Analysis I

dcamenisch

Reelle und komplexe Zahlen

Axiome der Reelle Zahlen

$\mathbb{R}$ ist ein komm., angeordneter Körper, der ordnungsvollständig ist.

(A) **Axiome der Addition**
$x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}$

- (A1) Assoziativität: $x + (y + z) = (x + y) + z$
- (A2) Neutrales Element: $x + 0 = x$
- (A3) Inverses Element: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$
- (A4) Kommutativität: $x + y = y + x$

(M) **Axiome der Multiplikation**

- (M1) Assoziativität: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- (M2) Neutrales Element: $x \cdot 1 = x$
- (M3) Inverses Element: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0\ \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$
- (M4) Kommutativität: $x \cdot y = y \cdot x$

(D) **Axiom der Distributivität**
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

(O) **Ordnungsaxiome** (1-3 Partialorder)

- (O1) Reflexivität: $x \leq x$ $\forall x \in \mathbb{R}$
- (O2) Transitivität: $x \leq y$ und $y \leq z \Rightarrow x \leq z$
- (O3) Antisymmetrie: $x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow x = y$
- (O4) Total: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt entweder $y \leq x$ oder $x \leq y$

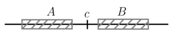
(K) **Kompatibilität**

- (K1) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
- (K2) $\forall x \geq 0, \forall y \geq 0 : x \cdot y \geq 0$

(V) **Ordnungsvollständigkeit** Seien A, B Teilmengen von $\mathbb{R}$, so dass

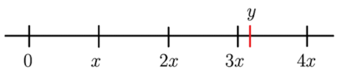
- (i) $A \neq \emptyset,\ B \neq \emptyset$
- (ii) $\forall a \in A$ und $\forall b \in B$ gilt: $a \leq b$

Dann gibt es $c \in \mathbb{R}$, so dass $a \leq c \leq b$.



Archimedisches Prinzip

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $y \leq n \cdot x$.



Def. $|x| := max\{x, -x\}$
$\implies |xy| = |x||y|, |x + y| \leq |x| + |y|, |x + y| \geq ||x| - |y||$

Supremum und Infimum

Def. $A \subseteq \mathbb{R}$ heisst von oben [unten] beschränkt (v.o.b. [v.u.b.]), falls es $x \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $x \geq a$ $[x \leq a]$ für alle $a \in A$. x heißt dann obere [untere] Schranke von A. A heisst beschränkt, falls A v.o.b. und v.u.b. ist.
Falls A eine obere Schranke mit $x \in A$ hat, ist x das **Maximum** von A, $x = \text{Max}(A)$. [Minimum analog]

> **Satz.** Falls $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ v.o.b. [v.u.b.] ist, gibt es eine kleinste obere Schranke [grösste untere Schranke] x von A. x heißt dann **Supremum [Infimum]** von A, $x = \text{Sup}(A)$ $[x = \text{Inf}(A)]$.

Wenn $x = \text{Sup}(A)$ so gilt:

1. $x \geq a$ für alle $a \in A$
2. für alle $y < x$ ist y keine obere Schranke von A
$\Leftrightarrow$ für alle $y < x$ gibt es $a \in A$ mit $y < a$

Falls A ein Maximum besitzt, ist $\text{Max}(A) = \text{Sup}(A)$.

Eigenschaften

1. Wenn $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ und B beschränkt ist, so ist A beschränkt und $\text{Sup}(A) \leq \text{Sup}(B), \text{Inf}(A) \geq \text{Inf}(B)$
2. Wenn $A, B \subseteq \mathbb{R}, A, B \neq \emptyset$ und $a \leq b$ für alle $a \in A, b \in B$, dann ist A v.o.b, B v.u.b. und $\text{Sup}(A) \leq \text{Inf}(B)$

Notation: Für $A \neq \emptyset$ und nicht v.o.b. definieren wir $\text{Sup}(A) = \infty$, falls nicht v.u.b. $\text{Inf}(A) = -\infty$

Folgen und Reihen

Definitionen

Def. Eine **Folge** (reeller Zahlen) ist eine Abbildung $a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$
Wir schreiben a_n statt $a(n)$ und bezeichnen eine Folge mit $(a_n)_{n\geq 1}$
Bsp. $a_n = \frac{1}{n}$
Def. Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, so ist die **Reihe** $(S_n)_{n\geq 1}$, die Partialsumme $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Wichtige Folgen

1. Arithmetische Folge: (a_n), sodass $a_{n+1} - a_n = d$ konstant ist, d.h. $a_1 = a,\ a_2 = a_1 + d, \quad a_n = a + (n-1)d$
2. Geometrische Folge: (a_n), sodass $a_{n+1} = qa_n$ mit q konstant, d.h. $a_1 = a,\ a_2 = qa, \quad a_n = q^{n-1} \cdot a$

Satz. Es gilt

$$a + qa + \cdots + q^{n-1}a = a(1 + q + \cdots + q^{n-1}) = \begin{cases} na & \text{für } q = 1 \\ a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} & \text{für } q \neq 1 \end{cases}$$

Grenzwert und Konvergenz

> **Def.** Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{C}$ **konvergiert** für $n \to \infty$ gegen ein $a \in \mathbb{C}$, falls es für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq \mathbb{N}$ gilt $|a_n - a| < \epsilon$.
>
> **Äquivalent:** Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heisst konvergent, falls es $l \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall \epsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N}^* : a_n \notin]l - \epsilon, l + \epsilon[\}$ endlich ist. Man bezeichnet $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, wobei a der Grenzwert von (a_n) ist.
>
> Falls die Reihe $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $S \in \mathbb{C}$ konvergiert, bezeichnet man $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Falls eine Folge oder Reihe nicht konvergiert, so divergiert sie. Schreiben wir $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, so meinen wir, dass der Grenzwert der Folge (a_n) existiert und gleich a ist.
Bsp. (1) Sei $k \in \mathbb{N}$, $a_n = n^k q^n$, $0 \leq |q| < 1 \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$
(2) Sei $c \geq 1$, $a_n = \frac{c^n}{n!} \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$
(3) Sei b $\in \mathbb{Z}$, $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^b = 1$

> **Satz.** Eine **konvergente Folge ist immer beschränkt** und hat **genau** einen Grenzwert.

Bem. konvergent $\Rightarrow$ beschränkt, aber nicht umgekehrt!
Bem. a_n *konv.* $\Rightarrow b_n = a_{n+1} - a_n$ *konv*
Um zu zeigen, dass a der Grenzwert der Folge a_n ist, müssen wir zeigen, dass $|a_n - a| < \epsilon$ ab einem gewissen n für alle ϵ gilt. D.h. wir formen nach n um, dabei müssen wir auf das Ungleichzeichen und mögliche Wurzeln aufpassen.

> **Satz.** (Sandwich-Theorem) Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ und $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ und $a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n \geq k$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$

Satz. Falls $(b_n)_{n\geq 1}$ gegen 0 konvergiert und $|a_n - a| \leq b_n$, dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ gegen a.
Satz. Seien $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}$ mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim_{n\to\infty} b_n$, so gilt:

1. Die Folge $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen $a + b$
2. Die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen $a \cdot b$
3. Falls $b \neq 0$ ist $b_n \neq 0$ für n gross genug und $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$.
4. Falls $\exists K \geq 1$ sodass $a_n \leq b_n$, $\forall n \geq K$, ist $a \leq b$

Der Satz von Weierstrass

Def. $(a_n)_{n\geq 1}$ ist monoton wachsend [fallend] falls:
$a_n \leq a_{n+1}[a_n \geq a_{n+1}], \forall n \geq 1$.

> **Satz.** Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$
>
> Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq 1\}$

Bolzano Weierstrass

Def. Eine **Teilfolge** einer Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist eine Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ mit $b_n = a_{l(n)}$, wobei $l : N^* \to N^*$ eine Abbildung bezeichnet mit der Eigenschaft $l(n) < l(n+1)\ \forall n \geq 1$ (das jeweils nächste Element der Teilfolge kommt auch später in der eigentlichen Folge)

Satz. Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Limes Superior und Limes Inferior

Mit jeder beschränkten Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ lassen sich zwei monotone Folgen $(b_n)_{n\geq 1}$ und $(c_n)_{n\geq 1}$ definieren, welche dann einen Grenzwert besitzen.
Sei für jedes n ≥ 1:

$$b_n = \inf\{a_k : k \geq n\} \quad \text{und} \quad c_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$$

Dann ist $b_n \leq b_{n+1}$ und $c_{n+1} \leq c_n$ $\forall n \geq 1$. Nach Weierstrass sind beide folgen Konvergent, und wir definieren:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} b_n \quad \text{und} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} c_n$$

Ist $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$
Def. Ein **abgeschlossenes Intervall** ist von der Form $[a, b],]-\infty, b]$, $[a, \infty[$ oder $]-\infty, \infty[$. Sei $I = [a, b]$, so ist die **Länge** des Intervalls L(I) $= b - a$.
Satz. (Cauchy-Cantor)
Sei $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ...I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq ...$ eine Folge abgeschlossener Intervalle mit $L(I_1) < +\infty$, dann gilt $\cap_{n\geq 1} I_n \neq \emptyset$. Ist $\lim_{n\to\infty} L_{I_n} = 0$, so enthält die Schnittmenge genau einen Punkt.

Konvergenzkriterien

Bem. Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent $\Leftrightarrow$ $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt und $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.
Satz. Falls $(a_n)_{n\geq 1}$ eine monoton wachsende [fallende] Folge ist, dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = \text{Sup}_{n\geq 1}(a_n)$ $[\text{Inf}_{n\geq 1}(a_n)]$ genau dann, wenn $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt ist.
Eine Folge in $\mathbb{R}^d$ verhält sich eigentlich gleich wie Folgen in $\mathbb{R}$. Sei $a(_n)_{n\geq 1}$(gleiche Schreibweise) eine Folge in R^d. Sie konvergiert falls:
$\exists a \in \mathbb{R}^d$ mit $\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 1$ mit $||a_n - a|| < \epsilon\ \forall n \geq N$

Das Cauchy-Kriterium

Satz. Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist genau dann konvergent, falls

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 1 \quad \text{so dass} \quad |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

Solch eine Folge nennt man auch **Cauchy-Folge**.

Bem. Für eine Cauchy-Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ gilt:

(1) $\Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ ist beschränkt

(2) $\Leftrightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ ist konvergent

Bem. $a_n = \sum_{i=1} \frac{1}{i}$ konvergiert nicht, aber $|a_{n+1} - a_n|$ konvergiert.

Strategie - Konvergenz von Folgen

(1) Für **Brüche**, grösste Potenz von n ausklammern und kürzen. Alle übrigen Brüche der Form $\frac{a}{n^s}$ streichen, da diese zu 0 konvergieren.

(2) Für **Wurzeln in einer Summe**, multipliziere mit der Differenz der Summe (bei $a + b$ multipliziere mit $a - b$).

(3) Anwendung **Sandwich-Theorem**.

(4) Vergleich mit Referenz-Folgen.

(5) Grenzwert durch simple Operationen und Umformen ermitteln.

(6) Definition der Konvergenz / Limes anwenden.

(7) Für **rekursive Folgen**, Satz von Weierstrass anwenden, obere / untere Schranke abschätzen und per Induktion beweisen.

(8) Anwendung des Cauchy-Kriteriums

(9) Suchen eines konvergenten Majoranten.

Bsp. $d_1 = 3,\ d_{n+1} = \sqrt{3d_n - 2},\ \forall n > 1$
Beweise per Induktion, dass die Folge monoton fallend ist. Nun brauchen wir eine untere Schranke. Induktionstrick für mögliche Kandidaten vom Limes. Angenommen die Folge konvergiert, so hat jede Teilfolge den gleichen Grenzwert. Betrachten wir die Teilfolge $l(n) = n + 1$:

$$d = \lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} d_{n+1} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} 3d_n - 2} = \sqrt{3d - 2}$$

$d^2 = 3d - 2$, nehmen wir $d = 2$. Zeige nun dass die Folge nach unten beschränkt ist, mit d $= 2$. Dies erfolgt wieder per Induktion.

Strategie - Divergenz von Folgen

(1) Suche einen divergenten Minoranten

(2) Für alternierende Folgen zeige, dass $\lim_{n\to\infty} a_{p_1(n)} \neq \lim_{n\to\infty} a_{p_2(n)}$.

Limes Binom Trick

Gegeben die Summe von zweier (oder einer) Wurzel, kann man wie folgt vorgehen:

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{(x+5) - (x-3)}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}}\right)$$

Limes Substitution Trick

Hier ein Beispiel:

$$\lim_{x\to\infty} x^2 (1 - \cos(\frac{1}{x}))$$

Substituiere nun $u = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{u\to 0} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{2u} = \lim_{u\to 0} \frac{\cos(u)}{2} = \frac{1}{2}$$

Limes Log Trick

Limes der Form ∞^0 und 1^∞ können meist mit dem Log-Trick berechnet werden: $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot \ln(f(x))}$, dann Bernoulli ($e$ ist stetig, daher betrachten wir nur den Exponenten) anwenden oder vereinfachen.

$$\lim u(x)^{v(x)} = \lim e^{v(x)\cdot ln(u(x))} = e^{\lim[v(x)\cdot ln(u(x))]} = \begin{cases} u^v \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

Rechnen mit Reihen

Satz. Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ konvergent, sowie $\alpha \in C$

(1) Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = (\sum_{k=1}^{\infty} a_k) + (\sum_{j=1}^{\infty} b_j)$ und konvergiert.

