Analysis II

by dcamenisch

Differenzialgleichungen

Gegeben F, eine Funktion von x, y, und die Ableitung von y, wobei y selbst eine Funktion ist. Dann ist die Gleichung der Form

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = b(x)$$

eine **gewöhnliche Differenzialgleichung** (kurz DGL / ODE) von **Ordnung** n. Alternativ:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

wobei die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1}$ komplexwertige Funktionen auf $I \subset \mathbb{R}$ sind (können von y abhängig sein). Wenn $b(x) = 0$, dann ist das DGL **homogen**, sonst ist es inhomogen.

Eine Differenzialgleichung ist **linear** wenn F als eine lineare Kombination von den Ableitungen von y geschrieben werden kann:

$$b(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x) \cdot y^{(i)}$$

wobei $a_i(x)$ und $b(x)$ stetige Funktionen sind.
Erkennen von linearen ODE:

(1) keine Koeffizienten vor der höchsten Ableitung

(2) alle Koeffizienten sind stetige Funktionen

(3) keine Produkte von y oder deren Ableitungen

(4) keine Potenzen von y oder deren Ableitungen

(5) keine Funktionen die von y oder deren Ableitungen abhängen

Die Menge S der Lösungen von f zu einem DGL, ist eine Teilmenge des Raums der komplexwertigen Funktionen auf I, mit der Dimension n. Im Allgemeinen sind solche Lösungen nicht eindeutig, nur mit Anfangsbedingungen können wir eine eindeutige Lösung erhalten. Ein DGL der Ordnung k benötigt k Anfangsbedingungen für eine eindeutige Lösung.

S_0 ist die **Menge der Lösungen zum homogenen DGL**. Für ein beliebiges b ist die Menge der Lösungen gegeben durch $S_b = \{f_h + f_p \mid f_h \in S_0\}$ wobei f_p eine partikulär Lösung ist.

Lineare DGL von Ordnung 1

Betrachten wir lineare DGL von der Form:

$$y' + a(x)y = b(x)$$

(1) Zuerst lösen wir das homogenen DGL:

$$\begin{aligned} y' + a(x)y &= 0 \\ \frac{y'}{y} &= -a(x) \\ \ln(y) &= -A(x) + C \\ y &= e^{-A(x)+C} = z \cdot e^{-A(x)} \quad z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Bemerke, dass wenn f eine Lösung ist, muss auch $z \cdot f, \forall z \in \mathbb{C}$ eine Lösung sein.

(2) Nun finden wir eine partikulär Lösung $f_p : I \to \mathbb{C}$ so dass $f_p' + a(x)f_p = b(x)$. Dazu verwenden wir "Variation der Konstanten" oder "fundiertes Raten".

Das Anfangswertproblem mit $f(x_0) = y_0$ hat eine eindeutige Lösung, gegeben durch $f(x) = y_0 \cdot e^{A(x_0)-A(x)}$.

Fundiertes Raten

Wenn $b(x)$ von einer bestimmten Form ist, versuchen wir folgende f_p:

$b(x)$	Raten
$a \cdot e^{\alpha x}$	$b \cdot e^{\alpha x}$
$a\sin(\beta x)$ or $b\cos(\beta x)$	$c\sin(\beta x) + d\cos(\beta x)$
$ae^{\alpha x}\sin(\beta x)$ or $be^{\alpha x}\cos(\beta x)$	$e^{\alpha x}\Big(c\sin(\beta x) + d\cos(\beta x)\Big)$
$P_n(x)e^{\alpha x}$	$R_n(x) \cdot e^{\alpha x}$
$P_n(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$e^{\alpha x}\Big(R_n(x)\sin(\beta x) + S_n(x)\cos(\beta x)\Big)$
$P_n(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$	$e^{\alpha x}\Big(R_n(x)\sin(\beta x) + S_n(x)\cos(\beta x)\Big)$

(1) Wenn $b(x)$ eine Linearkombination der Basisfunktionen ist, so versuche eine Linearkombination.

(2) Wenn die geratene Lösung die selbe ist wie die homogene Lösung, so versuche sie mit x^m zu multiplizieren, wobei m die Vielfachheit der Wurzel ist.

Variation der Konstanten

(1) Nimm an $f_p = z(x)e^{-A(x)}$ für eine Funktion $z : I \to \mathbb{C}$

(2) Wir setzen dies in die Gleichung ein und schauen was z sein kann

$$\begin{aligned} y' + a(x)y &= b(x) \\ \Rightarrow z'(x)e^{-A(x)} &= b(x) \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass:

$$\begin{aligned} z'(x) &= b(x)e^{A(x)} \\ z(x) &= \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\,dt \end{aligned}$$

Daher erhalten wir $f_p = \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt \cdot e^{-A(x)}$.

Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Betrachten wir DGL von der Form:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(k-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

wobei $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ konstant sind und $k \geq 1$. $b(x)$ ist weiterhin eine stetige Funktion. Die Menge der Lösungen S ist somit ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit $\dim(S) = k$.

Wir suchen zuerst die **homogenen Lösung**. Dafür nehmen wir an, dass die Lösung von der Form $e^{\lambda x}$ ist. Nun können wir das charakteristische Polynom lösen:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^k e^{\lambda x} + a_{k-1}\lambda^{k-1}e^{\lambda x} + \cdots + a_0 e^{\lambda x} = 0 \\ &\Rightarrow 0 = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_0 \end{aligned}$$

Die Nullstellen von $P(\lambda)$ sind Eigenwerte, λ_i, mit dazugehöriger Multiplizität m_r. Nun spannen die Funktionen $f_{i,r} : x \to x^r e^{\lambda_i x}$ den Raum der Lösungen S_0 auf.

Falls $\lambda = \beta + \gamma i$ eine komplexe Nullstelle von $P(\lambda)$ ist, so ist auch $\bar{\lambda} = \beta - \gamma i$ eine Nullstelle. Daher sind $f_1 = e^{\lambda x}$ und $f_2 = e^{\bar{\lambda} x}$ Lösungen und könen durch eine Linearkombination von $\tilde{f}_1 = e^{\beta x}\cos(\gamma x)$ und $\tilde{f}_2 = e^{\beta x}\sin(\gamma x)$. ersetzt werden.

Falls $y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \cdots + a_0 y = 0$ reelle Koeffizienten hat, so führt jedes paar von komplex konjugierten Nullstellen $\beta_j \pm \gamma_j i$ mit Multiplizität m_j zu einer Lösung

$$x^l e^{\beta_j x}\Big(\cos(\gamma_j x) + i\sin(\gamma_j x)\Big) \quad \text{für } 0 \leq l \leq m_j$$

Um eine **partikulär Lösung** zu finden, können wir wieder "fundiertes Raten" oder "Variation der Konstanten" verwenden. Wir verwenden "Variation der Konstanten", wenn $k = 2$ und die RHS "unschön" ist, dies funktioniert dann wie folgt:

(1) Nimm an, dass die homogene Lösung $f_h = z_1 f_1 + z_2 f_2$ ist

(2) Versuche nun $f_p = z_1(x)f_1 + z_2(x)f_2$

(3) Löse das folgende System

$$\begin{aligned} z_1'(x)f_1 + z_2'(x)f_2 &= 0 \\ z_1'(x)f_1' + z_2'(x)f_2' &= b(x) \end{aligned}$$

Hierbei gehen wir wie folgt vor, wobei $x_0 \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned} W(x) &= f_1(x)f_2'(x) - f_2(x)f_1'(x) \neq 0 \\ \Rightarrow z_1' &= \frac{-f_2 b}{W}, z_2' = \frac{-f_1 b}{W} \\ \Rightarrow f_p(x) &= -f_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{f_2(t)b(t)}{W(t)}dt + f_2(x)\int_{x_0}^{x}\frac{f_1(t)b(t)}{W(t)}dt \end{aligned}$$

Ableitungen in $\mathbb{R}^n$

Polynome in $\mathbb{R}^n$

Ein **Monom** von Grad e ist eine Funktion

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto {x_1}^{d_1} \cdot \ldots \cdot {x_n}^{d_n} \\ e &= d_1 + \ldots + d_n \end{aligned}$$

Ein **Polynom** mit n Variablen von Grad $\leq d$ ist eine endliche Summe von Monomen mit Grad $e \leq d$.

Konvergenz

Ähnlich zu Funktionen in $\mathbb{R}$ können wir auch die Konvergenz für Funktionen f in $\mathbb{R}^n$ definieren. Aber zuerst repetieren wir ein paar Begriffe der Linearen Algebra:

(1) Skalarprodukt: $< x, y >= \sum_{i=0} x_i \cdot y_i$

(2) Euklidische Norm: $||x|| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$

Die euklidische Norm hat folgende Eigenschaften:

(1) $||x|| \geq 0$, $||x|| = 0$ genau dann wenn $x = 0$

(2) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ ($\triangle$-Ungleichung)

(4) $| < x, y > | \leq ||x|| \cdot ||y||$

Nun können wir **Konvergenz** definieren:

> Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}, x_k \in \mathbb{R}^n$. Die folgenden Definitionen sind äquivalent für $\lim_{k\to\infty} x_k = y$.
>
> (1) $\forall\varepsilon > 0\ \exists N \geq 1$ so dass $\forall k \geq N \quad ||x_k - y|| < \varepsilon$
>
> (2) Für jedes i, $1 \leq i \leq n$ konvergiert die Folge $(x_{k,i})_k$ von reellen Zahlen nach y_i.
>
> (3) Die Folge der reellen Zahlen $||x_k - y||$ konvergiert nach 0.

Sei $f : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $x_0 \in \mathcal{X},\ y \in \mathbb{R}^m$. Wir sagen f hat den Limes y für $x \to x_0$ wenn $x \neq x_0$ und etwas der Folgenden zutrifft:

(1) Für alle $\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ s.t. $\forall x \in \mathcal{X},\ x \neq x_0$ so dass $||x - x_0|| < \delta$ gilt $||f(x) - y|| < \varepsilon$.

(2) $\forall$ Folgen (x_k) in $\mathcal{X}$ mit $\lim x_k = x_0$ und $x_k \neq x_0$ konvergiert die Folge $f(x_k)$ nach y.

Stetigkeit

Sei $f : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $x_0 \in \mathcal{X}$. Wir sagen f ist stetig in x_0 falls einer der Folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(1) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ so dass $\forall x \in \mathcal{X},\ ||x - x_0|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)|| < \varepsilon$.

(2) $\forall$ Folgen (x_k) in $\mathcal{X}$ mit $\lim x_k = x_0$ gilt $\lim f(x_k) = f(\lim x_k)$.

f ist stetig in $\mathcal{X}$ falls f für jeden Punkt $x_0 \in \mathcal{X}$ stetig ist. Folgende Eigenschaften gelten.

(1) $f(x = x_1, \ldots, x_n) \mapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ und $f_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, dann gilt $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ stetig $\Leftrightarrow f_i\ \forall i = 1, \ldots, m$ sind stetig.

(2) Lineare Funktionen $x \mapsto Ax$ und Polynome sind stetig.

(3) Summen und Produkte von stetigen Funktionen sind stetig.

(4) Funktionen von unterschiedlichen Variablen sind stetig, falls alle Variablen stetig sind.

(5) Verknüpfungen von stetigen Funktionen sind stetig.

