $Y = e^{Ax} Y_0$

↳ Homogene lineare DGLs höherer Ordnung:

- Kann immer auf ein System von n -Gleichungen 1. Ordnung überführt werden, mit Hilfe der Substitution: $y_0 = y, y_1 = y', y_2 = y'', \dots, y_{n-1} = y^{(n-1)}$
- Folgende Gestalt: $\begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ $y_0 = y, y_1 = y', \dots, y_{n-1} = y^{(n-1)}$
- Funktioniert auch bei einem System höherer Ordnung. Nämlich lässt sich ein System von m -Gleichungen n -ter Ordnung in ein System von $n \cdot m$ -Gleichungen 1. Ordnung überführen!

↳ Inhomogene lineare Systeme:

→ Problem: $Y' = AY + B$

→ Es gilt: Der Lösungsraum des homogenen Systems S_H ist n -dimensional.

Eine partikuläre Lsg. kann genauso über einen Ansatz gefunden werden:

SIEHE S. 2

Sei φ eine partikuläre Lösung des Problems, dann setzt sich der Lösungsraum der inhomogenen Gleichung zusammen als: $S_I = S_H + \varphi$

↳ Berechnung zur Entkoppelungsmethode:

Besuche, dass die Inverse T^{-1} nicht berechnet werden muss! Kennt man nämlich das Eigenwertproblem für A , kann man die Lösung direkt hinschreiben:

$$Y = C_1 e^{\lambda_1 x} \vec{v}_1 + \dots + C_n e^{\lambda_n x} \vec{v}_n$$

↳ Eigenvektoren zum EW λ_i

Für das Anfangswertproblem können nun die Konstanten $C_1 - C_n$ bestimmt werden durch das LGS: $T C = Y_0$

$$\rightarrow (C_1, \dots, C_n)^T$$

↳ Vorgehensweise bei komplexen Eigenwerten:

↳ vorausgesetzt A ist reell!

- Komplexe Eigenwerte, -vektoren treten immer konjug. herauf
- Teile sowohl $\lambda = a + bi$, als auch $\vec{v} = (\vec{u} + i\vec{w})$ in $\text{Re}()$ & $\text{Im}()$ auf
- $Y = \dots e^{ax} \cdot \left[(C_1 \cos(bx) - C_2 \sin(bx)) \cdot \text{Re}(\vec{v}) - (C_1 \sin(bx) + C_2 \cos(bx)) \cdot \text{Im}(\vec{v}) \right]$