(2) Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha \cdot a_k) = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und konvergiert.

Cauchy-Kriterium für Reihen

Satz. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, falls

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 1 \quad \text{mit} \quad |\sum_{k=n}^{m} a_k| < \epsilon \quad \forall m \geq n \geq N$$

(Nullfolgenkriterium) Aus dem Cauchy-Kriterium folgt, dass eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ divergiert, falls $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Kor. Sei $a_n \geq 0,\ s_n = a_1 + \cdots + a_n$. So gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \iff (s_n) \text{ ist v.o.b.}$$

Insbesondere: Falls $0 \leq b_n \leq a_n$, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Falls $a_n \geq 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent ist, sagen wir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.
Satz. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \geq 0,\ \forall k \in \mathbb{N}^*$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, falls die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ der Partialsummen nach oben beschränkt ist.

Absolute Konvergenz

Def. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k,\ a_n \in \mathbb{C}$ heisst **absolut konvergent**, falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.
Satz. Eine absolut konvergente Reihe ist auch konvergent und es gilt:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

Konvergenzkriterien

Kor. (Vergleichssatz)
Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen mit $0 \leq a_k \leq b_k\ \forall k \geq K \geq 1$ Dann gilt:

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent

Dies wird auch **Majoranten- / Minorantenkriterium** genannt.

Satz. (Leibniz)
Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend mit $a_n \geq 0,\ \forall n \geq 1$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \text{ und es gilt: } a_1 - a_2 \leq S \leq a_1.$$

Restgliedabschätzung: $|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k| \leq a_{n+1}$

Satz. (Dirichlet) Falls eine Reihe absolut konvergiert, dann konvergiert auch jede Umordnung der Reihe mit dem selben Grenzwert. Eine Umordnung ist eine bijektive Abbildung $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$.

Satz. (Riemann) Fall die Reihe nur konvergiert, so gibt es immer eine Annordnung, so dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\phi(k)} = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Quotientenkriterium: Falls $(a_n)_{n\geq 1}, a_n \neq 0$ und $\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| < 1$, dann konvergiert die Reihe abs. falls $\liminf_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| > 1$ so divergiert sie. Äquivalent: Falls $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| < 1$, so ist die Reihe absolut konvergent (für > 1 divergent).

Wurzelkriterium: Falls $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ konvergiert die Reihe absolut, falls > 1 (auch lim sup) so divergiert sie. Äquivalent: Falls $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, so ist die Reihe absolut konvergent (und für > 1 divergent).

Bsp. Sei $0 \neq z \in \mathbb{C}$ und $a_n = \frac{z^n}{(n)!},\ n \in \mathbb{N}$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|z|^{(n+1)}}{(n+1)!} \Big/ \frac{|z|^n}{(n)!} = \frac{|z|}{n} \leq \frac{1}{2} < 1 \text{ für } n > 2|z|.$$

$$\implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n)!} \text{ ist konvergent.}$$

Potenzreihen

Eine Potenzreihe ist eine Reihe von der Form $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot z^k$, wobei $(c_k)_{k\geq 0}$ eine Folge ist.

Def. Der Konvergenzradius ρ einer Potenzreihe entspricht:

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \text{falls } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{falls } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$$

(Äquivalent mit dem Quotientenkriterium)

Kor. Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ konvergiert absolut für alle $|z| < \rho$ und divergiert für alle $|z| > \rho$. Der Fall $|z| = \rho$ muss jeweils noch separat geprüft werden.

Satz. Ein Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$ mit positivem Konvergenzradius ρ, konvergiert gleichmässig auf $[-\rho, \rho]$, insbesondere ist $f :] - \rho, \rho[\to \mathbb{R}$ stetig.

Bem. Absolut konvergente Potenzreihen sind stetig.

Doppelreihen

Gegeben eine Doppelfolge $(a_{ij})_{i,j\geq 0}$, so können $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = S_0 + S_1 + \ldots$ und $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} = b_0 + b_1 + \ldots$ beide konvergent sein mit verschiedenen Grenzwerten. Wir nennen $\sum_{i,j\geq 0} a_{ij}$ eine Doppelreihe. Wenn die Reihe absolut konvergiert, so sind beide Grenzwerte gleich und jede Anordnung konvergiert zum selben Grenzwert.

Das Cauchy Produkt

Def. Das Cauchy Produkt zweier Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ ist die Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}(a_{n-j}\cdot b_j) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \dots$$

Falls beide Reihen konvergieren, so konvergiert auch das Cauchy Produkt.

Nun wollen wir noch betrachten ob man Summation und Limes vertauschen kann.
Satz. Sei $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge mit:

1. $f(j) := \lim_{n\to\infty} f_n(j)$ existiert $\forall j \in \mathbb{N}$
2. Es gibt eine Funktion g: $\mathbb{N} \to [0, \infty[$, mit $|f_n(j)| \leq g(j),\ \forall j \geq 0, \forall n \geq 0$ und $\sum_{j=0}^{\infty} g(j)$ konvergiert.

Dann gilt $\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty} f_n(j)$.

Integral Test

Sei $f(x)$ eine stetige, positive und monoton fallende Funktion auf $[k, \infty[$ und $f(n) = a_n$:

$$\int_k^{\infty} f(x)dx \text{ konvergiert } \Leftrightarrow \sum_{n=k}^{\infty} a_n \text{ konvergiert}$$

$$\int_k^{\infty} f(x)dx \text{ divergiert } \Leftrightarrow \sum_{n=k}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

Strategie - Konvergenz von Reihen

(1) Handelt es sich um eine spezielle Reihe? (Geometrisch, Teleskopiert, Harmonisch, Zetafunktion)

(2) Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$? (Nullfolgenkriterium)

(3) Ist das Quotientenkriterium oder Wurzelkriterium anwendbar?

(4) Existiert ein konvergierender Majorant / divergirender Minorant?

(5) Kann man das Leibnitzkriterium anwenden?

(6) Integral Test?

Stetigkeit und Funktionen

Definitionen

Def. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist **stetig in einem Punkt** x_0, falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ gilt:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Alternativ: Falls für jede Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ folgendes gilt:

$$f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

ist die Funktion f in x_0 stetig.

Def. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig, falls sie in jedem Punkt von D stetig ist.

Bsp. Abrundungsfunktion $\lceil\cdot\rceil$ ist in jedem Punkt $x_0 \notin \mathbb{Z}$ stetig, aber in keinem Punkt $x \in \mathbb{Z}$.

Gleichmässige Stetigkeit: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist gleichmässig stetig falls:

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, y \in D\text{: } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Wobei Funktionen welche in einem kompakten Intervall stetig sind, im selben Intervall auch gleichmässig stetig sind.

Rechnen mit Stetigkeit

Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ beide in x_0 stetig. So gilt:

(1) $f + g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$ sind stetig in x_0 (auch $g \circ f$ bei anderen Def. Bereichen)

(2) falls $g(x_0) \neq 0$, dann ist $\frac{f}{g}$ stetig in x_0 für $D \cap \{x \in D : g(x) \neq 0\}$

(3) $|f|$, $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ sind stetig in x_0

(4) Polynomiale Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig

(5) die Trigonometrischen Funktionen $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig

(6) die Exponentialfunktion e^x ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig

(7) seien P, Q polynomiale Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit $Q \neq 0$. Seien $x_1, \dots, x_m$ die Nullstellen von Q. Dann ist $\frac{P}{Q}$ stetig für $\mathbb{R}\backslash\{x_1, \dots, x_m\}$ (komplexe Nullstellen sind immer komplementär)

(8) sei $f : D_1 \to D_2$ und $g : D_2 \to \mathbb{R}$ Funktionen, sowie $x_0 \in D_1$. Falls f in x_0 und g in $f(x_0)$ stetig sind, so ist $g(f(x_0)) : D_1 \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig

Zwischenwertsatz

Satz. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in I$. Für jedes c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein z zwischen a und b mit $f(z) = c$.

Der Zwischenwertsatz wird oftmals verwendet um zu zeigen, dass eine Funktion einen gewissen Wert annimmt. Typische Anwendungsbeispiele sind:

(1) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Falls $f(a) \cdot f(b) < 0$, dann $\exists c \in]a, b[$ mit $f(c) = 0$ (also eine Nullstelle).

(2) Sei $P(x) = a_nx^n + \dots + a_0$ ein Polynom mit $a_n \neq 0$ und n ungerade. Dann besitzt P mindestens eine Nullstelle in R.

Min-Max Satz

Def. Ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist **kompakt**, falls es von der Form [a,b] ist mit $a \leq b$.
Bem. Für x_0 in einem kompakten Intervall gibt es immer min. eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n \in I$, so dass $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$.

Satz. Sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf einem kompakten Intervall I. Dann gibt es $u, v \in I$ mit

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \qquad \forall x \in I.$$

Insbesondere ist f beschränkt.

Satz der Umkehrabbildung

Satz. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion. Dann ist das Bild $f(I) := J$ ein Intervall und die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to I$ ist stetig, streng monoton.
Bsp. Sei $n \geq 1$. Dann ist $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$ als $x \to x^n$ streng monoton wachsend, stetig und surjektiv. Nach dem Umkehrsatz existiert nun eine streng monoton wachsende, stetige Umkehrabbildung
$f^{-1} : [0, \infty[\to [0, \infty[$ als $x \to \sqrt[n]{x}$.

Konvergenz von Funktionenfolgen

Def. Eine **Funktionenfolge** ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^D : n \to f_n$, wobei f_n die n-te Funktion ist. Für jedes $x \in D$ erhält man eine Folge $(f_n(x))_{n\geq 0}$ in $\mathbb{R}$.

Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 0}$ **konvergiert punktweise** gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls für alle $x \in D$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Alternativ:

$$\forall\epsilon > 0,\ \forall x \in D,\ \exists N \geq 1,\ \forall n \geq N, : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Die Funktionenfolge **konvergiert gleichmässig** gegen f falls:

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists N \geq 1,\ \forall n \geq N,\ \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Alternativ:

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists N \geq 1,\ \forall n, m \geq N,\ \forall x \in D : |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

Bem. Jede gleichmässig konvergente Funktionenfolge ist auch punktweise konvergent, jedoch nicht umgekehrt!
Satz. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge aus stetigen Funktionen. Wenn f_n gleichmässig gegen f konvergiert, dann ist auch f stetig. (Für punktweise konvergenz muss dies nicht der Fall sein.)

Strategie - Konvergenz von Funktionenfolgen

(1) Punktweiser Limes von f_n auf D finden.

(2) Prüfe auf gleichmässige Konvergenz:

  (i) Indirekte Methode: f unstetig bedeuted keine gleichmässige Konvergenz, f stetig, monoton wachsend und D kompakt bedeuted gleichmässige Konvergenz.

  (ii) Direkte Methode: Berechne $\sup_{x\in D}|f_n(x) - f(x)|$ (evtl. Ableitung von $|f_n(x) - f(x)|$ gleich Null setzen). Danach Limes für $n \to \infty$ von $\sup_{x\in D}|f_n(x) - f(x)|$ berechnen, falls dieser Null ist, so konvergiert f_n gleichmässig.

Konvergenz von Funktionenreihen

Def. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ **konvergiert gleichmässig**, falls die durch $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ definierte Funktionenfolge gleichmässig konvergiert.

Satz. Sei f_n eine Folge stetiger Funktionen und es gilt $|f_n(x)| \leq c_k, \forall x \in D$. Wenn nun $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergiert, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ gleichmässig, wobei der Grenzwert $f(x)$ eine stetige Funktion ist.

Grenzwerte von Funktionen

Wir betrachten Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ und wollen den Grenzwert für den Fall $x \in D$ strebt gegen x_0 finden. Dabei kann es sein, dass $x_0 \notin D$. Wir nehmen an, dass x_0 ein Häufungspunkt von D ist.

> $x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein **Häufungspunkt** der Menge D falls:
> $$\forall \delta > 0 : \quad (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}) \cap D \neq \emptyset$$

Nun können wir den Grenzwert von Funktionen betrachten.

> Sei f eine Funktion und x_0 ein Häufungspunkt von D. Dann ist $A \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $f(x)$ gegen x_0, falls $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ so dass
> $$\forall x \in D \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}) : |f(x) - A| < \epsilon$$

Satz. Sei $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n \in \mathbb{C}$ beschränkt:

(1) Es gibt mindestens einen Häufungspunkt der Folge

(2) Falls es nur einen Häufungspunkt $a \in \mathbb{C}$ gibt, konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ gegen a.