Sandwich Lemma

Wenn $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Funktionen sind mit $f(x) < g(x) < h(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$, so gilt:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = L$$

Definition von Mengen

Eine Menge $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ ist **beschränkt**, falls die Menge $\{||x|| \mid x \in \mathcal{X}\}$ beschränkt ist in $\mathbb{R}$.

$$\exists R \geq 0, \forall x \in \mathcal{X} : ||x|| \leq R$$

Eine Menge $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ ist **abgeschlossen**, falls jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ die in $\mathbb{R}^n$ konvergiert, zu einem Punkt in $y \in \mathcal{X}$ konvergiert. Hier ist es hilfreich sich eine Ball vorzustellen. Für Gegenbeispiele wird oft $\frac{1}{k}$ oder $<$ gebraucht.

Eine Menge ist **kompakt**, falls sie beschränkt und abgeschlossen ist.

> $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig, falls das Urbild jeder abgeschlossenen Menge $\subset \mathbb{R}^m$ stetig ist. Achtung: Die impliziert weder Kompaktheit noch Beschränktheit!

Eine Menge $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ ist **offen**, wenn ihr Komplement $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{X}$ abgeschlossen ist. Dies ist äquivalent zu $\forall x \in \mathcal{X},\ \exists r > 0$ so dass $\{y \in \mathbb{R}^n \mid ||y - x|| < r\} = B_r(x) \subset \mathcal{X}$.

Hier einige Beispiele:

(1) $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ist offen.

(2) $[a, b) \subset \mathbb{R}$ ist weder offen noch abgeschlossen.

(3) $\mathbb{R}^n$ und $\emptyset$ sind beide offen und abgeschlossen.

(4) $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \subset \mathbb{R}^2$ ist offen.

(5) Urbilder von von offenen Mengen sind unter stetigen Abbildungen offen (gilt auch für abgeschlossen).

Eine Menge $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ ist **Konvex**, falls $\forall x, y \in \mathcal{X} : \lambda x + (1 - \lambda)y \in \mathcal{X}$ gilt.

Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ hat eine konvergente Teilfolge.

Min-Max Theorem

Sei $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{X} \neq \emptyset$ eine kompakte Menge und $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f beschränkt und ein globales Maximum x^+ und ein globales Minimum x^- existieren, so dass

$$f(x^+) = \sup_{x\in\mathcal{X}} f(x), \quad f(x^-) = \inf_{x\in\mathcal{X}} f(x)$$

Partielle Ableitungen

Eine partielle Ableitung der Funktion $f : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, wobei $\mathcal{X}$ offen ist, erhält man, indem man alle Variablen bis auf eine als konstant betrachtet und dann nach der einen Variable ableitet.

$$\frac{\partial f}{\partial x_{0,j}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_{0,1}, \ldots, x_{0,j} + h, \ldots, x_{0,n}) - f(x_0)}{h}$$

Wenn $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ so ist

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} := \begin{pmatrix} \partial f_1(x_0)/\partial x_j \\ \vdots \\ \partial f_m(x_0)/\partial x_j \end{pmatrix}$$

Eigenschaften von partiellen Ableitungen sind (angenommen die partielle Ableitung von f, g existiert für x_j)

(1) $\partial_j(f + g) = \partial_j(f) + \partial_j g$

(2) $\partial_j(f \cdot g) = \partial_j(f) \cdot g + \partial_j(g) \cdot f$)

(3) wenn $g \neq 0$: $\partial_j(f/g) = \frac{\partial_j(f)\cdot g - \partial_j(g)\cdot f}{g^2}$

Kettenregel für partielle Ableitungen.
Sei $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ und $g : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^k$, wobei f eine Funktion von n Variablen $a_1, \ldots, a_n$ ist und g eine Funktion von m Variablen $b_1, \ldots, b_m$. Nun ist $F(a) = (g \circ f)(a) = g(f(a))$:

$$\partial_{a_i} F = \partial_{b_1} g \cdot \partial_{a_i} f + \ldots + \partial_{b_m} g \cdot \partial_{a_i} f$$

Jacobi Matrix

Sei $f : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $\mathcal{X}$ eine offene Menge. Die Jacobi Matrix ist eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten:

$$J_f = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$$

Gradient

Die Jacobi Matrix einer Funktion $f : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist ein Vektor, der oft mit ∇f bezeichnet wird. Die geometrische Interpretation ist ein Vektorfeld, definiert durch ∇f, das die Richtung und Magnitude des grössten Wachstums von f angibt.

Divergenz

Die Divergenz einer Funktion f ist die Spur der Jacobi Matrix von f.

$$\operatorname{div}(f)(x_0) = \operatorname{Tr}(J_f(x_0)) = \sum_{i=0} (J_f)_{i,i}$$

Differenzierbarkeit

Sei $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, $x_0 \in \mathcal{X}$ mit $\mathcal{X}$ offen. Wir sagen f ist differenzierbar an der Stelle x_0 falls eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (d.h. eine $m \times n$ Matrix L) existiert so dass $\forall x_0 + v \in \mathcal{X}$:

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + L(v) + R(x_0, v)$$

$$\lim_{v\to 0} \frac{||R(x_0, v)||}{||v||} = 0$$

Wir schreiben $df(x_0) = L$. Wenn f für alle $x_0 \in \mathcal{X}$ differenzierbar ist, so ist f auf ganz $\mathcal{X}$ differenzierbar.

Seien f, g differenzierbar im Punkt $x_0 \in \mathcal{X}$ so gilt:

(1) f ist stetig im Punkt x_0

(2) f hat alle partiellen Ableitungen am Punkt x_0 und die Matrix die die lineare Abbildung $df(x_0) : x \mapsto Ax$ repräsentiert ist die Jacobi Matrix von f am Punkt x_0, d.h. $A = J_f(x_0)$ (nur $\Rightarrow$)

(3) $d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$

(4) Wenn $m = 1$ so ist $f \cdot g$ differenzierbar und falls $g \neq 0$ f/g auch.

(5) Wenn $f : \mathcal{X} \to Y, g : Y \to \mathbb{R}^m$ beide differenzierbar sind, so gilt $d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \cdot df(x_0)$. Weiter ist $J_{g\circ f}(x_0) = J_g(f(x_0)) \cdot J_f(x_0)$.

Zuletzt gilt:

$$\forall i, \exists\partial_i \text{ und } \partial_i \text{ stetig} \Rightarrow f \text{ ist differenzierbar mit } df = J_f$$

Um zu beweisen, dass eine Funktion im Punkt x_0 differenzierbar ist, zeigen wir dass:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{||x - x_0||} = 0$$

Tangentialraum

Der Tangentialraum eines Graphen f am Punkt x_0 ist bestimmt durch den Graphen $g(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0)$.

Richtungsableitungen

Die Richtungsableitung von $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^m$, wobei $\mathcal{X}$ offen und $x_0 \in \mathcal{X}$ ist, in die Richtung $v \in \mathbb{R}^n$, ist definiert als:

$$w = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t \cdot v) - f(x_0)}{t} = df(x_0) \cdot (v)$$

Falls $v = e_i$ so gilt $w = \partial_i f(x_0)$.

Höhere Ableitungen

Wir brauchen Ableitungen von höhere Ordnung für Taylor Polynomen und um Maximas und Minimas zu bestimmen.

Sei $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}^m$. Wir sagen f ist eine Funktion der Klasse C^1 falls f auf $\mathcal{X}$ differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen stetig sind. Wir sagen $f \in C^k$ für $k \geq 2$ wenn f differenzierbar ist und für alle partiellen Ableitungen gilt $\partial_{x_i} f :\in C^{k-1}$. Weiter, f ist glatt oder in C^∞ falls $f \in C^k,\ \forall k$.

Partielle Ableitungen (bis zur Ordnung k) auf einer offenen Menge $\mathcal{X}$ sind kommutativ. Beispiel:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Polynome sind in $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Hesse-Matrix

Sei $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Die Hesse-Matrix ist eine $n \times n$ symmetrische Matrix, die die zweite Ableitung definiert.

$$\text{Hess}_f(x_0) := \Big(\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}\Big)_{1 \leq i,j \leq n}$$

Taylor Polynome

Sei $k \geq 1$ und $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ ist eine Funktion der Klasse C^k auf $\mathcal{X}$, sei $x_0 \in \mathcal{X}$ fix. Das k-te Taylor Polynom von f am Punkt x_0, ausgewertet am Punkt x ist das Polynom in n Variablen vom Grad $\leq k$:

$$T_k f(y; x_0) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x_0) \cdot y_i + \ldots$$
$$+ \sum_{m_1 + \cdots + m_n = k} \frac{1}{m_1! \ldots m_n!} \frac{\partial^k f(x_0)}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}} \cdot y_1^{m_1} \ldots y_n^{m_n}$$

Wobei die letzte Summe über alle Tupel von n nicht-negativen ganzen Zahlen geht, wobei die Summe k ist und $y = x - x_0$. Wir können die Notation vereinfachen, indem wir für den Multi-Index $m = (m_1, \ldots, m_n)$, folgende Notationen einführen:

$$m! = m_1! \cdots m_n!$$
$$|m| = m_1 + \ldots + m_n$$
$$y^m = y_1^{m_1} \cdots y_n^{m_n}$$
$$\partial_x^m f = \frac{\partial^{|m|} f}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}}$$

Nun erhalten wir folgende Notation:

$$T_k f(y; x_0) = \sum_{|m| \leq k} \frac{1}{m!} \partial_x^m f(x_0) \cdot y^m$$

Zum Schluss, wenn $f \in C^k$ für $x_0 \in \mathcal{X}$, so haben wir

$$f(x) = T_k(x - x_0; x_0) + E_k(f, x, x_0)$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{E_k(f, x, x_0)}{\|x - x_0\|^k} \to 0$$

Beispiele: (k = 1, k = 2)

$$T_1 f(x; x_0) := f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)$$
$$T_2 f(x; x_0) := T_1 f(x; x_0) + \frac{1}{2} \cdot (x - x_0)^\top \cdot \text{Hess}_f(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Kritische Punkte

Ein Punkt $x_0 \in \mathcal{X}$ wofür $\nabla f(x_0) = 0$ ist ein **kritischer Punkt**. Falls f in der Klasse C^2 ist, so ist ein Punkt nicht-degeneriert, falls $\det(\text{Hess}_f(x_0)) \neq 0$

Extrema

Wenn $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar ist auf dem Inneren von $\mathcal{X}$, wobei $\mathcal{X}$ kompakt ist, so existieren globale Extremalstellen von f. Diese sind entweder kritische Punkte von f oder befinden sich auf dem Rand von $\mathcal{X}$.

Lokale Extrema

Sei $f : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar und $\mathcal{X}$ eine offene Menge. Wir sagen $x_0 \in \mathcal{X}$ ist ein **lokales Maximum (Minimum)** falls wir eine Umgebung $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\} \subset \mathcal{X}$ finden können mit:

$$\forall x \in B_r(x_0) \quad f(x) \leq (\geq) f(x_0)$$

Alternativ wird auch von einem Hyperkubus $C(x_0, r)$ gesprochen. Weiter gilt:

$$x_0 \in \mathcal{X} \text{ ist ein lokales Extrema } \Rightarrow \nabla f(x_0) = 0$$

Falls ein kritischer Punkt weder ein lokales Minimum, noch ein lokales Maximum ist, so nennen wir ihn einen **Sattelpunkt**.

