Topologie: (Gegen-)Beispiele

Eric Ceglie

Frühjahrssemester 2023

1. Grundlagen

Metrisierbarkeit

Frage. *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein metrisierbarer topologischer Raum. Existiert eine Metrik auf X mit $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}$, so dass (X, d) beschränkt ist?*

Antwort. Ja. Sei d eine Metrix, so dass $\mathcal{O} = \mathcal{O}(d)$ gilt und definiere

$$\tilde{d}(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} < 1.$$

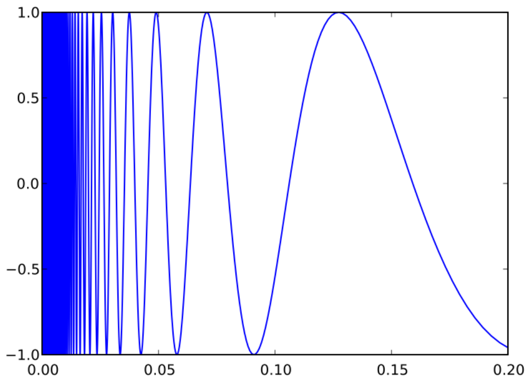
Dann gilt $\mathcal{O} = \mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(\tilde{d})$ und $(X, \tilde{d})$ ist beschränkt.

Topologist's Sine Curve

Frage. Gilt X zusammenhängend $\implies$ X wegzusammenhängend?

Antwort. Nein. Betrachte

$$Z := (\{0\} \times [-1, 1]) \sqcup \left\{ \left(t, \sin\left(\tfrac{1}{t}\right)\right) \mid t \in [0, 1) \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$



Dann ist Z zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend. Durch die stetige Inklusion $i(Z) \subseteq \mathbb{R}^n$ für $n \geq 2$ finden sich für alle höheren Dimensionen ebenfalls Gegenbeispiele.

$O_n(\mathbb{R})$ nicht zusammenhängend

Behauptung. $O_n(\mathbb{R})$ ist nicht zusammenhängend.

Beweis. Da die Determinantenabbildung

$$\det : O_n(\mathbb{R}) \to (\{-1, 1\}, \mathcal{O}_{\text{disc}}), A \mapsto \det(A)$$

stetig und surjektiv ist, ist $O_n(\mathbb{R})$ nicht zusammenhängend. □

$(\mathbb{N}, \mathcal{O}_{\text{cofin}})$

Beispiel. Der topologische Raum $(\mathbb{N}, \mathcal{O}_{\text{cofin}})$ ist zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend mit Wegzusammenhangskomponenten

$$\Pi_0(\mathbb{N}) = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Mehrere Grenzwerte

- Im topologischen Raum $(X, \mathcal{O}_{\text{trivial}})$ ist jedes $x \in X$ Grenzwert jeder Folge $(x_n)_n \subseteq X$.
- Sei $(\mathbb{N}, \mathcal{O}_{\text{cofin}})$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} n = a$ für alle $a \in \mathbb{N}$.

T_2 nicht erhalten durch stetige Abbildung

Betrachte $(X := [0, 1], \mathcal{O}_{\text{eucl}})$ und $(Y := \{a, b\}, \mathcal{O} := \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\})$ mit der Abbildung

$$f : X \to Y, t \mapsto \begin{cases} a & \text{falls } t < 1 \\ b & \text{falls } t = 1. \end{cases}$$

Dann ist f stetig und surjektiv, X ist T_2 aber Y ist nicht T_2, da $\{a\}$ nicht abgeschlossen ist.

---

2. Quotiententopologie

$\mathbb{D}^2/\sim\ \cong S^2$

Wir definieren auf $\mathbb{D}^2$ eine Äquivalenzrelation durch

$$v \sim w :\iff v = w \text{ oder } |v| = |w| = 1.$$

Behauptung. Dann gilt $\mathbb{D}^2/\sim\ \cong S^2$.