Bem. Seien f, g Funktionen und x_0 ein Häufungspunkt von D so gilt:

(1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, wenn für jede Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ folgt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = A$

(2) Wenn $x_0 \in D$, dann ist f stetig in x_0 falls $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

(3) $\lim_{x\to x_0} (f + g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$

(4) $\lim_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$

(5) Sei $f \leq g$, so ist $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$

(6) Falls $g_1 \leq f \leq g_2$ und $\lim_{x\to x_0} g_1(x) = \lim_{x\to x_0} g_2(x)$, so existiert $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g_1(x)$

Satz. Sei x_0 ein Häufungspunkt von D, $f : D \to E$ eine Funktion mit $y_0 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ mit y_0. Fall $g : E \to \mathbb{R}$ stetig ist in y_0 folgt:

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$$

Linksseitiger und Rechtsseitiger Grenzwert

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ ist ein Häufungspunkt von $D \cap]x_0, +\infty[$. Falls der Grenzwert der eingeschränkten Funktion f im Bereich $D \cap]x_0, +\infty[$ für $x \to x_0$ existiert, wird er mit $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ bezeichnet und nennt sich **rechtsseitiger Grenzwert** von f bei x_0. Das Analoge gilt für den **linksseitigen Grenzwert**.
Wir erweitern diese Definition auf $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D \cap]x_0, x_0 + \delta[: \ f(x) > \frac{1}{\epsilon}$$

und analog für $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D \cap]x_0, x_0 + \delta[: \ f(x) < -\frac{1}{\epsilon}$$

Für den linksseitigen Grenzwert gilt das Analoge.

Differentialrechnung

Differenzierbarkeit

> Sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt, so f ist in x_0 **differenzierbar**, falls der Grenzwert
> $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
> existiert. Der Grenzwert wird dann mit $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet.

> **Satz.** (Weierstrass) Sei $f : D \to R$, $x_0 \in D$ Häufungspunkt von D. Dann ist folgende Aussage äquivalent zur differenzierbarkeit: $\exists c \in \mathbb{R}$ und $r : D \to \mathbb{R}$ mit
> - $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$
> - $r(x_0) = 0$ und r ist stetig in x_0
>
> Falls dies zutrifft ist $c = f'(x_0)$ eindeutig bestimmt.
>
> **Satz.** Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in x_0 differenzierbar falls $\exists$ Funktion $\phi(x) := f'(x_0) + r(x)$, so dass $f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0)$, $\forall x \in D$. In diesem Fall gilt $\phi(x_0) = f'(x_0)$. Wenn man die Gleichung umformt erhält man $\phi(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Kor. f differenzierbar in $x_0 \implies f$ stetig in x_0
Bem. Die Tangentengleichung von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

> $f : D \to R$ ist in **D differenzierbar**, falls für jeden Häufungspunkt $x_0 \in D$, f in x_0 differenzierbar ist.

Kor. Sei $f : D \to E$ eine bijektive Funktion und $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt. Wir nehmen an f ist in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$, zudem nehmen wir an f^{-1} ist in $y_0 = f(x_0)$ stetig. Dann ist y_0 ein Häufungspunkt von E und f^{-1} ist in y_0 differenzierbar.

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Rechnen mit Ableitungen

(1) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(2) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + g'(x_0) \cdot f(x_0)$

(3) $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ für $g(x_0) \neq 0$

(4) $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

(5) $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, wobei $y_0 = f(x_0)$ und $f'(x_0) \neq 0$

(6) $(a^{f(x)})' = ln(a) \cdot a^{f(x)} \cdot f`(x)$

(7) $(f(x)^{g(x)})' = f(x)^{g(x)} \cdot [ln(f(x)) \cdot g(x)]'$

Bem. Für gerade k gilt $\cosh(x)^{(k)} = \cosh(x)$ und für ungerade k gilt $\cosh(x)^{(k)} = \sinh(x)$, analoges gilt für sinh.

Aussagen der Ableitung

Wir nehmen an f ist in D differenzierbar, so können wir folgende Aussagen machen:

(1) f besitzt ein lokales Maximum in x_0, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ oder falls es $\delta > 0$ gibt mit:

$$f(x) \leq f(x_0) \ \ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D$$

(2) f besitzt ein lokales Minimum in x_0, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ oder falls es $\delta > 0$ gibt mit:

$$f(x) \geq f(x_0) \ \ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D$$

(3) f besitzt ein lokales Extremum in x_0 falls es entweder ein lokales Maximum oder Minimum von f ist. Dies ist der Fall wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$.

(4) f besitzt einen Wendepunkt wenn $f''(x_0) = 0$.

(5) f besitzt einen Sattelpunkt wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$.

Weiter gelten auch folgende Aussagen für $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, wobei f, g stetig und in $]a, b[$ differenzierbar sind.

(1) Falls $f'(\epsilon) = 0 \ \ \forall \epsilon \in]a, b[$ ist f konstant

(2) Falls $f'(\epsilon) = g'(\epsilon) \ \ \forall \epsilon \in]a, b[$ ist $f = g + c$

(3) Falls $f'(\epsilon) \leq [<] 0 \ \ \forall \epsilon \in]a, b[$ ist f [streng] monoton fallend

(4) Falls $f'(\epsilon) \geq [>] 0 \ \ \forall \epsilon \in]a, b[$ ist f [streng] monoton wachsend

Satz von Rolle

Satz. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Wenn nun $f(a) = f(b)$ gilt, so gibt es ein $\epsilon \in]a, b[$ mit $f'(\epsilon) = 0$.

Mittelwertsatz

Satz. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es $\epsilon \in]a, b[$ mit $f(b) - f(a) = f'(\epsilon)(b - a)$.

Satz von L'Hospital

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es $\epsilon \in]a, b[$ mit $g'(\epsilon)(f(b) - f(a)) = f'(\epsilon)(g(b) - g(a))$. Falls nun $g'(x) \neq 0$ für alle x ist, dann folgt $g(a) \neq g(b)$ und

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\epsilon)}{g'(\epsilon)}.$$

Satz. Falls nun

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = 0, \ \lim_{x\to b^-} g(x) = 0 \ \text{ und } \ \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$$

existiert, folgt

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$$

L'Hospital gilt auch wenn: $b = +\infty$, $x \to a^+$, $\lambda = +\infty$ oder $\lim f = \lim g = \infty$.
Weiter gilt die Regel von L'Hospital auch für Fälle der Form "$\frac{\infty}{\infty}$", indem man sie wiefolgt umschreibt: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g(x)} / \frac{1}{f(x)}$. Für Fälle der Form "$\infty - \infty$" kann man die Funktionen auf den gleichen Nenner bringen.
Bsp. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x}$

Konvexität

f ist [streng] **konvex** (auf I) falls für alle $x \leq [<] y$, $x, y \in I$ und $\lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \quad \leq [<] \quad \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

gilt.
Wobei wir folgende Bemerkungen machen können:

(1) Die Summe zweier konvexer Funktionen ist konvex

(2) f ist genau dann konvex, falls für $x_0 \leq x \leq x_1$ in I gilt:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1 - x}$$

(3) Die Funktion f ist genau dann [streng] konvex, falls f' [streng] monoton wachsend ist.

Bem. Alle Aussagen gelten auch für **Konkavität**, wir müssen nur das Ungleichzeichen umkehren.

Höhere Ableitungen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

(1) Für $n \geq 2$ ist f ***n*-mal differenzierbar** in D, falls $f^{(n-1)}$ in D differenzierbar ist. Wobei n-mal differenzierbar $\implies$ $(n-1)$-mal stetig differenzierbar.

(2) Die Funktion f ist in D **glatt**, falls sie $\forall n \geq 1$, n-mal differenzierbar ist.

Bem. Alle Polynome, sowie e^x, sin und cos sind glatte Funktionen.

Rechnen mit Höhere Ableitungen

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar:

(1) $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

(2) $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$

(3) $\frac{f}{g}$ ist n-mal differenzierbar falls $g(x) \neq 0, \forall x \in D$

(4) $(g \circ f)$ ist n-mal differenzierbar

Potenzreihe

Satz. Sei f_n eine Funktionenfolge, wobei f_n einmal stetig differenzierbar ist für alle $n \geq 1$. Wir nehmen an, dass sowohl die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ wie $(f_n')_{n \geq 1}$ gleichmässig konvergieren mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ und $\lim_{n\to\infty} f_n' = p$. Dann ist f stetig differenzierbar und $f' = p$.

Satz. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $p > 0$. Dann ist

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x-x_0)^k$$

auf $]x_0 - p, x_0 + p[$ differenzierbar und

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot c_k (x-x_0)^{k-1}$$

für alle $x \in]x_0 - p, x_0 + p[$.

Taylox Approximation

Jede glatte Funktione kann als Potenzreihe angenähert werden, dafür brauchen wir ein sogenanntes **Taylor-Polynom** (oder Taylorreihen). Die trigonometrischen Funktionen sind genau solche Taylorreihen.

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ $(n+1)$-mal differenzierbar. Für jedes $a < x \leq b$ gibt es $\epsilon \in]a,x[$ mit:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\epsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Wobei wir hierbei das n-te Taylor-Polynom T_n und eine Fehlerabschätzung R_n erhalten.

Bem. Der letzte Term $\frac{f^{(n+1)}(\epsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ wird meist zur Fehlerabschätzung innerhalb eines Bereiches von a verwendet. Man nimmt daher den Wert von $\epsilon \in]a,x[$, so dass der Fehlerterm am grössten ist.

Spezielle Punkte

Sei $n \geq 0, a < x_0 < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in $]a,b[$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar. Annahme: $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n)}(x_0) = 0$

(1) Falls n gerade ist und x_0 eine lokale Extremalstelle, folgt $f^{(n+1)}(x_0) = 0$

(2) Falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, so ist x_0 eine strikte lokale Minimalstelle

(3) Falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, so ist x_0 eine strikte lokale Maximalstelle

Ist x_0 jedoch keine Extremalstelle bleiben zwei Optionen:

(1) $f'(x_0) = 0 \land x_0$ keine Extremalstelle $\implies$ ist ein Sattelpunkt

(2) $f''(x_0) = 0 \land x_0$ keine Extremalstelle $\implies$ ist ein Wendepunkt

Integralrechnung

Das Riemann Integral

Eine **Partition** P von I ist eine **endliche Teilmenge** $P \subsetneq [a,b]$ wobei $\{a,b\} \subseteq P$.

Mit δ_i bezeichnen wir die Länge des Teilintervalls $[x_{i-1}, x_i]$.

Mithilfe der Partition können wir nun die Untersumme / Obersumme einer Funktion definieren:

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f_i \delta_i, \quad f_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} F_i \delta_i, \quad F_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

Für Verfeinerungen P' gilt: $s(f,P) \leq s(f,P') \leq S(f,P') \leq S(f,P)$.

Sei nun $\mathcal{P}(I)$ die Menge der Partitionen von I, so definieren wir:

$$s(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f,P) \quad \text{und} \quad S(f) = \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f,P)$$

Satz. Eine beschränkte Funktion ist **Riemann integrierbar**, falls $s(f) = S(f)$. In diesem Fall bezeichnen wir den gemeinsamen Wert als:

$$s(f) = \int_a^b f(x)dx = S(f)$$

Alternativ: eine beschränkte Funktion ist genau dann integrierbar, falls

$$\forall \epsilon > 0, \exists P \in \mathcal{P}(I) : S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$$

Integrierbarkeit schnell zeigen

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkte, integrierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$:

(1) f ist stetig $\implies$ f ist integrierbar

(2) f ist monoton $\implies$ f ist integrierbar

(3) Seien f, g beschränkte, integrierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $f+g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$, $|f|$, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ und $\frac{f}{g}$ (falls $|g(x)| \geq \beta > 0$) integrierbar

(4) Jedes Polynom auf $[a,b]$ ist integrierbar, auch $\frac{P(x)}{Q(x)}$ falls $Q(x)$ keine Nullstellen besitzt

(5) Sind f, g in einer endlichen Menge an Punkten verschieden, sind entweder beide oder keine der Beiden integrierbar

Eine stetige Funktion ist auf einem kompakten Intervall immer integrierbar. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f integrierbar.

Rechnen mit Integralen

Sei $I \subsetneq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten a, b sowie $f, g : I \to \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\int_a^b (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x))dx = \lambda_1 \int_a^b f(x)dx + \lambda_2 \int_a^b g(x)dx$$

Sei $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a+b, b+c, ac, bc \in I$, so gilt:

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x)dx = \int_a^b f(t+c)dt \quad \text{und} \quad \int_a^b f(ct)dt = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)dx$$

Ungleichungen und Mittelwertsatz

Es gibt einige Ungleichungen, welche wir zum **Abschätzen** von Integralen brauchen können:

(1) Sei $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b]$ $\implies$ $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

(2) $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

(3) $|\int_a^b (f(x)g(x))dx| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)}$

Diese Ungleichungen führen dann zum **Mittelwertsatz**:

Satz. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $\xi \in [a,b]$ mit:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

Daraus folgt unteranderem: Für $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, wobei f stetig und g beschränkt integrierbar mit $g(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$ gilt:

$$\exists \xi \in [a,b] \qquad \int_a^b (f(x)g(x))dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

Fundamentalsatz der Analysis

Der Fundamentalsatz der Analysis (oder Differentialrechnung) besagt, dass die Ableitung die Umkehrung des Integrals ist.