Globale Extrema

Sei $f : K \mapsto \mathbb{R}$ mit K kompakt, dann existiert ein globales Extrema von f und es ist entweder ein kritischer Punkt oder am Rand von K. Um solch ein Extrema zu bestimmen, teilen wir K in sein Inneres $\mathcal{X}$ und seinen Rand B auf. Danach gehen wir wie folgt vor:

$$\text{Bestimmen der kritischen Punkte von } \mathcal{X} \tag{1}$$
$$\text{Bestimmen der Minimas und Maximas von } f_{|B} \tag{2}$$

Beim überprüfen von X kann wie zuvor vorgegangen werden. Das Überprüfen des Randes ist ein Problem der Art $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ und kann mit Wissen aus Analysis I gelöst werden.

Testen von kritischen Punkten

Sei $f : \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $\mathcal{X}$ offen und $f \in C^2$. Sei x_0 ein nicht-degenerierter kritischer Punkt von f. So gilt

(1) Wenn $\text{Hess}_f(x_0)$ pos. def. so ist x_0 ein lokales Minimum
(2) Wenn $\text{Hess}_f(x_0)$ neg. def. so ist x_0 ein lokales Maximum
(3) Wenn $\text{Hess}_f(x_0)$ ist Indefinit so ist x_0 ein Sattelpunkt

Dies können wir nicht machen, falls x_0 ein degenerierter kritischer Punkt ist ($\det(\text{Hess}_f(x_0)) = 0$). In diesem Fall müssen wir einzeln Überprüfen.

Definit

Für symmetrische Matrizen haben wir folgende Definition:

(1) Positiv Definit: Alle Eigenwerte sind positiv
(2) Negativ Definit: Alle Eigenwerte sind negativ
(3) Indefinit: Positive und Negative Eigenwerte

Eigenwerte können mit dem charakteristischen Polynom gefunden werden:

$$\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) \Rightarrow ad - (a + d)\lambda + \lambda^2 - bc = 0$$

Für nicht symmetrische Matrizen, müssen wir testen, ob für jeden Vektor v gilt: $v^\top A v > 0$ (bzw. < 0).

Marlene Trick

Sei M eine symmetrische Matrix und A_k die $k \times k$ Blockmatrix der oberen, linken Ecke. Mit $\triangle_k$ bezeichnen wir die Determinante von A_k. Nun ist M pos. def. wenn $\triangle_k > 0$ für alle k, weiter ist M neg. def. wenn $(-1)^k \triangle_k > 0$ für alle k.
Für 2 Dimensionen haben wir

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - c \cdot b$$

Für 3 Dimensionen haben wir

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a \cdot \det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \cdot \det\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \cdot \det\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

Max / Min mit Nebenbedingungen

Wir wollen Minimas und Maximas einer Funktion $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$, mit einer Nebenbedingung $Y = \{x \in \mathcal{X} | g(x) = 0, g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}\}$ bestimmen. Dafür können wir die Methode der Lagrange-Multiplikatoren verwenden.

Sei $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ eine Funktion der Klasse C^1. Sei $Y = \{x \in \mathcal{X} | g(x) = 0\}$, nun ist $x_0 \in Y$ ein lokales Extrema der Nebenbedingung $f_{|Y}$, wenn

$$\exists \delta > 0,\ f(y) \leq (\geq) f(x_0), \quad \forall y \in B_\delta(x_0) \cap Y$$

Wenn $x_0 \in Y$ eine lokale Extremalstelle von $f_{|Y}$ ist, so ist entweder $\nabla g(x_0) = 0$ oder $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \nabla f(x_0) = \lambda \cdot \nabla g(x_0)$. Wobei λ der **Lagrange-Multiplikator** ist.

Integrale in $\mathbb{R}^n$

Dieser Abschnitt befasst sich mit verschiedenen Typen von Integralen. Diese Definitionen haben oft ihren Ursprung in der Physik, d.h. es gibt oft eine visuelle Intuition.
Für $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ ist das Integral definiert als:

$$\int_a^b f(t)dt = \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_n(t)dt \end{pmatrix}$$

Kurve

Eine **parametrisierte Kurve** in $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ wobei γ stückweise in C^1 ist, d.h. es existiert ein $k \geq 1$ und eine Partition $a = t_0 < \ldots < t_k = b$ so dass $\gamma_{|]t_{j-1}, t_j[}$ in C^1 ist für alle $1 \leq j \leq k$. Eine parametrisierte Kurve muss nicht injektiv sein.

Wegintegrale

Sei $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve und $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge, welche das Bild von γ beinhaltet. Weiter, sei $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Dann ist ein **Wegintegral** (auch Kurvenintegral genannt) definiert als:

$$\int_\gamma f(s)\ ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt$$

Wegintegrale haben die folgenden Eigenschaften

(1) Es ist unabhängig von orientierungserhaltenden reparametrisierungen, d.h. es hängt nur vom Bild der Kurve und nicht von der Parametrisierung ab.

$$\gamma : [a,\ b] \mapsto \mathbb{R}^n$$
$$\tilde{\gamma} : [c,\ d] \mapsto \mathbb{R}^n$$
$$\Phi : [c,\ d] \mapsto [a,\ b]$$
$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \Phi = \gamma(\Phi)$$
$$\Rightarrow \int_\gamma f(s)\ ds = \int_{\tilde{\gamma}} f(s)\ ds$$

(2) Sei $\gamma_1 + \gamma_2$ ein Pfad, geformt durch die Vereinigung zweier Kurven. Dann gilt

$$\gamma_1 + \gamma_2 := \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a,\, b] \\ \gamma_2(t) & t \in [b,\, d+b-c] \end{cases}$$

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(s)\; ds = \int_{\gamma_1} f(s)\; ds + \int_{\gamma_2} f(s)\; ds$$

(3) Sei $\gamma : [a,\, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ ein Pfad und $-\gamma$ ist der Pfad in Gegenrichtung, d.h. $(-\gamma)(t) := \gamma(a+b-t)$. So ist

$$\int_{-\gamma} f(s)\; ds = -\int_{\gamma} f(s)\; ds.$$

Potential

Ein differenzierbares skalares Feld $g : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ so dass $\nabla g = f,\ f : \mathcal{X} \mapsto R^n$ wir ein **Potential** von f genannt. Dies könne wir verwenden für:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f\; ds &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\; dt \\ &= \int_a^b \nabla g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\; dt \\ &= (g \circ \gamma)(b) - (g \circ \gamma)(a)\end{aligned}$$

Um das Potential einer Funktion zu finden, gibt es folgendes Schema. Da wir g suchen, so dass $\nabla g = f$, können wir folgendes Gleichungssystem konstruieren:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \partial_{x_1} g = f_1(x_1, ..., x_n) \Longleftrightarrow h := g(x_1, ..., x_n) = \int f_1(x_1, ..., x_n) dx_1 \\
&(2) \quad \partial_{x_2} g = f_2(x_1, ..., x_n) \Longrightarrow \partial_{x_2} h = f_2(x_1, ..., x_n) \\
&\qquad \vdots \\
&(n) \quad \partial_{x_n} g = f_n(x_1, ..., x_n) \Longrightarrow \partial_{x_n} h = f_n(x_1, ..., x_n)
\end{aligned}$$

Wenn wir f_1 integrieren, müssen wir eine Funktion z übernehmen, die nur von $x_2, ..., x_n$ abhängt. Mit den Bedingungen $(1), ..., (n-1)$ können wir die exakte Definition von z finden. Achtung: nicht jede Funktion besitzt ein Potential.

Konservative Vektorfelder

Sei $\mathcal{X}$ offen und $f : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

(1) Falls für irgendwelche $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ das Wegintegral $\int_\gamma f(s)\; ds$ unabhängig von der Kurve in $\mathcal{X}$ von x_1 nach x_2 ist, so ist das Vektorfeld f konservativ.

(2) Jedes Wegintegral in f entlang einer geschlossenen Kurve ist 0.

(3) Ein Potential für f existiert.

Wir haben zudem noch folgende nötige aber nicht ausreichende Bedingung, diese kann hilfreich sein, um zu zeigen, dass ein Vektorfeld nicht konservativ ist.

$$f \text{ ist konservativ} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

Wegzusammenhängend

Sei $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ offen. $\mathcal{X}$ ist wegzusammenhängend, falls für jedes Paar an Punkten $x, y \in \mathcal{X}$ ein C^1 Pfad $\gamma : (0,1] :\mapsto \mathcal{X}$ mit $\gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y$ existiert.

Rotation

(Dies wurde nicht direkt behandelt) Sei $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^3$ offen und $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}^3$ ein C^1 Vektorfeld. Dann ist die Rotation von f ein stetiges Vektorfeld auf X definiert durch:

$$\text{curl}(f) := \begin{pmatrix} \partial_y f_3 - \partial_z f_2 \\ \partial_z f_1 - \partial_x f_3 \\ \partial_x f_2 - \partial_y f_1 \end{pmatrix}$$

Sternförmig

Eine Teilmenge $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ wir sternförmig genannt, falls $\exists x_0 \in \mathcal{X}$ so dass $\forall x \in \mathcal{X}$ eine Linie x_0 nach x existiert, die komplett in $\mathcal{X}$ enthalten ist.

$$\text{Konvex} \quad \Rightarrow \quad \text{Sternförmig}$$

Weiter gilt, ist $\mathcal{X}$ eine sternförmige, offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f \in C^1$ ein Vektorfeld gilt:

$$\begin{aligned} \partial_j f_i = \partial_i f_j \quad \forall i,\, j \quad &\Rightarrow \quad f \text{ ist konservativ} \\ \text{curl}(f) = 0 \quad &\Rightarrow \quad f \text{ ist konservativ} \end{aligned}$$

Riemann Integral in $\mathbb{R}^n$

Eine Partition P eines abgeschlossenen Rechtecks $R = [a, b] \times [c, d]$, ist eine Menge von Rechtecken. Für jede Partition P_x : $a = x_0 < ... < x_n = b$ von $[a, b]$ und P_y (gleich definiert), erhalten wir eine Partition $P_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ von R, mit der Fläche $\mu(R_{i,j}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$.

Nun könne wir die Ober- und Untersumme einführen:

$$S(P_x \times P_y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sup_{x,y \in P_{i,j}} f(x, y) \cdot \mu(P_{i,j})$$

$$s(P_x \times P_y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \inf_{x,y \in P_{i,j}} f(x, y) \cdot \mu(P_{i,j})$$

Analog zum 1D Fall gilt, dass wenn wir einen neuen Punkt hinzufügen, wird $S(P_x \times P_y)$ kleiner werden und $s(P_x \times P_y)$ grösser. Sei $f : R \mapsto \mathbb{R}$ beschränkt. Nun ist f auf R integrierbar, falls $\sup_{(P_x, P_y)} s(P_x, P_y) = \inf_{(P_x, P_y)} S(P_x, P_y)$. Dieser gemeinsame Wert, ist definiert als:

$$\int_R f(x, y)\; d(x, y) \text{ oder } \int \int_R f(x, y)\; d(x, y)$$

Wir wollen dies nun auf eine (nicht quadratische) Fläche $A \subset R$ anwenden.

$f : A \subset R \mapsto \mathbb{R}$ ist auf A integrierbar, falls $f \cdot \mathcal{X}_A$ auf R integrierbar ist.

$$\int_R f(x, y) \cdot \mathcal{X}_A(x, y)\; d(x, y) \text{ oder } \int_A f(x, y)\; d(x, y)$$

$\mathcal{X}_A$ ist die charakteristische Funktion von A.