Seien $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad \forall a \leq x \leq b$$

in $[a,b]$ stetig differenzierbar und

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a,b]$$

Wir nenne F die **Stammfunktion** von f. Es gibt eine Stammfunktion F von f, die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist und es gilt $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Partielle Integration

Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b (f(x) \cdot g'(x))dx = f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b (f'(x) \cdot g(x))dx$$

bzw. für unbestimmte Integrale:

$$\int (f(x) \cdot g'(x))dx = f(x) \cdot g(x) - \int (f'(x) \cdot g(x))dx$$

$\uparrow$ 1falls arc- oder log-Funktion vorkommt, $x^n, \frac{1}{1-x^2}, \frac{1}{1+x^2}, \ldots$

$\downarrow$ $x^n, \arcsin(x), \arccos(x), \arctan(x), \ldots$

"egal" $e^x, \sin(x), \cos(x), \sinh(x), \cosh(x), \ldots$

Substitution

Die Substitution ist die Umkehrung der Kettenregel. D.h. wir wollen Substitution vorallem verwenden, wenn wir innere Funktionen haben.

Sei $a < b$, $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $\phi([a,b]) \subseteq I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

$$\int_a^b f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx$$

bzw. für unbestimmte Integrale:

$$\int f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt = \int f(x)dx\Big|_{x=\phi(t)}$$

Bsp. $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx$ substitution mit $t = \sqrt{9-x^2}$:

$$\Rightarrow x = \sqrt{9-t^2} \Rightarrow x' = \frac{-2t}{2\sqrt{9-t^2}} \Rightarrow dx = \frac{-t \cdot dt}{\sqrt{9-t^2}}$$

$\int -dt = -t$ rücksubstitution $\Rightarrow -\sqrt{9-x^2}$

Nützliche Substitutionen

(1) e^x, $\sinh(x)$, $\cosh(x)$, subst: $t = e^{ax}, dx = \frac{dt}{at}$ Dann $\sinh = \cosh = \frac{t^2-1}{2t}$

(2) $\log(x)$ subst: $t = \log(x)$, $x = e^t$, $dx = e^t dt$

(3) für gerade n : $\cos^n(x)$, $\sin^n(x)$, $\tan(x)$ Sub: $t = \tan(x)$, $dy = \frac{1}{1+t^2}dt$, $\sin^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2}$

(4) für ungerade n : $\cos^n(x)$, $\sin^n(x)$, Sub: $t = \tan(x/2)$, $dy = \frac{2}{1+t^2}dt$, $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

(5) $\int \sqrt{1-x^2}dx$ sub: $x = \sin(x)$ oder $\cos(x)$

(6) $\int \sqrt{1+x^2}dx$ sub: $x = \sinh(x)$

Strategie - Berechnung von Integralen

Bruchform:

(1) Vereinfache, so dass ein einfacher Nenner entsteht

(2) Partialbruchzerlegung

(3) $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ oder $\frac{u'}{u}$ erkennen $\Rightarrow \sqrt{u}$ oder $\log|u|$

Produktform:

(1) Partielle Integration anwenden (evtl. mehrmals)

(2) Kettenregel verwenden

Potenzen:

$\int_a^b f(x)^c dx$ umformen in $\int_a^b (f(x)^c \cdot 1)dx$ oder $\int_a^b (f(x)^{c-1} \cdot f(x))dx$ um dann partielle Integration zu verwenden.

Exponentenform:

$e/\log$ Trick verwenden, wenn Variabel im Exponenten ist.

Produkt mit $e, \sin, \cos$:

Mehrmals partielle Integration anwenden, wobei $\sin, \cos$ immer g' und e immer f ist.

Summe im Integral:

Summe aus dem Integral herausziehen (dafür muss die Reihe gleichmässig konvergieren).

Integration von konvergenten Reihen

Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von beschränkten, integrierbaren Funktionen, die gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f beschränkt, integrierbar und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Weiter gilt, wenn $\sum_{n=0}^\infty f_n$ auf $[a,b]$ gleichmässig konvergiert:

$$\sum_{n=0}^\infty \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^\infty f_n(x)dx$$

Sei nun $f(x) = \sum c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist für jedes $0 \leq r < \rho$, f auf $[-r, r]$ integrierbar und es gilt $\forall x \in [-\rho, \rho]$:

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{c_k}{k+1}x^{k+1}$$

Euler-McLaurin Formel

Die Formel hilft Summen wie $1^l + 2^l + 3^l + \ldots + n^l$ abzuschätzen. Für die Formel brauchen wir die **Bernoulli Polynome** $B_n(x)$, sowie die Bernoulli Zahlen $B_n(0)$.

Wir brauchen dafür Polynome welche durch die folgenden Eigenschaften bestimmt sind:

(1) $P_k' = P_{k-1}$, $k \geq 1$

(2) $\int_0^1 P_k(x)dx = 0$, $\forall k \geq 1$

Für das k-te Bernoulli Polynom gilt: $B_k(x) = k!P_k(x)$. Wir definieren weiter $B_0 = 1$ und alle anderen Bernoulli Zahlen rekursiv: $B_{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} B_i = 0$.

Somit erhalten wir für das Bernoulli Polynom folgenden Definition:

$$B_k(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B_i x^{k-i} \quad \text{wobei} \quad \int_0^1 B_k(x)dx = 0$$

Hier ein paar Bernoulli Polynome: $B_0(x) = 1$, $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$, $B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$, $B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$, $B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$. Die Bernoulli Zahl B_i entspricht $B_i(0)$. Nun definieren wir noch:

$$\tilde{B}_k(x) = \begin{cases} B_k(x) & \forall x : 0 \leq x < 1 \\ B_k(x-n) & \forall x : n \leq x < n+1 \end{cases}$$

Somit kommen wir auf die Euler-McLaurin Summationsformel:

Sei $f : [0,n] \to \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar. Dann gilt:
Für $k = 1$:

$$\sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \int_0^n \tilde{B}_1(x)f'(x)dx$$

Für $k > 1$:

$$\sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \sum_{j=2}^k \frac{(-1)^j B_j}{j!}(f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(0)) + \tilde{R}_k$$

wobei

$$\tilde{R}_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^n \tilde{B}_k(x) f^{(k)}(x)dx.$$

Bei den jeweils letzten Termen handelt es sich um einen Fehlerterm.

$$a_n := \int_0^n \frac{\tilde{B}_1(x)}{(x+1)^2}dx \text{ ist eine Cauchy Folge}$$

Stirling'sche Formel

Die Stirling'sche Formel macht eine Aussage über das Verhalten der Fakultät:

$$n! \approx \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n}{e^n} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n}{e^n}} = 1$$

Dies ist jedoch nicht so nützlich, da wir nicht wissen wie schnell die obige Folge gegen 1 konvergiert. Aber mit der Euler-McLaurin Formel erhalten wir eine präzise Aussage.

$$n! = \frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n}{e^n}\cdot\exp\left(\frac{1}{12n}+R_3(n)\right)$$
wobei
$$|R_3(n)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216}\cdot\frac{1}{n^2} \quad \forall n\geq 1$$

Uneigentliche Integrale

Das Riemann Integral setzt voraus, dass $[a,b]$ ein kompaktes Intervall ist und f beschränkt. Unter gewissen Voraussetzungen ist dies aber nicht nötig.

> Sei $f : [a,\infty[\to\mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a,b]$ für alle $a<b$. Falls:
> $$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$
> existiert, wir bezeichnen den Grenzwert mit
> $$\int_a^\infty f(x)dx$$
> und sagen, dass f auf $[a,\infty[$ integrierbar ist.

Auch hier können wir das Minoranten / Majoranten Kriterium verwenden. Weiter gilt, dass wenn die Funktion $f:[1,\infty[\to[0,\infty[$ monoton fallend ist. Die Reihe genau dann konvergiert, wenn $\int_1^\infty f(x)dx$ konvergiert.

Eine weiter Situation für ein uneigentliches Integral ist, falls $f:]a,b]\to\mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a+\epsilon,b]$, $\epsilon>0$ beschränkt und integrierbar ist.

> $f:]a,b]\to\mathbb{R}$ ist integrierbar, falls
> $$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$
> existiert. In diesem Fall wird der Grenzwert mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet.

Bsp. Sei $x\in\mathbb{R},\ f(t)=t^x$. Dann ist f auf $]0,1[$ ein uneigentliches Integral.
$$\Rightarrow x>-1 \text{ und } \int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1} \text{ für } x>-1$$
Weiter ist f auf $[1,\infty[$, ein uneigentliches Integral.
$$\Rightarrow x<-1 \text{ und } \int_1^\infty t^x\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{1+x} \text{ für } x<-1$$

Gamma Funktion

Die Gamme Funktion wir dafür gebraucht um die Funktion $n\mapsto(n-1)!$ zu interpolieren. Für $s>0$ definieren wir:
$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx = (s-1)!$$
Die Gamme Funktion konvergiert für alle $s>0$ und hat folgende weiter Eigenschaften:

(1) $\Gamma(1)=1$
(2) $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$
(3) Γ ist logarithmisch konvex, d.h.
$$\Gamma(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\Gamma(x)^\lambda\Gamma(y)^{1-\lambda}$$
für alle $x,y>0$ und $0\leq\lambda\leq 1$.

Die Gamme Funktion ist die einzige Funktion $]0,\infty[\to]0,\infty[$ die (1), (2) und (3) erfüllt. Zudem gilt:
$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)...(x+n)} \quad \forall x>0$$

Unbestimmte Integrale

Sei $f:I\to\mathbb{R}$ auf einem Intervall $I\subseteq\mathbb{R}$ definiert. Falls f stetig ist, gibt es eine Stammfunktion F für f. Wir schreiben in diesem Fall:
$$\int f(x)dx = F(x)+C$$
Das unbestimmte Integral ist die Umkehroperation zur Ableitung. Es gelten (fast) alle bereits erwähnten Tricks und Eigenschaften.

Stammfunktionen von rationalen Funktionen

Die Stammfunktion einer Funktion $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ bestehend aus rationalen Funktionen lässt sich als eine Funktion von Polynomen, rationalen, exponentiallen, logarithmischen, trigonometrischen und invers trigonometrischen Funktionen darstellen.

Zuerst wollen wir das $\text{grad}(P)<\text{grad}(Q)$ gilt, falls die nicht der Fall ist führen wir Polynomdivision aus. Danach bestimmen wir alle reellen und komplexen Nullstellen von Q und deren Vielfachheit. **Eine Nullstelle kommt so oft vor wie ihre Vielfachheit, mit allen Potenzen.**

Nun gilt:
$$R(x)=\sum_{k=1}^N R_k(x)+\sum_{k=1}^M Z_k(x)$$
Hier ist N die Anzahl reeller Nullstellen und M die Anzahl der komplexen Nullstellen. Es gilt:
$$R_k(x)=\frac{a_{k_1}}{(x-x_k)}+\frac{a_{k_2}}{(x-x_k)^2}+...+\frac{a_{k_{n_k}}}{(x-x_k)^{n_k}}$$
$$Q_k(x)=\frac{a_{k_1}+b_{k_1}x}{((x-\alpha_k)^2+\beta_k^2)}+...+\frac{a_{k_{m_k}}+b_{k_{m_k}}x}{((x-\alpha_k)^2+\beta_k^2)^{m_k}}$$
Somit können wir die Funktion mit Partialbruchzerlegung in einzelnen Brüchen darstellen, welche dann leichter zu integrieren sind. Wenn wir eine reelle Nullstelle haben so gilt:
$$\int\frac{1}{(x-\gamma_i)^n}=\begin{cases}\ln(x-\gamma_i) & \text{für } n=1\\ \frac{-1}{(n-1)(x\gamma_i)^{n-1}}\end{cases}$$
Für komplexe Nullstellen gilt:
$$\frac{A+Bx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^j}=\frac{B(x-\alpha)}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^j}+\frac{A+B\alpha}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^j}$$
$$\int\frac{B(x-\alpha)}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^j}=\begin{cases}\frac{B}{2}\ln((x-\alpha)^2+\beta^2)^j & \text{für } j=1\\ \frac{B}{(2(1-j))((x-\alpha)^2+\beta^2)^{j-1}}\end{cases}$$
Für den letzen Term brauchen wir die Substitution $(x-\alpha)=\beta t$
$$\int\frac{A+B\alpha}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^j}=\frac{A+B\alpha}{\beta^{2j-1}}\cdot\int\frac{1}{(t^2+1)^j}dt$$

Bsp.
$$\int\frac{x^2-x+2}{x^3-x^2+x-1}$$
Wir finden die erste Nullstelle $(x-1)$ durch ausprobieren. Danach führen wir Polynomdivision (durch $x-1$) aus und erhalten damit die zweite Nullstelle (x^2+1). Da x^2+1 eine komplexe Nullstelle ist, nehme wir dafür $A+Bx$.
$$\frac{A+Bx}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}=\frac{x^2-x+2}{(x^2+1)(x-1)}$$
$$\Longrightarrow x^2-x+2=(A+C)\cdot x^2+(B-A)x+(C-B)\cdot 1$$
$$\Longrightarrow B=0, A=-1, C=1$$
$$\Longrightarrow \int\frac{1}{x-1}+\frac{-1}{x^2+1}=\ln(x-1)-\arctan(x)+C$$

Sonstiges

Injektiv / Surjektiv

Gegeben eine Funktion $f:X\to Y$:

Injektiv: $\forall a,b\in X,\ f(a)=f(b)\Rightarrow a=b$
Surjektiv: $\forall y\in Y,\ \exists x\in X,\ f(x)=y$

Sei $f:D\to E$ eine injektive Funktion und $g:E\to D$ eine surjektive Funktion, so ist die Verknüpfung $g\circ f$ bijektiv.

Injektivität zeigen: f injektive $\Leftrightarrow$ f streng monton $\Leftrightarrow$ $f'>0$ oder $f'<0$.

Surjektivität zeigen: Mit Zwischenwertsatz, sei der Bildbereich $]a,b[$

(1) $\lim_{x\to\infty}f(x)=b$ und $\lim_{x\to-\infty}f(x)=a$ zeigen

(2) Sei nun $y\in]a,b[$ beliebig. Wegen den Grenzwerten von f gilt: $\exists x_1<x_2: f(x_1)<y<f(x_2)$. Mit dem Zwischenwertsatz gilt dann: $\exists c\in[x_1,x_2]: f(c)=y$ und somit ist f surjektiv.

Nützliche Formeln

$$ax^2+bx+c=0\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$b^n-a^n=(b-a)(b^{n-1}+b^{n-2}\cdot a+\cdots+a^{n-2}\cdot b+a^{n-1})$$
$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!};\quad \sqrt{a_k\cdot a_{k+1}}\leq\frac{a_k+a_{k+1}}{2}$$

Bernoulli Ungleichung

$$(1+x)^n\geq 1+n*x \quad \forall n\in\mathbb{N}, x>-1$$

Young'sche Ungleichung

$$\forall\epsilon>0,\forall x,y\in\mathbb{R}: 2|xy|\leq\epsilon x^2+\frac{1}{\epsilon}y^2$$

Binomialsatz

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

Die Exponentialfunktion

Def. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n)!}$ heisst Exponential von z,

$$\exp(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + ... = e^z$$

Es gilt $\exp(z) = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n$. Diese Reihe ist stetig, streng monoton wachsend und surjektiv.

Für die Exponentialfunktion gilt:

(1) $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$
(2) $\exp(x) > 1 \forall x > 0$
(3) $x^a = \exp(a \cdot \ln(x))$ und $x^0 = 1$
(4) $\exp(iz) = \cos(z) + i \cdot \sin(z)$
(5) $\exp(i \cdot \frac{\pi}{2}) = i$, $\exp(i\pi) = -1$ und $\exp(2i\pi) = 1$

Der natürliche Logarithmus

Der natürliche Logarithmus $\ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ bildet die Umkehrfunktion zu exp und ist streng monoton wachsend und stetig. Für den natürliche Logarithmus gilt:

(1) $\ln(1) = 0$
(2) $\ln(e) = 1$
(3) $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$
(4) $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$
(5) $\ln(x^a) = a \cdot \ln(x)$
(6) $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$
(7) $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$
(8) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n \quad (-1 \leq x \leq 1)$

Im Allgemeinen gilt $\log_b(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$.

Trigonometrischen Funktionen

Def. Wir können die folgende trigonometrische Funktionen definieren:

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetige Funktionen und aus dem Quotientenkriterium folg, dass beide **Reihen** absolut konvergieren mit Konvergenzradius $+\infty$.

Folgende weiter Eigenschaften ergeben sich aus dem Zusammenhang mit der Exponentialfunktion:

(1) $\cos(z) = \cos(-z)$ und $\sin(-z) = -\sin(z)$
(2) $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ und $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
(3) $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$
(4) $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$
(5) $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1$
(6) $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$
(7) $\cos(2z) = \cos(z)^2 - \sin(z)^2$

Ein paar Funktionswerte:

α	0	30°	45°	60°	90°	120°	150°	180°	270°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	N/A	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	N/A

	$-\alpha$	$90° - \alpha$	$90° + \alpha$	$180° - \alpha$	$180° + \alpha$	$k*360° - \alpha$	$k*360° + \alpha$
sin	$-\sin\alpha$	cos	cos	sin	− sin	− sin	sin
cos	cos	sin	− sin	− cos	− cos	cos	cos
tan	− tan	cot	− cot	− tan	tan	− tan	tan

Zusätzlich definieren wir noch:

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}, \quad \forall z \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}$$

$$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}, \quad \forall z \notin \pi \cdot \mathbb{Z}$$

Es gilt weiter:

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\sin(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$$
$$\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$$

Nullstellen:
$\cos = [\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in Z]$
$\sin = [k\pi : k \in Z]$

Arc Funktionen:
$\arcsin := [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;
$\arccos := [-1,1] \to [0, \pi]$;
$\arctan := [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;

Hyperbol Funktionen

(1) $\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \to [1, \infty]$
(2) $\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
(3) $\tanh(x) := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

Es gilt $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$

Sinus Abschätzung

Es gilt $|\sin(x)| \leq x$ mit folgendem Beweis:

$$f(x) = x - \sin(x), \quad x \geq 0 \quad \text{und} \quad f'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$$

Weil $f(0) = 0, f(x) \geq 0$ für $x > 0$. Dann ist $|\sin(x)| \leq |x|$ einfach.

Die Kreiszahl π

Satz. Wir definieren π als erste Nullstelle > 0 der Sinusfunktion.

$$\pi := \inf\{t > 0 : \sin t = 0\}$$

Es gilt dann:

(1) $\sin(\pi) = 0$, $\pi \in]2, 4[$
(2) $\forall x \in]0, \pi[: \sin(x) > 0$
(3) $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$

Potenz der Winkelfunktion

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \quad \text{und} \quad \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

Reduktionsformel

$$\int \cos^n(x)dx = \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)dx + \frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n}$$

$$\int \sin^n(x)dx = \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)dx - \frac{\cos(x)\sin^{n-1}(x)}{n}$$

Bogenlänge

Die Bogenlänge L einer Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ entspricht:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

(Un)gerade Funktionen

Eine reele Funktion f ist gerade, wenn $f(-x) = f(x)$ und ungerade wenn $f(-x) = -f(x)$.e

Bekannte Taylorreihen

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \mathcal{O}(x^5)$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7)$$
$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7)$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8)$$
$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8)$$
$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^7)$$
$$\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^7)$$
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^5)$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$$
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \mathcal{O}(x^4)$$

Typische Grenzwerte / Folgen

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x\to\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$
$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$	$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$	$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$
$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty$	$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$
$\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$	$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$
$\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$	$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^b = 1$	$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^b = 1$
$\lim_{x\to\infty} x^a q^x = 0,\ \forall 0 \le q < 1$	$\lim_{x\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$
$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$	$\lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{\mathrm{e}}$
$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx} = e^{km}$	$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{\log 1-x}{x} = -1$	$\lim_{x\to 0} x \log x = 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arctan x} = 1$	$\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$
$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+k}\right)^x = e^{-k}$	$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)\ \forall a > 0$	$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a$
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$	$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$
$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$	$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^a} = 0$
$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$	$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2^x} = 0$
$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$	$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$
$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$	$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$

Typische-Reihen

$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$	$\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
$\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)} = 1$	$\sum_{i=1}^\infty z^i = \frac{1-z^{i+1}}{1-z}$

Die Geometrische Reihe: $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ konvergiert wenn $|q| < 1$. Dies gilt auch bei $n \to \infty$.

Die Harmonische Reihe: Die Harmonische Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ ist divergent. Die alternierende harmonische Reihe ist jedoch konvergent.

Die Zeta Funktion: Die Riemann-Zeta Funktion $\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ konvergiert für $s > 1$.

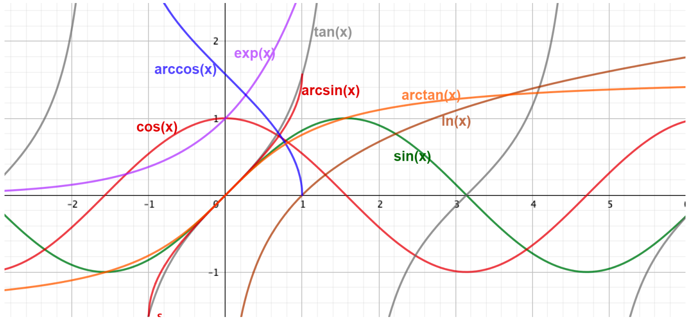
Teleskopsumme:
Bsp. $\sum_{n=1}^\infty \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^\infty \log(n) - \log(n+1) =$
$\log(1) + \log(2) - \log(2) + \cdots = \log(1) - \lim_{n\to\infty} \log(n+1) = -\infty$

Typische Ableitungen und Stammfunktionen

$F(x)$	$F'(x) = f(x)$
c	0
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{a+1} x^{a+1}$	x^a
$\frac{1}{a\cdot(n+1)}(ax+b)^{n+1}$	$(ax+b)^n$
$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$x^\alpha, \alpha \neq -1$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$
$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{x}$
$\frac{n}{n+1} x^{\frac{1}{n}+1}$	$\sqrt[n]{x}$
e^x	e^x
$\ln(\lvert x\rvert)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a \lvert x\rvert$	$\frac{1}{x \ln a} = \log_a(e)\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\cot(x)$	$\frac{1}{-\sin^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$
$\operatorname{arcsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{arccosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{arctanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\frac{1}{f(x)}$	$\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$
a^{cx}	$a^{cx} \cdot c \ln a$
x^x	$x^x \cdot (1 + \ln x) \quad x>0$
$(x^x)^x$	$(x^x)^x(x + 2x\ln(x)) \quad x>0$
$x^{(x^x)}$	$x^{(x^x)}(x^{x-1} + \ln x \cdot x^x(1+\ln x))$

$F(x)$	$F'(x) = f(x)$
$\frac{1}{a}\ln(ax+b)$	$\frac{1}{ax+b}$
$\frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}\ln\lvert cx+d\rvert$	$\frac{ax+b}{cx+d}$
$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$	$\frac{1}{x^2-a^2}$
$\frac{x}{2}f(x) + \frac{a^2}{2}\ln(x+f(x))$	$\sqrt{a^2+x^2}$
$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{\lvert a\rvert}$	$\sqrt{a^2-x^2}$
$\frac{x}{2}f(x) - \frac{a^2}{2}\ln(x+f(x))$	$\sqrt{x^2-a^2}$
$\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})$	$\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$
$\arcsin(\frac{x}{\lvert a\rvert})$	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$
$\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$	$\frac{1}{x^2+a^2}$
$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$
$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\tan(x)$
$\ln\lvert\sin(x)\rvert$	$\cot(x)$
$\ln\left\lvert\tan(\frac{x}{2})\right\rvert$	$\frac{1}{\sin(x)}$
$\ln\left\lvert\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right\rvert$	$\frac{1}{\cos(x)}$
$\frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$	$\sin^2(x)$
$\frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x))$	$\cos^2(x)$
$\tan(x) - x$	$\tan^2(x)$
$-\cot(x) - x$	$\cot^2(x)$
$x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$
$x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$
$x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$	$\arctan(x)$
$\ln(\cosh(x))$	$\tanh(x)$
$\ln\lvert f(x)\rvert$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$x \cdot (\ln\lvert x\rvert - 1)$	$\ln\lvert x\rvert$
$\frac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1} \quad n\neq-1$	$\frac{1}{x}(\ln x)^n$
$\frac{1}{2n}(\ln x^n)^2 \quad n\neq 0$	$\frac{1}{x}\ln x^n$
$\ln\lvert\ln x\rvert \quad x>0, x\neq 1$	$\frac{1}{x\ln x}$
$\frac{1}{b\ln a}a^{bx}$	a^{bx}
$\frac{cx-1}{c^2}\cdot e^{cx}$	$x \cdot e^{cx}$
$\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) \quad n\neq-1$	$x^n \ln x$
$\frac{e^{cx}(c\sin(ax+b) - a\cos(ax+b))}{a^2+c^2}$	$e^{cx}\sin(ax+b)$
$\frac{e^{cx}(c\cos(ax+b) + a\sin(ax+b))}{a^2+c^2}$	$e^{cx}\cos(ax+b)$
$\frac{\sin^2(x)}{2}$	$\sin(x)\cos(x)$

Funktionen



Aufgaben

Multiple Choice

Folgen und Reihen

Sei $(a_n), (b_n)$ zwei Folgen, welche Aussgaen sind korrekt?