Sei $f, g : A \subset R \mapsto \mathbb{R}$ auf A integrierbar, dann gilt folgendes:

(1) $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g$ ist integrierbar und gleich

$$\int_A (\alpha f + \beta g)\; d(x, y) = \alpha \int_A f\; d(x, y) + \beta \int_A g\; d(x, y)$$

(2) Falls $f(x, y) \le g(x, y) \quad \forall (x, y) \in A$, dann gilt

$$\int_A f(x, y)\; d(x, y) \le \int_A g(x, y)\; d(x, y)$$

(3) Wenn $f(x, y) \ge 0$ und $B \subset A$ so gilt

$$\int_B f(x, y)\; d(x, y) \le \int_A f(x, y)\; d(x, y)$$

(4) $\triangle$-Ungleichung

$$\Big| \int_A f(x, y)\; d(x, y) \Big| \le \int_A |f(x, y)|\; d(x, y)$$

(5) Wenn $f = 1$ so gilt

$$\int_A f(x, y)\; d(x, y) = \int_A 1\; d(x, y) = \mu(A)$$

(**Satz von Stolz**) Sei $f : R \mapsto \mathbb{R}$ integrierbar auf $R = [a, b] \times [c, d]$. Weiter sei $y \mapsto f(x, y)$ integrierbar auf $[c, d]$ für jedes $x \in [a, b]$. Aus dem folgt:

$$\int_R f(x, y)\; d(x, y) = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)\; dy \Big)\; dx$$

Eine **Nullmenge** $X \subset R \subset \mathbb{R}^2$ ist eine Menge, so dass für alle $\epsilon > 0$, existiert eine endliche Menge an Rechtecken R_k, $1 \le k \le n$, so dass:

$$X \subset \bigcup_{k=1}^n R_k,\ \sum_{k=1}^n \mu(R_k) < \epsilon$$

Informal: Wir können die ganze Menge mit einer endlichen Menge an Rechtecken von beliebige kleiner Grösse überdecken.

Lipschitz Kurven sind Kurven welche eine maximale Steigunge M hat. Solche Kurven sind Nullmengen.

Weiter Integrationskriterien:

(1) Sei R ein kompaktes Rechteck und $f : R \mapsto \mathbb{R}$ ist stetig $\Rightarrow f$ ist integrierbar auf R. Dies folgt aus dem Fakt, dass wenn $f : K \subset R \mapsto \mathbb{R}$ stetig ist, so muss f gleichmässig stetig sein.

(2) Sei $f : R \mapsto \mathbb{R}$ beschränkt und X die Menge aller nicht stetigen Punkte von f, wenn X eine Nullmenge ist $\Rightarrow f$ ist integrierbar auf R.

(3) Sei $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ stetig mit $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x),\ \forall x \in [a, b]$. $A = \{(x, y) | a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$. Falls $f : A \mapsto \mathbb{R}$ stetig ist, so ist f auf A integrierbar und es folgt dass:

$$\int_A f(x, y)\; d(x, y) = \int_a^b \Big(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\; dy \Big)\; dx$$

Variabel Wechsel

Sei ∂A der Rand einer Menge A:

$$\begin{aligned}\partial A = \Big\{ &(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \forall \delta > 0, R =]x - \delta, x + \delta[\times]y - \delta, y + \delta[, \\ &A \cap R \neq \emptyset \text{ und } \mathbb{R}^2 \backslash A \cap R \neq \emptyset \Big\}\end{aligned}$$

Sei $\varphi : B \mapsto A$ eine stetige Abbildung, wobei $A = A_0 \cup \partial A$, $B = B_0 \cup \partial B$ kompakte Menge mit $A_0,\ B_0$ offen und $\partial A, \partial B$ Nullmengen sind. Angenommen $\varphi : B \backslash N \mapsto A$ ist injektiv, wobei $N \subset B$ die Nullmenge ist. Wenn $f : A \mapsto \mathbb{R}$ stetig ist, so folgt dass:

$$\int_A f(x, y)\; d(x, y) = \int_B f(\varphi(u, v)) \cdot |\text{det} J_\varphi(u, v)|\; d(u, v)$$

Oft verwenden wir dies um in Polar Koordinaten zu wechsel, damit wir einen Kreis berechnen können. Hierfür gilt:

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$
$$J_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$
$$|det(J_\varphi)| = r$$
$$dx\,dy = \; dr\,d\theta$$

Somit können wir $dx\,dy = r\;dr\;d\theta$ ersetzen, x, y ersetzen und die Integrationsgrenzen anpassen.

Satz von Green

Der Satz von Green ist eine verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der Analysis auf $\mathbb{R}^2$. Zur Erinnerung der Fundamentalsatz lautet:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\;dx$$

Wobei $F : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ eine C^1 Funktion ist. Der Satz von Green stellt nun eine Beziehung zwischen Linienintegralen und Doppelintegralen über einen von einer parametrisierten Kurve umschlossenen Bereich her.

Eine **paramterisierte Jordan Kurve** ist eine geschlossene, parametrisierte Kurve $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, wobei $\gamma :]a,b] \mapsto \mathbb{R}$ injektiv ist. Eine **Jordan Kurve** in $\mathbb{R}^2$ ist das Bild einer parametrisierten Jordan Kurve.

Seien b_1, b_2 die Basisvektoren von $\mathbb{R}^2$, so ist eine **Orientierung** positiv, genau dann wenn die Matrix $[b_1, b_2]$ eine positive Determinante hat, analoges gilt für negative Orientierung.

Ein **reguläres Gebiet** ist eine offene, beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ deren Rand ∂A endliche Vereinigungen von disjunkten Jordan Kurven ist (keine überkreuzungen!).

Eine parametrisierte Jordan Kurve γ die eine Randkomponente von A bildet, hat einen positiven Umlaufsinn, falls $(n(t), \gamma'(t))$ eine positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^2$ bildet. Wobei $n(t)$ der Einheitsvektor bezeichnet, der orthogonal zu $\gamma'(t)$ steht und von A weg zeigt.

Nun besagt der **Satz von Green** folgendes:

Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ ein reguläres Gebiet und $F : U \mapsto \mathbb{R}^2$ ein C^1 Vektorfeld, wobei $(A \cup \partial A) \subset U \subset \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\int_{\partial A} F(s)\;ds = \int\int_A \left(\partial_x f_2 - \partial_y f_1\right)\;dx\;dy$$

Explizit gilt:

$$\int_{\partial A} F(s)\;ds = \sum_{i=1}^{r} \int_{\gamma_i} F(s)\;ds$$

wobei $\gamma_1, ..., \gamma_r$ die im positiven Umlaufsinn parametrisierten Randkomponenten von A bezeichnen.

Beispiel: um den Flächeninhalt eines regulären Gebietes auszurechnen, können wir das Vektorfeld

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x \end{pmatrix} \text{ oder } F(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

verwenden (da $\partial_x f_2 - \partial_y f_1 = 1$).

Aus Analysis I

Rechnen mit Ableitungen

(1) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
(2) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + g'(x_0) \cdot f(x_0)$
(3) $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ für $g(x_0) \neq 0$
(4) $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$
(5) $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, wobei $y_0 = f(x_0)$ und $f'(x_0) \neq 0$
(6) $(a^{f(x)})' = ln(a) \cdot a^{f(x)} \cdot f`(x)$

Bem. Für gerade k gilt $\cosh(x)^{(k)} = \cosh(x)$ und für ungerade k gilt $\cosh(x)^{(k)} = \sinh(x)$, analoges gilt für sinh.

Partielle Integration

Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b (f(x) \cdot g'(x))dx = f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b (f'(x) \cdot g(x))dx$$

bzw. für unbestimmte Integrale:

$$\int (f(x) \cdot g'(x))dx = f(x) \cdot g(x) - \int (f'(x) \cdot g(x))dx$$

$\uparrow$ 1falls arc- oder log-Funktion vorkommt, $x^n, \frac{1}{1-x^2}, \frac{1}{1+x^2}, \ldots$

$\downarrow$ $x^n, \arcsin(x), \arccos(x), \arctan(x), \ldots$

"egal" $e^x, \sin(x), \cos(x), \sinh(x), \cosh(x), \ldots$

Substitution

Die Substitution ist die Umkehrung der Kettenregel. D.h. wir wollen Substitution vorallem verwenden, wenn wir innere Funktionen haben.

Sei $a < b$, $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $\phi([a,b]) \subseteq I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

$$\int_a^b f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx$$

bzw. für unbestimmte Integrale:

$$\int f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt = \int f(x)dx\Big|_{x=\phi(t)}$$

Bsp. $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx$ substitution mit $t = \sqrt{9-x^2}$:

$$\Rightarrow x = \sqrt{9-t^2} \Rightarrow x' = \frac{-2t}{2\sqrt{9-t^2}} \Rightarrow dx = \frac{-t \cdot dt}{\sqrt{9-t^2}}$$

$\int -dt = -t$ rücksubstitution $\Rightarrow -\sqrt{9-x^2}$

Sonstiges

Injektiv / Surjektiv

Gegeben eine Funktion $f : X \to Y$:

Injektiv: $\forall a, b \in X,\; f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$
Surjektiv: $\forall y \in Y,\; \exists x \in X,\; f(x) = y$

Sei $f : D \to E$ eine injektive Funktion und $g : E \to D$ eine surjektive Funktion, so ist die Verknüpfung $g \circ f$ bijektiv.

Injektivität zeigen: f injektive $\Leftrightarrow$ f streng monton $\Leftrightarrow$ $f' > 0$ oder $f' < 0$.

Surjektivität zeigen: Mit Zwischenwertsatz, sei der Bildbereich $]a, b[$

(1) $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$ zeigen
(2) Sei nun $y \in]a, b[$ beliebig. Wegen den Grenzwerten von f gilt: $\exists x_1 < x_2 : f(x_1) < y < f(x_2)$. Mit dem Zwischenwertsatz gilt dann: $\exists c \in [x_1, x_2] : f(c) = y$ und somit ist f surjektiv.

Nützliche Formeln

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2} \cdot a + \cdots + a^{n-2} \cdot b + a^{n-1})$$
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}; \quad \sqrt{a_k \cdot a_{k+1}} \leq \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$$

Exponentialfunktion / Logarithmus

Für die Exponentialfunktion gilt:

(1) $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$
(2) $\exp(x) > 1 \forall x > 0$
(3) $x^a = \exp(a \cdot \ln(x))$ und $x^0 = 1$
(4) $\exp(iz) = \cos(z) + i \cdot \sin(z)$
(5) $\exp(i \cdot \frac{\pi}{2}) = i$, $\exp(i\pi) = -1$ und $\exp(2i\pi) = 1$

Der natürliche Logarithmus $\ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ bildet die Umkehrfunktion zu exp und ist streng monoton wachsend und stetig. Für den natürliche Logarithmus gilt:

(1) $\ln(1) = 0$
(2) $\ln(e) = 1$
(3) $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$
(4) $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$
(5) $\ln(x^a) = a \cdot \ln(x)$
(6) $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$
(7) $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

Im Allgemeinen gilt $\log_b(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$.

Trigonometrischen Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen sind definiert als:

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$
$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Folgende weiter **Eigenschaften** ergeben sich aus dem Zusammenhang mit der Exponentialfunktion:

(1) $\cos(z) = \cos(-z)$ und $\sin(-z) = -\sin(z)$
(2) $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ und $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
(3) $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$
(4) $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$
(5) $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1$
(6) $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$
(7) $\cos(2z) = \cos(z)^2 - \sin(z)^2$
(8) $|\sin(x)| \leq x$.

Potenz der Winkelfunktion

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \quad \text{und} \quad \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

Ein paar **Funktionswerte**:

α	0	30°	45°	60°	90°	120°	150°	180°	270°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	N/A	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	N/A

	$-\alpha$	$90° -\alpha$	$90° +\alpha$	$180° -\alpha$	$180° +\alpha$	$k*360° -\alpha$	$k*360° +\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	cos	cos	sin	$-\sin$	$-\sin$	sin
cos	cos	sin	$-\sin$	$-\cos$	$-\cos$	cos	cos
tan	$-\tan$	cot	$-\cot$	$-\tan$	tan	$-\tan$	tan

Zusätzlich definieren wir noch:

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}, \quad \forall z \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}$$

$$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}, \quad \forall z \notin \pi \cdot \mathbb{Z}$$

Es gilt weiter:

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\sin(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}}$$

$$\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}}$$

Nullstellen:
$\cos = [\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in Z]$
$\sin = [k\pi : k \in Z]$

Arc Funktionen:
$\arcsin := [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;
$\arccos := [-1, 1] \to [0, \pi]$;
$\arctan := [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;

Die Kreiszahl π

Wir definieren π als erste Nullstelle > 0 der Sinusfunktion.

$$\pi := \inf\{t > 0 : \sin t = 0\}$$

Es gilt dann:

(1) $\sin(\pi) = 0$, $\pi \in]2, 4[$
(2) $\forall x \in]0, \pi[: \sin(x) > 0$
(3) $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$

Reduktionsformel

$$\int \cos^n(x)dx = \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)dx + \frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n}$$

$$\int \sin^n(x)dx = \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)dx - \frac{\cos(x)\sin^{n-1}(x)}{n}$$

Bogenlänge

Die Bogenlänge L einer Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ entspricht:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

(Un)gerade Funktionen

Eine reelle Funktion f ist gerade, wenn $f(-x) = f(x)$ und ungerade wenn $f(-x) = -f(x)$.e

Bekannte Taylorreihen

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \mathcal{O}(x^5)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7)$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8)$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8)$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^7)$$

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^5)$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$$

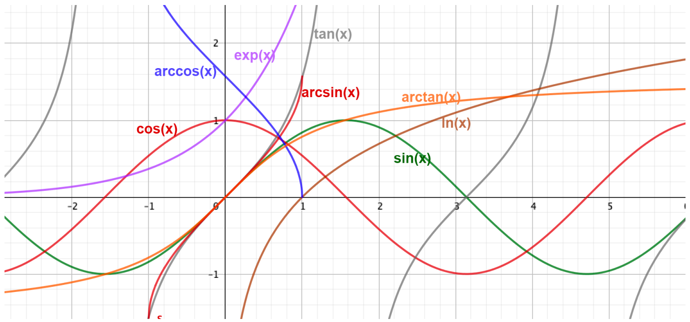
$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \mathcal{O}(x^4)$$

Typische Ableitungen und Stammfunktionen

$F(x)$	$F'(x) = f(x)$
c	0
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	x^a
$\frac{1}{a\cdot(n+1)}(ax + b)^{n+1}$	$(ax + b)^n$
$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$x^\alpha, \alpha \neq -1$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$
$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{x}$
$\frac{n}{n+1}x^{\frac{1}{n}+1}$	$\sqrt[n]{x}$
e^x	e^x
$\ln(\lvert x\rvert)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a \lvert x\rvert$	$\frac{1}{x\ln a} = \log_a(e)\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\cot(x)$	$\frac{1}{-\sin^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\frac{1}{f(x)}$	$\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$
a^{cx}	$a^{cx} \cdot c\ln a$
x^x	$x^x \cdot (1 + \ln x) \quad x>0$
$\frac{1}{a}\ln(ax + b)$	$\frac{1}{ax+b}$
$\frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}\ln\lvert cx + d\rvert$	$\frac{ax+b}{cx+d}$
$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$	$\frac{1}{x^2-a^2}$
$\frac{x}{2}f(x) + \frac{a^2}{2}\ln(x + f(x))$	$\sqrt{a^2 + x^2}$
$\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{\lvert a\rvert}$	$\sqrt{a^2 - x^2}$
$\frac{x}{2}f(x) - \frac{a^2}{2}\ln(x + f(x))$	$\sqrt{x^2 - a^2}$
$\ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$
$\arcsin\left(\frac{x}{\lvert a\rvert}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$
$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$	$\frac{1}{x^2+a^2}$

$F(x)$	$F'(x) = f(x)$
$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$
$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\tan(x)$
$\ln\lvert\sin(x)\rvert$	$\cot(x)$
$\ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right\rvert$	$\frac{1}{\sin(x)}$
$\ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	$\frac{1}{\cos(x)}$
$\frac{1}{2}(x-\sin(x)\cos(x))$	$\sin^2(x)$
$\frac{1}{2}(x+\sin(x)\cos(x))$	$\cos^2(x)$
$\tan(x)-x$	$\tan^2(x)$
$x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$
$x\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$
$x\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$	$\arctan(x)$
$\ln\lvert f(x)\rvert$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$x\cdot(\ln\lvert x\rvert-1)$	$\ln\lvert x\rvert$
$\frac{1}{b\ln a}a^{bx}$	a^{bx}
$\frac{cx-1}{c^2}\cdot e^{cx}$	$x\cdot e^{cx}$
$\frac{\sin^2(x)}{2}$	$\sin(x)\cos(x)$

Funktionen



Aufgaben

Multiple Choice

Welche der folgenden Aussagen ist korrekt für $f:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^m, g:\mathbb{R}^m\mapsto\mathbb{R}$ und $x\in\mathbb{R}^n$?

- ☐ f ist stetig in x, falls es eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}^n$ gibt, so dass $f(x_k)\to f(x)$ für $k\to\infty$.
- ☐ $f\circ g$ und $g\circ f$ sind immer definiert
- ☐ falls $g\circ f$ und f stetig sind, dann ist auch g stetig

---

Welche der folgenden Funktionen sind stetig?

- ☑ $f(x,y,z)=x^3+y^2+3z$
- ☐ $f(x,y)=\inf\{x^k+y^k\mid k\in\mathbb{Z}\}$, für $(x,y)\in\mathbb{R}^2_{\geq 0}$
- ☑ $f(x,y)=\inf\{x^k+y^k\mid k\in\mathbb{Z}\}$, für $0\leq x,y<1$
- ☑ $f(x,y)=\int_x^y\cos(t)dt$, für $x<y$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- ☐ sei pr:$\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$, $\mathrm{pr}(x,y):=x$ und $A\subseteq\mathbb{R}^2$ abgeschlossen, dann ist auch $\mathrm{pr}(A)$ abgeschlossen
- ☑ Falls $A\subseteq\mathbb{R}^n$ geschlossen ist, dann ist A^c offen
- ☐ Die Menge $O\subseteq R^n$ ist offen genau dann wenn O nicht abgeschlossen ist
- ☑ Sei $f:[0,1]^n\mapsto\mathbb{R}$ stetig, dann ist f beschränkt
- ☐ Sei $f:[-1,1]^n\backslash\{0\}\mapsto\mathbb{R}$ stetig, dann ist f beschränkt

---

Sei $X\subseteq\mathbb{R}^n$ offen und $f,g:X\mapsto\mathbb{R}^m$. Welche Aussagen sind korrekt?

- ☑ falls $f\in C^2$ auf X ist, dann ist f auch C^1 auf X
- ☐ falls f und g jeweils C^3 und C^2 auf X sind, dann ist $f\cdot g$ C^3 auf X
- ☑ Sei $f=(f_1,\dots,f_m)$, wobei f_i Polynome sind und g ist C^k, dann ist f/g C^k auf X
- ☑ Sei f C^k mit $k\in\mathbb{N}$, dann gilt im Allgemeinen $\partial_{xy}f=\partial_{yx}f$.

Sei $f:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$ eine C^k Abbildung mit $k\geq 2$. Welche Aussagen sind korrekt?

- ☐ der Gradient $\nabla f(x)$ ist eine $n\times n$ Matrix
- ☑ $H_f(x)$ ist eine quadratische Matrix
- ☑ $H_f(x)$ ist symmetrisch
- ☐ $H_f(x)$ ist invertierbar

Sei $f:X\mapsto\mathbb{R}, g:K\mapsto\mathbb{R}$ differenzierbar, $X\subseteq\mathbb{R}^n$ offen und $K\subseteq\mathbb{R}$ kompakt. Welche Aussagen sind korrekt?

- ☐ f besitzt eine Extremalstelle
- ☐ g besitzt keine Extremalstelle
- ☑ g besitzt mindestens zwei Extremalstellen
- ☐ die Stelle x_0 ist eine lokale Minimalstelle genau dann wenn für jedes $\delta>0$ mit $C(x_0,\delta)\subseteq X$ gilt: $f(y)\leq f(x_0),\forall y\in C(x_0,\delta)$
- ☐ falls $df(x_0)=0$ gilt, ist $f(x_0)$ entweder ein lokales Minimum oder Maximum
- ☐ die Menge der kritischen Punkte von f ist immer endlich

Sei $f:X\mapsto\mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld und $\gamma:[a,b]\mapsto\mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Welche Aussagen sind korrekt?

- ☑ das Wegintegral $\int_\gamma f(s)ds$ ist eine reelle Zahl
- ☑ falls $\gamma(t)\equiv v$ für alle $t\in[a,b]$, dann gilt $\int_\gamma f(s)ds=0$
- ☑ für $\omega(t):=\gamma(-t)$ gilt $\int_\omega f(s)ds=-\int_\gamma f(s)ds$
- ☐ falls $f=\nabla g$, dann gilt $\int_\gamma f(s)ds=0$
- ☑ sei $a=0,b=1$ und $\omega(t)=\gamma(2t),t\in[0,1/2);\gamma(1),t\in[1/2,1]$ dann gilt $\int_\omega f(s)ds=\int_\gamma f(s)ds$

Sei $X\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $f:X\mapsto\mathbb{R}^n$ ein C^1 Funktion, $\gamma:[a,b]\mapsto X$ ein parametrisierter Weg. Welche Aussagen sind korrekt?

- ☑ falls $g:X\mapsto\mathbb{R}$ ein Potential von f ist, dann ist für jede Konstante $C\in\mathbb{R}$ $h:=g+X$ auch ein Potential von f
- ☑ das Vektorfeld f ist genau dann konservativ, wenn f ein Potential g besitzt
- ☐ falls X sternförmig ist, ist f konservativ
- ☐ falls für alle $i,j\in\{1,\dots,n\}$ die Gleichung $\partial_{x_j}f_i=\partial_{x_i}f_j$ gilt, dann ist f konservativ
- ☐ seien $A_1,\dots,A_m\subseteq X$ offen mit $U_{k=1}^m A_k=X$. Falls $f_{|A_k}$ für alle k konservativ ist, dann ist f konservativ

---

Seien $A,B\subseteq\mathbb{R}^2$ zwei Mengen und $\mathcal{X}_A,\mathcal{X}_B:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ die dazugehörigen Charakteristischen Funktionen. Welche Aussagen sind korrekt?

- ☑ $\mathcal{X}_{A\cap B}=\mathcal{X}_A\cdot\mathcal{X}_B$
- ☐ $\mathcal{X}_{A\cup B}=\mathcal{X}_A+\mathcal{X}_B$
- ☑ $\mathcal{X}_{A\backslash B}=\mathcal{X}_A-\mathcal{X}_B$ falls $B\subseteq A$
- ☐ $\mathcal{X}_A\leq\mathcal{X}_B$ falls $B\subseteq A$
- ☑ $X_{A\cup B}=\mathcal{X}_A+\mathcal{X}_B-\mathcal{X}_A\cdot\mathcal{X}_B$

Sei $\mathbb{R}=[a,b]\times[c,d]\subseteq\mathbb{R}^2, B\subseteq A\subseteq R$ und $f:R\mapsto\mathbb{R}$ beschränkt. Welche Aussagen sind korrekt?