- ☐ Wenn $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und (a_n) konvergent ist, so ist auch (b_n) konvergent.
- ☑ Wenn $0 \leq b_n \leq a_n^3$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_n \to 0$ für $n \to \infty$, dann konvergiert auch (b_n).
- ☐ Wenn $|a_n - b_n| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in N$, dann konvergieren beide Folgen.
- ☐ Wenn (b_n^2) konvergiert, dann konvergiert auch (b_n).

Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen. Dann gilt:

- ☑ Falls (a_n) konvergiert und (b_n) nicht, so ist $(a_n + b_n)$ nicht konvergent.
- ☐ Ist (a_n) beschränkt und (b_n) nicht konvergent, so ist $(a_n \cdot b_n)$ nicht konvergent.
- ☑ Falls (a_n) beschränkt und $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, so folgt, dass $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$, so dass $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 0$. Dann gilt:

- ☐ $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, so dass $0 < |x| < \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon$.
- ☑ Es existiert eine Folge (x_n) mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ und ein ϵ, so dass $|f(x_n)| > \epsilon, n \in \mathbb{N}$.
- ☑ Für all $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) > 0$.
- ☐ Für jede Folge (x_n) mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq 0$.

Seie $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe. Dann gilt:

- ☐ Falls $\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 1$, so dass $\sum_{k=n}^{n+100} |a_k| < \epsilon, \forall n \geq N$, dann ist die Reihe konvergent.
- ☑ Falls die Reihe konvergiert, so folgt $\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 1$ gilt $\sum_{k=n}^{n+100} |a_k| < \epsilon, \forall n \geq N$.
- ☐ Falls die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(a_k)$ absolut konvergiert, so konvergiert die ursprüngliche Reihe.

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ und $\alpha > 0$, $a_n = c_n \alpha^n$ und $b_n = n c_n \alpha^{n-1}$.

- ☐ $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} > \limsup_{n\to\infty} |b_n|^{1/n}$
- ☐ $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} < \limsup_{n\to\infty} |b_n|^{1/n}$
- ☑ $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} |b_n|^{1/n}$

Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\sqrt{n}} \cdot z^n$ ist auf dem Rand ihres Konvergenzkreises...

- ☑ überall absolut konvergent
- ☐ überall konvergent, aber nicht absolut konvergent
- ☐ überall konvergent, aussert in unendlich vielen Punkten
- ☐ nirgendwo konvergent

Sei ϕ eine Abbildung einer Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $b_n = a_{\phi(n)}$. Dann gilt:

- ☐ Wenn die Reihe konvergiert und ϕ surjektiv ist, dann ist die Reihe mit b_n auch konvergent.
- ☐ Wenn die Reihe konvergiert und ϕ injektiv ist, dann ist die Reihe mit b_n auch konvergent.
- ☐ Wenn die Reihe absolut konvergiert und ϕ surjektiv ist, dann ist die Reihe mit b_n auch konvergent.
- ☑ Wenn die Reihe absolut konvergiert und ϕ injektiv ist, dann ist die Reihe mit b_n auch konvergent.

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, dann gilt für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$

- ☐ konvergiert nicht unbedingt
- ☑ konvergiert immer absolut
- ☐ konvergiert immer, aber nicht absolut

Funktionen

Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \to [0, \infty[$, so dass $\lim_{x\to\infty} f(x) = --\infty, \lim_{x\to\infty} h(x) = 0$.

- ☑ Ist $\lim_{x\to\infty} f(x)h(x) = 0$ möglich?
- ☐ Ist $\lim_{x\to\infty} f(x)h(x) = \infty$ möglich?
- ☑ Ist $\lim_{x\to\infty} f(x)h(x) = -\infty$ möglich?
- ☑ Ist $\lim_{x\to-\infty} f(x)h(x) = \infty$ möglich?

Seien f, g monoton wachsende Funktionen:

- ☐ $f \cdot g$ ist monoton wachsend.
- ☐ $\frac{f}{g}$ ist monoton wachsend für $g(x) \neq 0$.
- ☐ $\frac{f}{g}$ oder $\frac{g}{f}$ ist monoton wachsend für $f(x), g(x) \neq 0$.

Seien $f : X \to Y, g : Y \to Z$ Funktionen, so dass $g \circ f : X \to Z$ eine Bijektion ist. Welche Aussage ist richtig?

- ☐ f ist injektiv, g ist injektiv
- ☑ f ist injektiv, g ist surjektiv
- ☐ f ist surjektiv, g ist injektiv
- ☐ f ist surjektiv, g ist surjektiv

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei f_n eine Funktionenfolge, die gleichmässig gegen f konvergiert. Es gilt:

- ☐ Sei $x_0 \in]a, b[$. Falls f_n für alle $n \geq 1$ in x_0 differnzierbar ist, so ist f in x_0 differnzierbar.
- ☑ Falls f_n für alle $n \geq 1$ in x_0 auf $[a, b]$ beschränkt ist, so existiert für jede Partition P der Grenzwert der Untersumme $\lim_{n\to\infty} s(f_n, P) = s(f, P)$.
- ☑ Falls f_n für alle $n \geq 1$ in x_0 stetig ist, so ist f gleichmässig stetig.
- ☑ Falls f_n für alle $n \geq 1$ in x_0 konvex ist, so ist f konvex.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt:

- ☐ Falls $D = \emptyset$, dann besitzt D einen Häufungspunkt.
- ☑ Falls $D \subseteq E$ und x_0 ein Häufungspunkt von D, so ist x_0 auch ein Häufungspunkt von E.
- ☐ Falls $F \subseteq D$ und x_0 ein Häufungspunkt von D, so ist x_0 auch ein Häufungspunkt von F.
- ☑ Falls D endlich ist, gibt es keinen Häufungspunkt.
- ☐ Falls D unendlich ist, gibt es mindestens einen Häufungspunkt.

Sei $f_n : D \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

- ☑ f_n konvergiert punktweisen, wenn $|f(x) - f_n(x)| \to 0$, für $n \to \infty$.
- ☐ f_n konvergiert gleichmässig, wenn $\forall \epsilon > 0, \forall x \in D, \exists N > 0$, so dass $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$.
- ☑ Gleichmässige konvergenz von f_n impliziert punktweise konvergenz von f_n.

Welche Aussagen sind richtig?

- ☐ $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ beschränkt $\Rightarrow f$ monoton.
- ☐ $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ strikt monoton wachsend $\Rightarrow f$ stetig.
- ☐ $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ monoton $\Rightarrow f$ beschränkt.
- ☑ $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ monoton $\Rightarrow f$ beschränkt.

Sei $f : [0, 1] \to [0, 1]$ stetig und nicht konstant. Dann gilt:

- ☑ Es gibt einen Punkt $x \in [0, 1]$, so dass $f(x) = x$.
- ☐ Es gibt einen Punkt $x \in [0, 1]$, so dass $f(x) = 1$.
- ☐ f hat eine eindeutige Maximalstelle.
- ☑ Das Bild $f([0, 1]) \subset [0, 1]$ ist ein abgeschlossenes Intervall. D.h. es gibt $a, b \in [0, 1]$ mit $a < b$, so dass $f([0, 1]) = [a, b]$.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig bei $x_0 = 0$, mit $f(x_0) > 0$. Dann gilt:

- ☐ Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- ☑ Es existiert $\epsilon, \delta > 0$, so dass $f(x) > \epsilon$ für alle $x \in (-\delta, \delta)$ gilt.

Sei $f : D \to \mathbb{R}$, welche Aussage ist äquivalent zur Stetigkeit von f.

- ☑ $\forall x \in D, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, so dass für alle $z \in D$ gilt: $z \in (x - \delta, x + \delta) \Rightarrow f(z) \in (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon)$.
- ☐ $\forall x \in D, \exists \delta > 0, \forall \epsilon > 0$, so dass für alle $z \in D$ gilt: $|z - x| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(x)| < \epsilon$.
- ☐ $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, so dass für alle $x, z \in D$ gilt: $|z - x| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(x)| < \epsilon$.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

- ☐ f hat eine Maximalstellt
- ☑ Wenn $f(1) = 2$ und $f(3) = -1$, dann gibt es ein $t \in]1, 3[$ mit $f(t) = 0$.
- ☑ Wenn $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ gilt, dann ist f auf $[0, \infty[$ begrenzt.
- ☐ Wenn f begrenzt ist, dann existiert $\lim_{t\to\infty} f(t)$.

Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ Folgen mit $c_n = a_n + b_n$. Dann gilt:

- ☐ Falls $\lim_{n\to\infty} c_n$ existiert, existieren $\lim_{n\to\infty} a_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$ und es gilt $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$.
- ☑ Falls $\lim_{n\to\infty} c_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$ existieren, existiert $\lim_{n\to\infty} a_n$ und es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n - \lim_{n\to\infty} b_n$.

Seien $a < b$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ brschränkt mit $f(a) < f(b)$. Dann gilt:

- ☐ Falls für jedes $c \in [f(a), f(b)]$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = c$ existiert, so folgt, dass f stetig ist.
- ☐ Falls $g \circ f$ und g stetig sind, so ist auch f stetig.
- ☑ Falls f stetig ist, gibt es $x_0 \in [a, b]$, so dass $\int_a^b x f(x)dx = \frac{f(x_0)}{2}(b^2 - a^2)$.

Sei $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

- ☑ Es gibt eine differnzierbare Funktion $F :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ mit $F'(t) = f(t)$ für alle $t \in]0\infty[$.
- ☑ Wenn $f(t) \geq 0$ für alle $t \in [0, 1]$ und $\int_0^1 f(t)dt = 0$, dann gilt $f(t) = 0$ für alle $t \in [0, 1]$.

- [ ] Wenn $|f(t)| \leq \frac{1}{1+t}$ für alle $t \in [0,\infty[$, dann existiert $\int_0^\infty f(t)dt$.
- [ ] Wenn $\sum_{n=1}^\infty f(x)$ konvergiert, dann existiert $\int_0^\infty f(t)dt$.

Ableiten und Integrieren

Seien $f(x) = \sin(x) \cdot e^{-1/x^2}$ mit $f(0) = 0$ und $a_k = \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(x)dx$. Dann gilt:

- [ ] f ist stetig aber nicht glatt.
- [x] f besitzt unendlich viele lokale Minimalstellen.
- [ ] f besitzt ein lokales Maximum in $x = 0$.
- [ ] $a_1 > 0$
- [x] $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Sei f differenzierbar. Dann gilt:

- [x] f ist stetig.
- [ ] f' ist stetig.
- [ ] Falls $f'(x) = 0, \forall x \in D$, dann existiert $c \in \mathbb{R}, f(x) = c, \forall x \in D$.
- [x] Falls $D = (a,b), a < b$, dann ist obige Aussage wahr.

Sei f eine ungerade Funktion. Dann gilt:

- [ ] $f^{(i)}(0) = 0$ für i ungerade
- [ ] $f^{(i)}(0) \neq 0$ für i ungerade
- [x] $f^{(i)}(0) = 0$ für i gerade
- [ ] $f^{(i)}(0) \neq 0$ für i gerade

Welche der Implikationen sind wahr?

- [x] f differenzierbar $\Rightarrow f$ stetig $\Rightarrow f$ integrierbar
- [ ] f integrierbar $\Rightarrow f$ differenzierbar $\Rightarrow f$ stetig
- [ ] f stetig $\Rightarrow f$ differenzierbar $\Rightarrow f$ integrierbar
- [ ] f integrierbar $\Rightarrow f$ stetig $\Rightarrow f$ differenzierbar

Sei $h(x) = g(f(x))$ und f, g sind zwei nicht-negative Funktionen.

- [ ] Wenn f und g streng konvex sind, ist auch h konvex.
- [x] Wenn $\int_0^\infty f(x)dx, \int_0^\infty g(x)dx$ konvergieren, so konvergiert auch $\int_0^\infty h(x)dx$.

Welche Aussage stimmt?

- [ ] Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar. Dann gilt für $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) : \sum_{n=0}^\infty \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^\infty f_n(x)dx$.
- [x] Seien f_n wie oben, aber zusätzlich konvergieren sie gleichmässig. Dann gilt: $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.
- [ ] Die Umkehrung der zweiten Aussage ist wahr.

Weiter Aufgaben

Folgen und Reihen

Ex. Sei (a_n) eine induktive Folge mit $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Beweise, dass die Folge durch 2 von oben beschränkt ist und berechne den Grenzwert.
Wir wissen, dass die Wurzelfunktion monoton wachsend ist. Nun machen wir einen Induktionsbeweis. Verankerung: für $n = 1, a_1 = \sqrt{2} \leq 2$. Induktionsschritt: $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2+2} = 2$. Somit haben wir die Beschränktheit gezeigt, nun beweisen wir noch, dass die Folge monoton wachsend ist. Verankerung: für $n = 2, a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \geq \sqrt{2} = a_1$. Induktionsschritt: $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \geq \sqrt{2 + a_{n-1}} = a_n$. Da die Folge beschränkt und monoton wachsend ist, folgern wir, dass ein Grenzwert existiert. $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2+a} \Rightarrow a^2 - 2 - a = 0$, da $a_n > 0$ kommt nur die Lösung $a = 2$ in frage.