- ☑ die Funktion $g(x,y)=e^x$ auf R ist integrierbar
- ☑ falls f positiv und integrierbar auf A ist, dann gilt $\int_A f(x,y)d(x,y)\geq 0$
- ☐ falls f auf B und A integrierbar ist, dann $\int_B f(x,y)d(x,y)\leq\int_A f(x,y)d(x,y)$
- ☑ es gilt $\int_R\mathcal{X}_{A\backslash B}(x,y)d(x,y)=\int_A d(x,y)-\int_B d(x,y)$

Sei $\varphi:D\mapsto\mathbb{R}^2$. Welche Aussagen sind korrekt?

- ☑ für $D=[-2,2]$ und φ Lipschitz, ist Bild $\varphi[0,1]$ eine Nullmenge
- ☐ die Menge $\{(x,e^x)\mid x\in[0,1]\}\subseteq[0,1]^2$ ist keine Nullmenge
- ☑ Seien $\phi:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}=D$ und φ stetig, dann ist die Verkettung $\varphi\circ\phi$ integrierbar auf $[-1,1]^2$

Welche Aussagen sind korrekt?

- ☐ $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\pi/2$
- ☐ der Satz von Green besagt $\int\int_A F(s)ds=\int_{\partial A}(\partial_x f_2-\partial_y f_1)d(x,y)$
- ☐ die Jacobi Matrix der Abbildung $\Phi(a,b)=(a^2,ab)^\top$ ist für alle $a,b\in\mathbb{R}$ invertierbar
- ☑ die Vektoren $v_1=(0,1)^\top$ und $v_2=(1,0)^\top$ definieren keine positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^2$

Sei $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$. Die Aussagen $\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}f(x,y)$ ist gleich bedeutend mit:

- ☑ $\forall\delta>0,\exists\epsilon>0$, so dass $\lvert\lvert(x,y)\rvert\rvert<\epsilon\Rightarrow\lvert f(x,y)\rvert<\delta$
- ☐ $\forall\delta>0,\epsilon>0$, so dass $\lvert f(x,y)\rvert<\epsilon\Rightarrow\lvert\lvert(x,y)\rvert\rvert<\delta$
- ☐ $\lim_{x\to 0}f(x,0)=\lim_{y\to 0}f(0,y)$

Es existiert eine reellwertige Funktion f C^2, so dass $f'' + 27f' - \pi f = e^{x^2 - x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. **Wahr**

Es gibt eine eindeutige Lösung f für das ODE: $y'' + (x^2+1)y' + y = 0$, $(-1) = -1$. **Falsch**

Für eine stetige Funktion f gilt: $\int_{[0,2]\times[0,3]} f(x,y)d(x,y) = 6\int_0^1\int_0^1 f(2x,3y)dxdy$. **Wahr**

Wenn f_1, f_2 Lösungen der ODE $y'' - xy' + y = \cos(x)$ sind, dann ist auch $f_1 + 2\cdot f_2$ eine Lösung. **Falsch**

Wenn f C^2 maximal am Punkt (x_0, y_0) ist, dann gilt $\partial^2_{x^2} f = 0$. **Falsch**

Sei f ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ und $\int_\gamma f(s)ds = 0$ für alle geschlossenen Kurven γ, dann ist f konservativ. **Wahr**

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, (x,y) \mapsto |xy|$ ist differenzierbar im Punkt (0,0). **Wahr**

Sonstige Aufgaben

Aufgabe Seien $f_1, \ldots, f_d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ definiert als

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_d(x)).$$

a) Zeige, dass falls ein $i \in \{1, \ldots, d\}$ existiert, so dass f_i injektiv ist, dann folgt dass f injektiv ist.
Betrachten wir zwei Punkte $x \neq y$ in $\mathbb{R}$ mit f_i injektiv. Dann gilt aber

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_i(x), \ldots, f_d(x)) \neq (f_1(y), \ldots, f_i(y), \ldots, f_d(y)),$$

da $f_i(x) \neq f_i(y)$. Dies beweist, dass f injektiv ist.

b) Sei $d \geq 2$. Finde ein Beispiel, für welches sämtliche f_i surjektiv sind, aber f nicht surjektiv ist.
Wählen $f_1(x) = \cdots = f_d(x) = x$. Dann sind alle f_i surjektiv, aber f nicht: das Bild von f ist gegeben durch

$$\{(x, \ldots, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^d,$$

somit ist z.Bsp. $(1, 2, 3, \ldots, d) \in \mathbb{R}^d$ nicht im Bild von f.

Aufgabe Bestimme eine spezielle Lösung der Gleichung:

$$y'' + 2\lambda y' + \omega^2 y = \cos(\sigma t),$$

wobei $\omega > \lambda > 0$ und $\sigma \neq \omega$.

Das DGL hier ist inhomogen. Wir gehen also mit der Methode der "Variation der Koeffizienten" vor. Dazu müssen wir eine Basis der Lösungsmenge der homogenen Gleichung

$$y'' + 2\lambda y' + \omega^2 y = 0$$

finden. Mithilfe des Charakteristische Polynoms erhalten wir die Nullstellen $-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$, aber $\omega > \lambda$, also sind die Nullstellen komplex und gleich

$$\alpha_1 = -\lambda + i\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}, \quad \alpha_2 = -\lambda - i\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}.$$

Der Lösungsraum der homogenen Gleichung wird aufgespannt durch komplexe Linearkombinationen der Funktionen

$$f_1(t) := e^{\alpha_1 t}, f_2(t) = e^{\alpha_2 t}.$$

Die Methode der Variation der Konstanten liefert in diesem Fall eine allgemeine Lösung der Form

$$f(t) = \int_{t_0}^t -\frac{f_2(s)\cos(\sigma s)}{W(s)}ds \cdot f_1(t) + \int_{t_0}^t \frac{f_1(s)\cos(\sigma s)}{W(s)}ds \cdot f_2(t)$$

wobei

$$W(s) := f_1(s)f_2'(s) - f_2(s)f_1'(s) = 2i\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}e^{-2\lambda t} \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Wir massieren die beiden Integranden

$$-\frac{f_2(s)\cos(\sigma s)}{W(s)} = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}e^{-\alpha_1 s}\cos(\sigma s)$$

$$\frac{f_1(s)\cos(\sigma s)}{W(s)} = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}e^{-\alpha_2 s}\cos(\sigma s).$$

Somit, erhalten wir für $t_0 = 0$:

$$f(t) = \frac{f_1(t)}{\alpha_1 - \alpha_2}\int_0^t e^{-\alpha_1 s}\cos(\sigma s)ds + \frac{f_2(t)}{\alpha_2 - \alpha_1}\int_0^t e^{-\alpha_2 s}\cos(\sigma s)ds$$

Man kann überprüfen, dass

$$\int_0^t e^{-\alpha_i s}\cos(\sigma s)ds = \frac{e^{-\alpha_i t}\cdot(\sigma\sin(\sigma t) - \alpha_i\cos(\sigma t))}{\alpha_i^2 + \sigma^2} + \frac{\alpha_i}{\alpha_i^2 + \sigma^2}$$

Was folgende Lösung ergibt:

$$f(t) = \frac{(\sigma\sin(\sigma t) - \alpha_1\cos(\sigma t) + \alpha_1 f_1(t))}{(\alpha_1 - \alpha_2)\left(\alpha_1^2 + \sigma^2\right)} + \frac{(\sigma\sin(\sigma t) - \alpha_2\cos(\sigma t) + \alpha_1 f_1(t))}{(\alpha_2 - \alpha_1)\left(\alpha_2^2 + \sigma^2\right)}$$

An dieser Stelle könnte man die expliziten α_i von oben Einsetzen.

Aufgabe Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert wie folgt:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Zeige, dass f stetig ist.

Für $(x,y) \neq 0$ ist $f(x,y)$ eine Verkettung stetiger Funktionen und somit stetig. Es bleibt also zu zeigen, dass f bei $(0,0)$ stetig ist. Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ mit $\|(x,y) - (0,0)\| = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, wobei $\delta > 0$ in Kürze gewählt wird. Man beobachte, dass

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)| = |xy| \cdot \frac{|x^2 - y^2|}{x^2 + y^2} \leq |xy|\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |xy|.$$

Aber $0 \leq x^2, y^2 < \delta$ und somit gilt $|xy| < \delta$. Wenn wir also ein beliebiges $\varepsilon > 0$ wählen und dann $\delta = \varepsilon$ setzten, dann haben wir gezeigt, dass

$$\|(x,y) - (0,0)\| < \delta \Longrightarrow |f(x,y) - f(0,0)| \leq |xy| < \varepsilon$$

was Stetigkeit von f bei $(0,0)$ beweist.

Aufgabe Seien $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und y in $\mathbb{R}^n$:

$$x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \ldots, x_{k,n}) \in \mathbb{R}^n, \quad y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Zeige folgende Äquivalenz:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = y \Longleftrightarrow \forall 1 \leq j \leq n : \lim_{k\to\infty} x_{k,j} = y_j$$

Wir arbeiten mit der Definition und zeigen die "$\Rightarrow$" Richtung: Es gilt $\lim_{k\to\infty} x_k = y$ genau dann wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt so dass $\|x_k - y\| < \varepsilon, \forall k \geq N(\varepsilon)$, gilt. Wenn wir die Definition der Norm ausschreiben

$$\|x_k - y\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_{k,j} - y_j|^2} < \varepsilon,$$

sehen wir, dass für alle $j = 1, \ldots, n$ gilt $|x_{k,j} - y_j|^2 < \varepsilon^2$, insbesondere:

$$\forall j = 1, \ldots, n, \forall k \geq N(\varepsilon) : |x_{k,j} - y_j| < \varepsilon.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $\delta_i > 0$, so dass

$$\|x-u\| < \delta_1, \|y-v\| < \delta_2 \Rightarrow \|f_1(x) - f_1(u)\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } \|f_2(y) - f_2(v)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definiere $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$. Falls wir dann (x,y) und (u,v) betrachten mit $\|(x,y) - (u,v)\| < \delta/2$, erhalten wir $\|x-u\| < \delta_1$ und $\|y-v\| < \delta_2$ von der ersten Rechnung oben, und somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}\|f(x,y) - f(u,v)\|^2 &= \|(f_1(x), f_2(y)) - (f_1(u), f_2(v))\|^2 \\ &\leq (\underbrace{\|f_1(x) - f_1(u)\|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{\|f_2(y) - f_2(v)\|}_{\varepsilon/2})^2 \\ &< \varepsilon^2.\end{aligned}$$

Wurzelziehen liefert die gewünschte Ungleichung und beweist, dass das kartesische Produkt $f = (f_1, f_2)$ stetig ist. Dies zeigt, dass die reellen Folgen $(x_{k,j})_{k\in\mathbb{N}}$ alle gegen y_j in $\mathbb{R}$ konvergieren. Die andere Richtung erhält man indem das obige Argument rückwärts liest.

Aufgabe Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeige, dass f in $(0,0)$ nicht differenzierbar ist.
Beweis: Wir nehmen per Widerspruch an, dass f bei $(0,0)$ differenzierbar ist. Insbesondere kann $df(0,0)$ als Jacobi-Matrix mit Einträgen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

aufgefasst werden. Da $f(x,0) = 0$ und $f(0,y) = 0$ gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$, haben wir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

insbesondere $df(0,0) = (0,0)$. Differenzierbarkeit bei $(0,0)$ bedeutet aber auch, dass der Grenzwert

$$\lim_{(v,w)\to(0,0)} \frac{f(v,w) - f(0,0) - df(0,0)(v,w)^\top}{\|(v,w)\|}$$

existiert. Aber $df(0,0)$ ist die Nullabbildung, also erhalten wir

$$\lim_{(v,w)\to(0,0)} \frac{f(v,w) - 0}{\sqrt{v^2+w^2}} = \lim_{(v,w)\to(0,0)} \frac{vw}{v^2+w^2}$$

Aber durch einsetzen von $(v,0)$ und (v,w) ist leicht zu erkennen, dass dieser Grenzwert nicht existiert - Widerspruch zur Differenzierbarkeit von f bei $(0,0)$.

Aufgabe Bestimme die Maxima und Minima der Funktion

$$f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto xy\left(1 - x^2 - y^2\right)$$

Wir bestimmen die kritischen Punkte von f und untersuchen das Randverhalten. Beobachte:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y - 3x^2y - y^3 \\ x - x^3 - 3xy^2 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen die kritischen Punkte im inneren des Definitionbereiches, i.e. $(x,y) \in (0,1)^2$ mit $\nabla f(x,y) = 0$. Das ist äquivalent zum folgendem Gleichungssystem, da $x, y \neq 0$, ist das obige Gleichungssystem äquivalent zu

$$\begin{cases} 1 - 3x^2 - y^2 &= 0 \\ 1 - 3y^2 - x^2 &= 0 \end{cases}$$

Wir erhalten mit der ersten Gleichung $y=\sqrt{1-3x^2}$ (keine Negative Lösung, da $y>0$). Einsetzen in die zweite Gleichung liefert

$$0=1-3\left(1-3x^2\right)-x^2 \Longleftrightarrow 8x^2-2=0 \Longleftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}.$$

Wie bei y, kommt nur $x>0$ in Frage, also $x=\frac{1}{2}$. Dann gilt

$$y=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$$

Somit ist der einzige kritische Punkt von f auf $(0,1)^2$ gegeben durch

$$(x_0,y_0)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Betrachte nun den Rand des Einheitswürfel $[0,1]^2$. Für die zwei Kanten K_1,K_2, die auf der x - und y-Achse liegen, erhalten wir $f|_{K_1}=f|_{K_2}=0$. Da f im inneren auch negative Werte annimmt (z.B. bei $(2/3,2/3)$) befinden sich keine Extremalstellen auf $K_1\cup K_2$. Sei nun K_3 die Kante mit $y=1$. Dann nimmt die Funktion f die Form : $[0,1]\to\mathbb{R}, x\mapsto -x^3$ an. Diese hat keine kritischen Punkte in $(0,1)$. Dieselbe Logik Funktioniert für die übriggebliebene Kante K_4 (mit Funktion $y\mapsto -y^3$). Da wir $K_1\cup K_2$ bereits ausgeschlossen haben, ist die einzige noch mögliche Extremalstelle $(1,1)$: Es gilt

$$f(1,1)=-1$$

und es ist einfach zu überprüfen, dass deshalb $(x_1,y_1):=(1,1)$ eine globale Minimalstelle von f ist. Wir schliessen also, dass (x_0,y_0) und (x_1,y_1) die Extremalstellen sind.

Aufgabe Zeige Aussage (3) von Satz 2.53 aus der Vorlesung.
Zu zeigen ist, dass für einen nicht-degenerieten kritischen Punkt x_0 von $f:U\to\mathbb{R}$ (f ist C^2 und $U\subseteq\mathbb{R}^n$ offen) gilt, $p\cdot q\neq 0$ impliziert, dass x_0 kein lokales Extremum von f ist, wobei p (resp. q) die Anzahl positiver (resp. negativer) Eigenwerte von $\mathrm{Hess}_f(x_0)$ ist. Da $p\cdot q\neq 0$, existieren zwei Eigenvektoren y_0 und y_1 von

$$A:=\mathrm{Hess}_f(x_0)$$

mit Eigenwerten $\lambda_0<0$ und $\lambda_1>0$. Man beobachte, dass für alle $\varepsilon>0$ folgendes gilt:

$$\begin{aligned}(\varepsilon\cdot y_i)^T A(\varepsilon\cdot y_i)&=\langle\varepsilon\cdot y_i, A(\varepsilon\cdot y_i)\rangle\\ &=\varepsilon^2\cdot\langle y_i, Ay_i\rangle=\varepsilon^2\langle y_i,\lambda_i\cdot y_i\rangle\\ &=\varepsilon^2\lambda_i\|y_i\|^2=\lambda_i\|\varepsilon\cdot y_i\|^2.\end{aligned}$$

Ähnlich zum Beweis von (1) von Satz 2.53, verwenden wir die Taylorentwicklung von f:

$$\begin{aligned}f(x_0+\varepsilon\cdot y_i)&=f(x_0)+\frac{1}{2}(\varepsilon\cdot y_i)^T Ay_i+E_2(x_0+\varepsilon\cdot y_i,x_0)\\ &=f(x_0)+\left(\frac{\lambda_i}{2}+\frac{E_2(x_0+\varepsilon\cdot y_i,x_0)}{\|\varepsilon\cdot y_i\|^2}\right)\cdot\|\varepsilon\cdot y_i\|^2.\end{aligned}$$

Wir wissen aus der Vorlesung, dass in beiden Fällen der Ausdruck

$$\frac{E_2(x_0+\varepsilon\cdot y_i,x_0)}{\|\varepsilon\cdot y_i\|^2}$$

beliebig nahe bei 0 liegt, für $\varepsilon>0$ genügend klein. Insbesondere, gilt für $\varepsilon>0$ genügend klein, dass

$$\left(\frac{\lambda_0}{2}+\frac{E_2(x_0+\varepsilon\cdot y_0,x_0)}{\|\varepsilon\cdot y_0\|^2}\right)<0,\left(\frac{\lambda_i}{2}+\frac{E_2(x_0+\varepsilon\cdot y_i,x_0)}{\|\varepsilon\cdot y_i\|^2}\right)>0$$

da $\lambda_0<0$ und $\lambda_1>0$. Insbesondere, gilt

$$f(x_0+\delta\cdot y_0)<f(x_0), f(x_0+\delta\cdot y_1)>f(x_0),\quad\forall\delta\in(0,\varepsilon].$$

Dies bedeutet, dass wir für jeden offenen Ball B um x_0 zwei Punkte $z_0=x_0+\delta y_0$ und $z_1=x_0+\delta y_1$ finden (für δ genügend klein), so dass

$$z_0,z_1\in B \text{ und } f(z_0)<f(x_0), f(z_1)>f(x_0).$$

Das heisst, dass x_0 weder ein lokales Maximum noch Minimum von f ist.

Aufgabe Seien $a>b>c>0$. Bestimme die Maxima und Minima der Funktion

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

mit Nebenbedingungen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1.$$

Interpretiere das Resultat geometrisch.

Wir verwenden die Methode der Lagrange Multiplikatoren aus der Vorlesung. Dazu verwenden wir, dass entweder $\nabla g(v)=0$ oder $\nabla f(v)-\lambda\nabla g(v)=0$ für ein $\lambda\in\mathbb{R}$. Wir berechnen

$$\nabla g(x,y,z)=2\cdot\begin{pmatrix}x/a^2\\ y/b^2\\ z/c^2\end{pmatrix}.$$

$(0,0,0)$ ist die einzige Nullstelle von ∇g, ist aber nicht auf Y. Andererseits haben wir

$$\nabla f(x,y,z)-\lambda\nabla g(x,y,z)=2\cdot\begin{pmatrix}x(1-\lambda/a^2)\\ y(1-\lambda/b^2)\\ z(1-\lambda/c^2)\end{pmatrix}\stackrel{!}{=}0.$$

Wir machen eine Fallunterscheidung und nehmen zuerst an, dass $x\neq 0$. Dann muss aber, $\lambda=a^2$ gelten. Da $a>b>c>0$, gilt die obige Gleichung nur wenn $y=0,z=0$. Um x zu bestimmen, verwenden wir $(x,y,z)=(x,0,0)\in Y$, das heisst

$$g(x,0,0)=x^2/a^2-1\stackrel{!}{=}0.$$

Die Vektoren

$$u^{\pm}:=(\pm a,0,0)$$

erfüllen also die obige Gleichung. Ganz Analog erhalten wir vier weitere Kandidaten für die kritische Punkte für die Fälle $y\neq 0$ und $z\neq 0$, nämlich

$$v^{\pm}=(0,\pm b,0), w^{\pm}=(0,0,\pm c).$$

Da Y Kompakt ist, muss unter diesen 6 Punkten mindestens ein globales Maximum und ein globales Minimum vorhanden sein. Wir haben $a>b>c$, woraus sich schnell schliessen lässt, dass $u^{\pm}$zwei globale Maxima und $w^{\pm}$zwei globale Minima von f auf Y sind. Nun behaupten wir, dass $v^{\pm}$keine Extrema von f auf Y definieren. Aufgrund der Symmetrie, reicht es den Fall $v=v^{+}$zu betrachten.

Aufgabe Sei

$$f:\mathbb{R}^2\backslash\{0\}\to\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{-y}{x^2+y^2}\\ \frac{x}{x^2+y^2}\end{pmatrix}$$

Seien

$$\begin{aligned}Y&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x>0\right\}\\ Z&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y>0\right\}\\ U&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x<0\right\}\\ T&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y<0\right\}\end{aligned}$$

Berechne Potentiale g_Y,g_Z,g_U,g_T, so dass zudem

$$g_Z|_{Z\cap Y}=g_Y|_{Z\cap Y}, g_U|_{U\cap Z}=g_Z|_{U\cap Z}, g_T|_{T\cap U}=g_U|_{T\cap U}.$$

Danach, berechne g_T-g_Y auf $T\bigcap Y$. Erkläre die Relation zum Wegintegral

$$\int_\gamma f(s)ds,$$

wobei γ den Einheitskreis mit Zentrum $(0,0)$ bezeichnet.