Ex. Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n (1 + \frac{t}{k^2})$ für jedes t existiert.
Wir nehmen $N \in \mathbb{N}, \frac{|t|}{N^2} < 1$. Da $\prod_{k=1}^n (1 + \frac{t}{k^2}) = \prod_{k=1}^N (1 + \frac{t}{k^2}) \prod_{k=N+1}^n (1 + \frac{t}{k^2})$ gilt, reich es wenn wir zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=N+1}^n (1 + \frac{t}{k^2}) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n (1 + \frac{t}{(k+N)^2}) = a_n$ existiert. Falls $t \geq 0$ ist die Folge (a_n) steigend, sonst ist sie fallend. Weiter ist sie monoton, deswegen existiert ein Grenzwert, wenn sie beschränkt ist. Es folgt $0 \leq a_n \leq \prod_{k=1}^n (e^{\frac{t}{k^2}}) \leq e^{|t|(\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2})} < \infty$. Weshalb der Grenzwert existiert.

Ex. Zeige mit der Def. des Grenzwertes, dass $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n + \cos(n)} - \sqrt{2n+1}) = 0$.
Wir formen zuerst um und schätzen ab: $|\sqrt{2n + \cos(n)} - \sqrt{2n+1}| = \frac{|\cos(n) - 1|}{|\sqrt{2n+\cos(n)} + \sqrt{2n+1}|} \leq \frac{2}{\sqrt{n+1}}$. Nun verwenden wir die definition des Grenzwertes: $|\frac{2}{\sqrt{n+1}} - 0| < \epsilon \Rightarrow n > \frac{4-\epsilon^2}{2\epsilon^2}$. Somit haben wir gezeigt, dass für ein beliebiges ϵ ein n existiert, so dass $|a_k - 0| < \epsilon, \forall k > n$.

Ex. Berechne den Grenzwert $\lim_{x\to 1^+} \frac{\log(x) - \sin(x\pi)}{\sqrt{x-1}}$.
Wenn $|x-1|$ klein genug ist können wir die Taylor Reihe verwenden. Dann gilt: $\frac{\log(x)-\sin(x\pi)}{\sqrt{x-1}} = \frac{(1+\pi)(x-1)+\mathcal{O}(|x-1|^2)}{\sqrt{x-1}} = (1+\pi)\sqrt{x-1} + \mathcal{O}(|x-1|^{\frac{3}{2}})$. Somit ist $\lim_{x\to1^+} \frac{\log(x)-\sin(x\pi)}{\sqrt{x-1}} = 0$.

Ex. Zeige, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ $\lim_{n\to\infty}(\cos(\frac{t}{\sqrt{n}}))^n = e^{-\frac{t^2}{2}}$.
Wir verwenden wieder die Taylorreihen für cos und log. $\cos(\frac{t}{\sqrt{n}})^n = \exp(n \log(\cos(\frac{t}{\sqrt{n}}))) = \exp(n \log(1 - \frac{t^2}{2n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2}))) = \exp(n(-\frac{t^2}{2n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2}))) = \exp(-\frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(\frac{1}{n})) \to^{n\to\infty} \exp(-\frac{t^2}{2})$.

Ex. Berechne $\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x}$.
Wir verwenden die Potenzreihe Darstellung des Sinus $\frac{1}{x}\sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$. Zudem zeigen wir mit dem Quotientenkriterium, dass diese Potenzreihe für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent ist. Da der Wert der Potenzreihe für $x = 0$ gegen 1 konvergiert, schliessen wir $\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Ex. Für welche x konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^\infty |x|^{n!}$?
Falls $|x| \geq 1$ sehen wir, dass $\lim_{n\to\infty} |x|^{n!} \neq 0$, also muss die Reihe divergieren. Falls $x < 1$ ist $\sum_{k=1}^\infty |x|^{n!} \leq \sum_{k=1}^\infty |x|^n$ und da dies eine Geometrische Reihe mit Basis ¡ 1 ist, konvergiert die Reihe.

Ex. Stelle $(1+e^x)^3$ als Potenzreihe dar.
Es gilt $\sum_{k=1}^\infty b_k = b, \sum_{k=1}^\infty c_k = c$ und $\sum_{k=1}^\infty b_k + c_k = b + c$. Also können wir die Potenzreihe in einzelne Summanden aufteilen: $(1+e^x)^3 = 1 + 3e^x + 3e^{2x} + e^{3x} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} 3\frac{x^n}{n!} + 3\frac{2^n x^n}{n!} + \frac{3^n x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+3\cdot^n+3^n}{n!}x^n$. Nun müssen wir nur noch den Fall $n = 0$ und $n > 0$ unterscheiden.

Ex. Zeige, dass das Cauchy Produkt der beiden divergenten Reihen $2 + 2 + 2^2 + \ldots$ und $-1 + 1 + 1 + \ldots$ absolut konvergiert.
Wir berechnen $\sum_{n=0}^\infty(\sum_{j=0}^n a_{n-j}b_j) = a_0b_0 + \sum_{n=1}^\infty(\sum_{j=0}^n a_{n-j}b_j) = \sum_{n=0}^\infty(-2^n+2^{n-1}+\ldots+2^1+2) = -2+\sum_{n=1}^\infty(1-(1-2^n)-2^n) = \sum_{k=1}^\infty c_k$ mit $c_0 = -2$ und $c_n = 0$. Offensichtlich konvergiert c_n absolut.

Ex. Sei $\sum_{k=1}^\infty a_k$ absolut konvergent und $\sum_{k=1}^\infty b_k$ nur konvergent. Folgt daraus, dass $\sum_{k=1}^\infty b_k \sin(a_k)$ konvergiert?
Zuerst zeigen wir, dass $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Da $\sum_{k=1}^\infty b_k$ konvergiert, wissen wir dass $\sum_{k=1}^\infty c_k$ konvergiert, wobei $c_1 = 0$, $c_k = b_{k-1}$ und $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k \to$ $\lim_{n\to\infty} b_k = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n} c_k) = 0$. Nun verwenden wir die Abschätzung $|\sin(x)| \leq |x|$, woraus folgt, dass $\sum_{k=1}^\infty \sin(a_k)$ absolut konvergiert. Wir wissen dass die Folge (b_k) einen oberen Grenzwert $C > 0$ hat, deshalb gilt: $|b_n \sin(a_n)| \leq C|a_n|$, was den Beweis abschliesst.

Funktionen

Ex. Zeige für alle $k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq x \leq \sqrt{(4k+5)(4k+6)}$ gilt: $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots - \frac{x^{2(2k+1)}}{2(2k+1)!}$.
Der Kosinus konvergiert gleichmässig und $\cos(x) - (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots - \frac{x^{2(2l+1)}}{2(2l+1)!}) = \sum_{k=1}^\infty \frac{x^{4(k+l)}}{(4k+4l)!} - \frac{x^{4(k+l)+2}}{(4k+4l+2)!}$. Da $x \leq \sqrt{(4(k+l)+1)(4(k+l)+2)} \Rightarrow \frac{x^{4(k+l)}}{(4k+4l)!} - \frac{x^{4(k+l)+2}}{(4k+4l+2)!} \geq 0$, können wir schliessen, dass $0 \leq x \leq \sqrt{(4k+5)(4k+6)} \Rightarrow \frac{x^{4(k+l)}}{(4k+4l)!} - \frac{x^{4(k+l)+2}}{(4k+4l+2)!} \geq 0, \ \forall l \geq 1$.

Ex. Konvergiert $f_n(x) = x \to 2nx$ falls $0 \leq x < 1/2n$, $2 - 2nx$ falls $1/2n \leq x < 1/n$, 0 falls $1/n \leq x \leq 1$ gleichmässig?
Nein, $f_n(x)$ konvergiert punktweise gegen $f(x) = 0$. Für $x = 0$, gilt $f_n(x) = 0$ für jedes n. Für $x > 0$ wählen wir $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $x > 1/n_0$. Dann gilt $x > 1/n$ für alle $n \geq n_0$. Also ist $f_n(x) = 0$ für $n \geq n_0$. Wir behaupten nun, dass $f_n(x)$ nicht gleichmässig konvergiert. Es gilt für jedes n, dass $f_n(\frac{1}{2n}) = 1$ und damit $f_n(\frac{1}{2n}) - f(\frac{1}{2n}) = 1$. Damit gilt aber auch $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(\frac{1}{2n}) - f(\frac{1}{2n})| = 1 \neq 0$ und die Funktionenfolge konvergiert nicht gleichmässig.

Ex. Sei x_0 ein Häufungspunkt von $D\cap]x_0,\infty[, D\cap]-\infty,x_0[$ mit der Eigenschaft $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$. Zeige, dass $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{1+f(x)^2} = 0$.
Wir verwenden die Definition des Häufungspunktes. Es gilt $\frac{1}{1+f(x)^2} \leq \frac{1}{1+\frac{1}{\epsilon^2}} = \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2+1}$. Wir wählen nun $\delta'' = \min(\delta, \delta')$. Dann erhalten wir $|\frac{1}{1+f(x)^2} - 0| \leq \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2+1} = \epsilon'$. Nach Definition haben wir somit gezeigt, dass der Grenzwert 0 ist.

Ex. Bestimme die Konstanten a, b so, dass die Funktione $f : x \to x^2 - ax + b$ falls $x \leq -1$, $(a+b)x$ falls $-1 < x < 1$, $x^2 + ax - b$ falls $x \geq 1$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist. Die einzelnen Funktionen sind stetig, daher müssen wir nur noch die Punkte ±1 überprüfen. Es muss gelten $\lim_{x\to-1^+}(a+b)x = 1 + a + b$ und $\lim_{x\to1^-}(a+b)x = 1 + a - b$. Wenn wir diese Gleichungen lösen, erhalten wir $a = -1$ und $b = \frac{1}{2}$.

Ex. Sei $f : x \to \frac{x^5 - 7x^2 + 1}{x^8 + 1}$, zeige, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist und min. eine Nullstelle besitzt.
Arithmetische Operationen sind stetig auf $\mathbb{R}$ und die Verkettung von stetigen Funktionen ist ebenfalls stetig. Somit wissen wir f ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$. Es gilt $f(-1) < 0$ und $f(2) > 0$, mit dem Zwischenwertsatz folgt nun dass f eine Nullstelle in $[-1, 2]$ hat.

Ex. Sei $f(x) = x$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $f(x) = 1 - x$ sonst. Zeige, dass $x_0 = \frac{1}{2}$ der einzige Stetigkeitspunkt ist.
Wir nehemn an $x_0 \neq 1/2$ und machen eine Fallunterscheidung. Zuerst nehmen wir an $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ist ein Stetigkeitspunkt. Wir definieren $(y_n) = \frac{\lfloor nx_0 \rfloor}{n}$, somit ist $\lim_{n\to\infty} y_n = x_0$ und $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = x_0 \neq 1 - x_0 = f(x_0)$. Somit ist f für alle $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ nicht stetig. Nun nehmen wir an $x_0 \in \mathbb{Q}\backslash\{1/2\}$. Wir definieren $(y_n) = x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ $\lim_{n\to\infty} y_n = x_0$ und $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = 1 - x_0 \neq x_0 = f(x_0)$. Somit ist f für alle $x_0 \in \mathbb{Q}\backslash\{1/2\}$ nicht stetig. Nun müssen wir noch zeigen, dass f in x_0 stetig ist. D.h. $\forall\epsilon\exists\delta|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Merke $x_0 \in \mathbb{Q}$ nun wählen wir

$\delta = \epsilon$ und erhalten
$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - 1/2| = |x - 1/2| = |x - x_0| < \delta = \epsilon$. Daher ist f stetig in x_0.

Ex. Sei $f:[0,\ln(2)] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass es $\eta \in [0,\ln(2)]$, $f(\eta) = \frac{1}{e^2-e}\int_0^{\ln(2)} e^{e^x}e^x f(x)dx$ gibt.
Nach dem Min-Max Satz hat f ein Maximum b und ein Minimum a, so dass $f[0,\ln(2)] \to [f(a), f(b)]$. Daher gilt:
$f(a)\int_0^{\ln(2)} e^{e^x}e^x dx \le \int_0^{\ln(2)} e^{e^x}e^x f(x)dx \le f(b)\int_0^{\ln(2)} e^{e^x}e^x dx$. Nun rechnen wir $\int_0^{\ln(2)} e^{e^x}e^xdx = e^2-e$ aus. Wenn wir den Zwischenwertsatz anwenden, erhalten wir somit es existiert ein $\eta\in[0,\ln(2)]$, so dass $f(a) \le f(\eta) = \frac{1}{e^2-e}\int_0^{\ln(2)} e^{e^x}e^xf(x)dx \le f(b)$.