Zur Erinnerung: für $t>0$ gilt die Relation

$$\arctan(-1/t)=\arctan(t)-\pi/2,$$

und für $g_Y:Y\to\mathbb{R}^2,(x,y)\mapsto\arctan(y/x)$,
$\bar{g}_Z:Z\to\mathbb{R}^2,(x,y)\mapsto\arctan(-x/y)$ erhalten wir

$$\nabla g_Y(x,y)=f(x,y),\ \nabla\bar{g}_Z(x,y)=f(x,y),$$

wobei hier (x,y) im jeweiligen Definitionsbereich von g_Y bzw. g_Z liegt, und

$$\bar{g}_Z(x,y)-g_Y(x,y)=-\pi/2,\quad\forall(x,y)\in Y\cap Z.$$

Für

$$g_Z:=\bar{g}_Z+\pi/2$$

erhalten wir die gewünschte Gleichung und es lässt sich ein Potential g auf $Z\cup Y$ definieren. Jetzt definieren wir

$$\bar{g}_U:U\to\mathbb{R},(x,y)\mapsto\arctan(y/x).$$

Ähnlich wie oben gilt auf $U\cap Z$ (weil $y>0,x<0$):

$$\bar{g}_U(x,y)=\arctan(y/x)=g_Z(x,y)-\pi.$$

Wir definieren also

$$g_U:=\bar{g}_U+\pi$$

und erhalten damit die zweite gewünschte Gleichung. Damit lässt auch das Potential $g:Z\cup Y\to\mathbb{R}$ auf $U\cup Z\cup Y$ erweitern. Nun setzen wir

$$\bar{g}_T:T\to\mathbb{R},(x,y)\mapsto\arctan(-x/y),$$

und erhalten ähnlich wie oben für $(x,y)\in T\cap U$ (weil $y<0$ und $x<0$):

$$\bar{g}_T(x,y)=\arctan(-x/y)=g_U(x,y)-\frac{3\pi}{2}.$$

Wir wählen also

$$g_T:=\bar{g}_T+\frac{3\pi}{2}.$$

Für $(x,y)\in T\cap Y$ (weil $x>0$ und $y<0$) folgt mit einem analogen Argument:

$$g_T(x,y)-g_y(x,y)=\arctan(-x/y)+\frac{3\pi}{2}-\arctan(y/x)=2\pi.$$

Wir können nun g_Y nicht umdefinieren, ohne die vorherigen Gleichungen zu verletzen. Dies bedeutet, dass wir mit dieser Methode kein globales Potential finden. Dies lässt sich auch durch die Berechnung des gewünschten Wegintegrales feststellen: Die Kurve γ kann beschrieben werden durch

$$\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2,\quad\gamma(t)=(\cos(t),\sin(t))$$

$$\int_\gamma f(s)ds=\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}dt=\int_0^{2\pi}dt=2\pi$$

Dies stimmt genau mit dem Wert $g_T-g_Y=2\pi$ überein.

Aufgabe Sei $f : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (x,y) = \left(\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2l-1}{2^n}\right) \text{ für } k,l \in \mathbb{N} \text{ und } n \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeige, anhand von Ober- und Untersummen, dass f nicht integrierbar ist.

Seien P_x, P_y Partitionen von $[0,1]$. Es gibt ein N (abhängig von den Partitionen), so dass es für jedes Rechteck I_{ij} natürliche Zahlen k, l gibt, so dass

$$\left(\frac{2k-1}{2^N}, \frac{2l-1}{2^N}\right) \in I_{ij}.$$

Dies kann man wie folgt einsehen: an den Mittelpunkten der Quadrate

$$C^N_{k,l} := \left[\frac{2(k-1)}{2^N}, \frac{2k}{2^{N-1}}\right] \times \left[\frac{2(l-1)}{2^N}, \frac{2l}{2^{N-1}}\right], \quad k,l \in \mathbb{N}.$$

ist f per Definition gleich 1 . Diese Quadrate haben Fläche $2^{-(N+1)}$ und decken das ganze Quadrat $[0,1]^2$ ab. Deshalb enthält jedes Rechteck I_{ij}, für N gross genug, eins dieser $C^N_{k,l}$ Quadrate. Dies beweist also, dass für jeder Partition (P_x, P_y) die Obersumme $S(P_x,P_y)$ von unten mit 1 beschränkt ist.

Für die Untersumme $s(P_x,P_y)$ beobachten wir, dass f auf $A := ([0,1]\cap\mathbb{Q})\times([0,1]\cap\mathbb{Q})$ gleich 0 und dass A dicht in $[0,1]^2$ liegt. Da jedes Quadrat I_{ij} das offene Quadrat $(x_{i-1},x_i)\times(y_{j-1},y_j)$ enthält, hat A nichtrivialen Schnitt mit I_{ij} für alle Paare (i,j). Also gilt

$$s(P_x,P_y) = 0.$$

Zusammengefasst haben wir:

$$\sup_{(P_x,P_y)} s(P_x,P_y) = 0 < 1 = \sup_{(P_x,P_y)} S(P_x,P_y).$$

Das bedeutet, dass f nicht integrierbar ist.

b) Zeige, dass für alle $x \in [0,1]$ die Funktion $y \mapsto f(x,y)$ integrierbar ist mit

$$\int_0^1 f(x,y)dy = 0$$

und somit $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)dx = 0$.

Die Menge aller Zahlen in $[0,1]$, die als $\frac{2l-1}{2^n}$ geschrieben werden können ist ist $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ enthalten. Somit erhalten wir, unabhängig vom fixierten x :

$$0 \le f(x,\cdot) \le \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}.$$

Insbesondere gilt

$$\int_0^1 f(x,y)dy \le \int_0^1 \chi_{\mathbb{Q}} dy \le 0,$$

wobei wir im letzten Schritt ein Resultat aus Analysis I verwendet haben.

Aufgabe Berechne folgendes Integrale mittels Polarkoordinaten:

$$\int_0^{2a}\left[\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}\left(x^2+y^2\right)dy\right]dx$$

Der Integrationsbereich entspricht der halbe, obere Kreisscheibe mit Radius a um $(a,0)$:

$$\begin{aligned} 0 \le y \le \sqrt{2ax-x^2} &\Longrightarrow y^2 \le 2ax - x^2 \\ &\Longleftrightarrow y^2 + x^2 - 2ax + \left(a^2 - a^2\right) \le 0 \\ &\Longleftrightarrow (x-a)^2 + y^2 \le a^2. \end{aligned}$$

Bevor wir Polarkoordinaten verwenden, zentrieren wir die Scheibe im Ursprung mit dem Koordinatenwechsel:

$$\Psi(u,v) = \begin{pmatrix} x-a \\ y \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$\int_{-a}^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-u^2}}\left((u+a)^2+v^2\right)dvdu$$

Jetzt machen wir den Wechsel auf Polarkoordinaten. Der Integrationsbereich wird dann $0 \le r \le a$ und $0 \le \theta \le \pi$.

$$\int_0^{\pi}\int_0^{a}(r\cos(\theta)+a)^2 + r^2\sin(\theta)^2 r dr d\theta = \frac{3}{4}a^4\pi$$

Aufgabe Seit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ glatt mit $\nabla f(-\sqrt{3}/2, 3/2) = (6,2)$. Berechne $\partial_r f(\sqrt{3}, 2\pi/3)$, wobei $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$ die Polarkoordinaten sind.

Wir haben $g(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, somit ergibt sich mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned} \partial_r f = \partial_r f(g(r,\theta)) &= \partial_x f \partial_r g + \partial_y f \partial_r g \\ &= \cos(\theta)\partial_x f + \sin(\theta)\partial_y f \\ &= \cos(2\pi/3)\cdot 6 + \sin(2\pi/3)\cdot 2 \end{aligned}$$

Aufgabe Finde alle reellen Lösungen der ODE $y'' - 6y' + 13y = (3x+2)e^x$.

Wir lösen zuerst die homogenen ODE. Char. Polynom $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = (\lambda - (3+2i))(\lambda - (3-2i))$, ist die Lösung der homogenen Gleichung:

$$y(x) = \lambda_1 e^{3x}\cos(2x) + \lambda_2 e^{3x}\sin(2x)$$

Sei nun $y_0(x) = (ax+b)e^x$ eine Partikulärlösung. Wir rechnen nun

$$y_0'' - 6y_0' + 13y_0 = (8ax - 4a + 8b)e^x = (3x+2)e^x.$$

Lösen wir dieses System, erhalten wir für $a = 3/8$ und $b = 7/16$. Somit haben wir die reelle Lösung:

$$y(x) = \lambda_1 e^{3x}\cos(2x) + \lambda_2 e^{3x}\sin(2x) + (3x/8 + 7/16)e^x$$

Aufgabe Finde die Lösung y der ODE $y'' + y' - 6y = x$, so dass $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$.

Die homogene Lösung ergibt $y(x) = \lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^{-3x}$. Nun suchen wir die Partikulärlösung der Form $y_0(x) = ax + b$.

$$y_0'' + y_0' - 6y = -6ax + a - 6b = x$$

Lösen wir dieses System, erhalten wir für $a = -1/6$ und $b = -1/68$. Somit haben wir die reelle Lösung:

$$y(x) = \lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^{-3x} - \frac{x}{6} - \frac{1}{36}$$

Mit den zwei Bedingungen erhalten wir nun $y(0) = \lambda_1 + \lambda_2 - 1/36$ und $y'(0) = 2\lambda_1 - 3\lambda_2 - 1/6$. Lösen wir nach den Unbekannten, erhalten wir die Lösung:

$$y(x) = \frac{13}{20}e^{2x} + \frac{17}{45}e^{-3x} - \frac{x}{6} - \frac{1}{36}$$

Aufgabe Bestimme die Maximas und Minimas des Vektorfeldes $f(x,y)n = x^2 + y^2 - xy$, auf dem Bereich der auf der oberen Halbebene einem Kreis mit Radius 2 entspricht und auf der unteren Halbebene einem Rechteck mit Eckpunkten $(2,0), (2,-2), (-2,-2), (-2,0)$.

Zuerst bestimmen wir die kritischen Punkte von f:

$$0 = \partial_x f(x,y) = 2x - y, \quad 0 = \partial_y f = 2y - x$$

Was $(0,0)$ entspricht. Damit ist dies der einzige kritische Punkt von f und wir haben $f(0,0) = 0$. Weiter bemerken wir, dass $f(-2,-2) = 4, f(2,-2) = 12, f(2,0) = 4, f(-2,0) = 4$. Eine Parametrisierung $\gamma : [0,\pi] \mapsto \mathbb{R}^2$ des Halbkreises ist gegeben durch $\gamma(t) = (2\cos(t), 2\sin(t))$.

$$0 = \partial_t f(\gamma(t)) \Rightarrow \cos(t) = \pm 1/\sqrt{2} \text{ und } \sin(t) = 1/\sqrt{2}$$

Da wir nur an den Positiven y-Werten interessiert sind, erhalten wir $f(-2/\sqrt{2}, 2/\sqrt{2}) = 6$ und $f(2/\sqrt{2}, 2/\sqrt{2}) = 2$. Nun müssen wir noch die Seiten des Rechteckes überprüfen. Wir erhalten dabei $f(-2,-1) = 3$ und $f(-1,-2) = 3$ als einzige Extremalstellen.

Wir können nun folgern, dass $(2,-2)$ eine Maximalstelle und $(0,0)$ eine Minimalstelle ist.

Aufgabe Berechne das Doppelintegral $\int\int_A \frac{\log\left(\sqrt{(x^2+y^2)}\right)}{x^2+y^2}dxdy$, wobei $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$.

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi}\int_1^2 r\cdot\frac{\log\left(\sqrt{r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)}\right)}{r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)}dr\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 \frac{\log(r)}{r}dr\ d\theta \\ &\overset{\text{integration by subst.}}{=} \int_0^{2\pi}\left[\frac{\log^2(r)}{2}\right]_1^2 d\theta \qquad \left(u = \log(r) \text{ and } du = \frac{1}{r}dr\right) \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{\log^2(2)}{2}d\theta = \pi\cdot\log^2(2) \end{aligned}$$

Aufgabe Betrachte das Integral $\int\int_D (y-x)^2(x+y)^{2020}dxdy$ über die Region D, die Begrenzt ist durch die Koordinatenachsen und die Linie $x+y=2$. Berechne die Region R für den Koordinatenwechsel $u = y-x$, $v = x+y$.

Zuerst Berechnen wir die Inverse der Transformation $x = \frac{1}{2}(-u+v)$ und $y = \frac{1}{2}(u+v)$. Wenn wir dies in D einsetzen erhalten wir:

$$R = \begin{cases} 0 \le -u+v \le 4 \\ 0 \le u+v \le 4+u-v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v \ge u \\ v \le u+4 \\ u \ge -v \\ v \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le v \le 2 \\ -v \le u \le v \end{cases}$$