Ex. Sei $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}, x\to \frac{nx}{(n^2x^2+1)^2}$. Zeige, dass $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Konvergiert die Funktion gleichmässig? Gilt $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$?
Es gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$. Die Konvergenz ist nicht gleichmässig, da $\sup_{0\le x\le 1}|f_n(x)| \ge \frac14, \forall n\in\mathbb{N}$. Weiter gilt $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = 0$, denn $\int_0^1 f_n(x)dx = -\frac{1}{2n}\frac{1}{n^2x^2+1}|_0^1 \to 0$.

Ableiten und Integrieren

Ex. Zeige, dass $f: x\to x+e^x$ bijektiv von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist und die Inverse auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.
$f'(x) = 1+e^x > 0, \forall x\in\mathbb{R}$, somit ist f streng monoton wachsend und umkehrbar. Dazu gilt $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ somit ist f bijektiv von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{R}$.

Ex. Zeige, dass $1+x\le e^x, \forall x\in\mathbb{R}$.
Wir definieren $f: x\to e^x - 1 - x$. Da die Exponentialfunktion schneller als jedes Polynom wächst, gilt $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Da f stetig ist, nimmt sie ein Minimum an. Da $f'(x)=0$ genau für $x=0$, ist dies eine globale Minimalstellen. Somit folgt $0\le f(x) \Rightarrow 1+x\le e^x$.

Ex. Berechne die Minimal-/Maximalstellen von $f: x\to\sqrt{1+x} - \frac12\sqrt{x}, x\in[0,5]$.
$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x(x+1)}}(2\sqrt{x} - \sqrt{1+x})$, also ist $f'>0$ genau dann wenn, $x>\frac13$. Dann ist f monoton fallend auf $[0,\frac13]$ und stark monoton wachsend auf $[\frac13, 5]$. Wenn wir nun noch $f(5) > f(0)$ vergleichen, sehen wir das die Maximalstelle bei 5 und die Minimalstelle bei $\frac13$ liegt.

Ex. Differenziere $f(x) = \int_{\cos(x)}^{e^x}\cos(t)dt$.
$f(x) = F(e^x) - F(\cos(x)) \Rightarrow f'(x) = F'(e^x) - F'(\cos(x))$
Wir wissen, die Ableitung eines Integrals ist die innere Funktion, dazu kommt nun noch innere Ableitung und wir erhalten:
$f'(x) = \cos(e^x)\cdot e^x + \cos(\cos(x))\cdot\sin(x)$

Ex. Sei f differenzierbare mit $f(x_0)\ne0$ für mindestens ein $x_0\in\mathbb{R}$. Weiter gilt $f(x+y)=f(x)f(y)$. Zeige $f(0)=1$.
Sei $b := f(x_0)$, so dass $b\neq 0$. Dann gilt
$bf(0) = f(x_0)f(0) = f(x_0+0) = f(x_0) = b$, also ist
$f(0) = \frac{bf(0)}{b} = \frac{b}{b} = 1$.

Ex. Sei $f(x) = x\sin(\frac1x)$ mit $f(0)=0$. Zeige, dass f in 0 nicht differenzierbar ist.
Es reicht eine Folge (y_n) zu finden, die gegen 0 strebt sodass $\frac{f(y_n)-f(0)}{y_n}$ nicht konvergiert. Dafür wählen wir $y_n = \frac{2}{\pi n}$. Es gilt $\frac{f(y_n)-f(0)}{y_n} = \pm1$. Da $y_n\to0$, haben wir gezeigt, dass f nicht differenzierbar ist.

Ex. Sei f eine Funktion, die in x_0 differenzierbar ist. Sei $n\ge2$, berechne $\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+nh)-f(x_0+(n-2)h)}{h}$.
Für $n\ge0$ haben wir $\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+nh)-f(x_0)}{h} = n\cdot f'(x_0)$. Somit erhalten wir für $n\ge2$ $\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+nh)-f(x_0+(n-2)h)}{h} = 2\cdot f'(x_0)$.

Ex. Zeige, dass f gerade $\Rightarrow f'$ ungerade.
Es gilt zu zeigen, dass $f'(-x) = -f'(x)$.
$f'(-x) = \lim_{h\to0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{f(x+h')-f(x)}{-h'} = -f'(x)$

Ex. Zeige, dass die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\to e^x-1-x$ nur für $x=0$ verschwindet.
Es gilt offensichtlich $f(0)=0$. $f'(x) = e^x-1>0$ für $x>0$. Dass heisst, dass g auf $]0,\infty[$ strikt monoton wächst. Analoges gilt für $x<0$, deshalb ist $x=0$ die einzige Nullstelle von f.

Ex. Zeige, dass für $f(x)=\sin(x+a)$ gilt $f^{(n)}(x) = \sin(x+a+\frac{n\pi}{2})$.
Wir verwenden Induktion. Für $n=1$ gilt:
$f'(x) = \cos(x+a) = \sin(x+a+\pi/2)$. Für den Induktionsschritt gilt:
$f^{(n)} = (\sin(x+a+\frac{(n-1)\pi}{2}))' = \cos(x+a+\frac{(n-1)\pi}{2}) = \sin(x+a+\frac{n\pi}{2})$.

Ex. Gegeben die Funktion $f: x\to x^x$ benutze die Taylor Approximation im Punkt $x_0=1$ zur dritten Ordnung, um eine Approximation von $(\frac75)^{\frac75}$ anzugeben.
Wir berechnen zuerst die ersten drei Ableitungen:
$f'(x) = (1+\ln(x))x^x, f''(x) = (1+\ln(x))^2x^x + \frac{x^x}{x}, f'''(x) = (1+\ln(x))^3x^x + \frac{3(1+\ln(x))x^x}{x} - \frac{x^x}{x^2}$. Nun können wir die Taylor Approximation
$f(x)\approx f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(x)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(x)}{6}(x-1)^3$ berechnen.
Dies ergibt dann $f(\frac75) \approx 1 + (\frac75-1) + (\frac75-1)^2 + \frac12(\frac75-1)^3 = \frac{199}{125}$.

Ex. Sei $f(x) = \int_0^\infty e^{-xy}\cos(y)dy$ $x\in]0,\infty[$, zeige, dass f wohldefiniert ist.
Wir fixieren ein $x>0$ und müssen nun zeigen, dass für $h(t) = \int_0^t e^{-xy}\cos(y)dy$ ein $\lim_{n\to\infty}h(n)$ exisitert. Wir machen folgende Abschätzung: $|h(T+s)-h(T)| = \int_T^{T+s}e^{-xy}\cos(y)dy \le \int_T^{T+s}e^{-xy}dy = \frac{-(e^{-x(T+s)}-e^{-xT})}{x} \le \frac{1}{e^{xT}x}$. Es folgt, dass $(h(n))$ eine Cauchy Folge ist und $y = \lim_{n\to\infty}h(n)$ existiert. Aus $|h(t)-y| \le |h(t)-h(\lfloor t\rfloor)| + |h(\lfloor t\rfloor)-y| \le \frac{1}{e^{x\lfloor t\rfloor}x} + |h(\lfloor t\rfloor)-y| \to^{t\to\infty} 0$ folgt, dass $\lim_{n\to\infty}h(n) = y$.

Ex. Integriere $\int_0^1 t^2\cos(2t)dt$.
Wir wenden zwei mal partielle Integration an.
$\int_0^1 t^2\cos(2t)dt = \frac12\sin(2t)t^2|_0^1 - \int_0^1\sin(2t)tdt = \frac12\sin(2) + \frac12(\cos(2t)t)|_0^1 - \frac12\int_0^1\cos(2t)dt = \frac12\sin(2)+\frac12\cos(2) - \frac14\sin(2)$.

Ex. Integriere folgende Funktion $f(x) = \frac{t}{t^3+t^2-t-1}$.
Zuerst verwenden wir Partialbruchzerlegung um $f(x) = \frac{1}{2(t+1)^2} - \frac{1}{4(t+1)} + \frac{1}{4(t-1)}$ zu erhalten. Nun können wir die einzelnen Brüche leicht integrieren. Somit ist $F(x) = \frac{-1}{2(t+1)} - \frac14(\log(t+1) - \log(t-1))$.

Ex. Integriere folgendes uneigentliches Integral: $\int_1^\infty\frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$.
Wir formen zuerst um und machen eine Abschätzung, $\frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}} \le \frac{1}{x^3}$ da $\frac{1}{x^3}$ bekanntlich konvergent ist und unser Integral monoton wachsen ist, können wir schliessen dass der Grenzwert für das Integral existiert, d.h. es konvergiert. Wir machen die Substitution $t = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ und erhalten: $\int_1^a\frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx = 2(-\frac13(\frac{a}{a+1})^{-3/2} + \sqrt{\frac{a}{a+1}} + \frac{2^{3/2}}{3} - \sqrt2)$. Für $a\to\infty$ ergibt dass $\frac23(2-\sqrt2)$.

Ex. Integriere folgendes uneigentliches Integral: $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-1/|x|}}{x^2}dx$.
Da sowohl Nenner als auch Zähler immer positiv sind, konvergiert das Integral, genau dann wenn $\int_0^\infty\frac{e^{-1/x}}{x^2}dx$ konvergiert. Mit der Substitution $t=\frac1x$ erhalten wir $\int_\epsilon^A\frac{e^{-1/x}}{x^2}dx = -e^{-\frac1\epsilon} + e^{-\frac1A}$. Dieser Ausdruck strebt nach 1 für $\epsilon\to0^+, A\to\infty$. Somit konvergiert das Integral und der Grenzwert ist $2*\int_0^\infty\frac{e^{-1/x}}{x^2}dx = 2$.

Ex. Berechne für alle $m\in\mathbb{N}^*$ den Wert des Integrals $\int_0^{\pi/2}\cos^m(x)dx$.
Für $m=1$ und $m=2$ haben wir:
$\int_0^{\pi/2}\cos(x)dx = 1, \int_0^{\pi/2}\cos^2(x)dx = \frac\pi4$. Für $m\ge3$ gilt:
$\int_0^{\pi/2}\cos^m(x)dx = (m+1)\int_0^{\pi/2}\cos^{(m-2)}(x)\sin^2(x)dx = (m+1)(\int_0^{\pi/2}\cos^{(m-2)}(x)dx - \int_0^{\pi/2}\cos^m(x)dx) = \frac{m-1}{m}\int_0^{\pi/2}\cos^{(m-2)}(x)dx$.

Ex. Zeige, dass für jedes $c\in R$ die Funktion $\exp(-t^2)$ auf $]-\infty,c]$ nach t integrierbar ist.
Es genügt zu zeigen, dass $\exp(-t^2)$ auf $]-\infty,-1]$ integrierbar ist, da die Funktion auf $]-1,c]$ für all $c>-1$ integrierbar ist. Um dies zu zeigen verwenden wir folgende obere Schranke der Funktion: $\exp(-t^2)<\exp(t)$. Somit ist
$\int_{-\infty}^{-1}\exp(t)dt = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{-1}\exp(t)dt = \lim_{a\to-\infty}(e^{-1}-e^a) = e^{-1}$.

Ex. Sei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ mit $x=0$ für $x=0$ oder $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ und $\frac1q$ für $x=\frac pq$. Zeige, dass f integrierbar ist.
Wir wollen zeigen, dass sowohl Ober- als auch Untersumme gleich sind. Wir merken, dass jede Partition $[x_{i-1},x_i]$ eine irrationale Zahl beinhaltet, solange $x_{i-1}\neq x_i$. Damit ist die Untersumme immer 0. Sei $\epsilon>0, n\in\mathbb{N}$, so dass $\frac1n<\frac\epsilon2$ und B_n die Menge aller koprimen Brüche mit Nenner kleiner gleich n. Sei $m=\#B_n$, wähle $k>m$ und $P=\{x_0,...,x_k\}$ eine Partition mit $\max_{1\le i\le k}|x_i-x_{i-1}| < \frac{\epsilon}{4m}$, wir notieren $P = P_{\frac{\epsilon}{4m}}$. Da B_n aus m Elementen besteht, gibt es höchstens $2m$ Intervalle, die B_n schneiden. Falls $x\notin B_n$, dann ist x entweder irrational oder ein Bruch $\frac pq$ mit $q>n$. Somit gilt $f(x)\le\frac1n$. Wir schätzen die Obersumme $S(f,P)$ von oben ab: $S(f,P) = \sum_{i:[x_{i-1},x_i]\cap B_n\neq\emptyset}(x_i-x_{i-1})f_i + \sum_{j:[x_{j-1},x_j]\cap B_n=\emptyset}(x_j-x_{j-1})f_j$.
Die erste Summe läuft über $\le 2m$ Indizes und es gilt $f_i\le1$. In der zweiten Summe können wir f_i mit $\frac1n$ abschätzen. Wir kombinieren und erhalten $S(f,P)\le 2m\frac{\epsilon}{4m}\cdot1 + 1\cdot\frac1n < \frac\epsilon2+\frac\epsilon2 = \epsilon$. Somit haben wir gezeigt $S(f,P)-s(f,P)<\epsilon$ und f ist integrierbar.