Beweis. Sei

$$\begin{aligned} g : \mathbb{D}^2 \subseteq \mathbb{R}^2 &\to S^2 \subseteq \mathbb{R}^3, \\ v &\mapsto \begin{cases} (0,0,-1) & \text{falls } v = (0,0) \\ \left(\sqrt{1-(2|v|-1)^2}\frac{v}{|v|}, 2|v|-1\right) & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dann ist g wohldefiniert und stetig. Nun ist

$$f : \mathbb{D}^2/\sim\ \to S^2, [v] \to g(v)$$

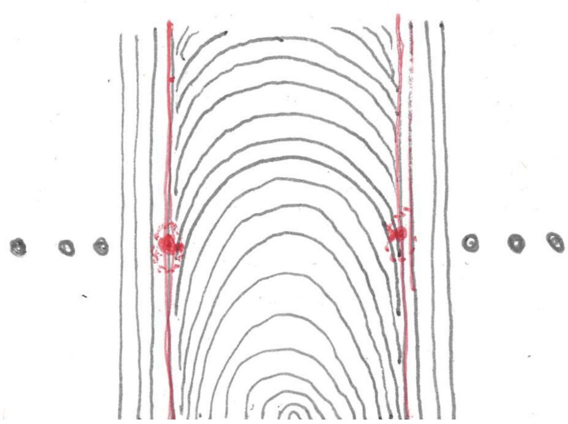
wohldefiniert und ebenfalls stetig und f ist zudem bijektiv. Da $\mathbb{D}^2$ kompakt ist und π stetig, ist auch $\mathbb{D}^2/\sim$ kompakt und S^2 ist T_2. Nach dem Homeomorphismensatz ist f damit ein Homeomorphismus. □

$\mathbb{R}^2/\sim$ nicht T_2

Seien in $\mathbb{R}^2$ Äquivalentklassen gegeben durch

$$\{\{(x,y) \mid y \in \mathbb{R}\} \mid |x| \geq \tfrac{\pi}{2}\} \sqcup \{\{(x, y - \tan^2 x) \mid |x| < \tfrac{\pi}{2}\} \mid y \in \mathbb{R}\}, \tag{1}$$

was folgendes Bild ergibt:



Sei $X := \mathbb{R}^2/\sim$ der durch (1) gegebene Quotientenraum. Dann ist X ein T_1-Raum, da alle Äquivalenzklassen abgeschlossen ist aber kein T_2-Raum.

$\longrightarrow$ Seien $x := \left[\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)\right]$ und $y := \left[\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)\right]$ und U, V offene Umgebungen von x bzw. y. Dann gilt $U \cap V \neq 0$, womit X nicht T_2 sein kann.

Nichtexistenz von topologischen Gruppen

Frage. Lässt sich auf $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit $\mathcal{O}_{\text{cofin}}$ eine topologische Gruppenstruktur definieren?

Antwort. Nein, denn für topologische Gruppen G gilt

$$G \text{ ist } T_1 \iff G \text{ ist } T_2$$

und ist X unendlich, so ist $(X, \mathcal{O}_{\text{cofin}})$ T_1 aber nicht T_2.

---

3. Homotopie

Retrakte

- $A = [0, 1]$ ist ein Retrakt von $X = [0, 1] \cup [4, 6]$ mit Retraktion
$$\rho : X \to A, x \mapsto \min(x, 1).$$
- Für $a < b$ ist $\{a, b\} \subseteq [a, b]$ kein Retrakt.
$\longrightarrow$ Ang. es existiert eine Retraktion
$$\rho : [a, b] \to \{a, b\}.$$
Dann wäre dies eine stetige, surjektive Abbildung im Widerspruch dazu, dass $[a, b]$ zsh. ist.
- $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist ein starker Deformationsretrakt mit
$$\rho : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}, x \mapsto \frac{x}{\|x\|}.$$
- Sei $\varphi : S^{n-1} \to Y$ stetig. Dann ist
$$i(Y) \subseteq Y \cup_{\varphi} (\mathbb{D}^n \setminus \{0\})$$
ein starker Deformationsrektrakt.
-

---

4. Fundamentalgruppe

Explizite Fundamentalgruppen

- $\forall n \geq 2 : \pi_1(S^n, x_0) = 1$.
  $\longrightarrow$ Grund. Für jede Schleife α an x_0 existiert eine *nicht surjektive* Schleife β mit $\alpha \simeq \beta$ rel. x_0.

- Für
  $$\alpha_k : [0,1] \to S^1, t \mapsto e^{2\pi it}$$
  ist
  $$\psi : \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \pi_1(S^1, 1), k \mapsto [\alpha_k]$$
  ein Gruppenisomorphismus.

- Sei $X := \bigvee_{j\in J} S^1 = (S^1 \times J)/\{1\} \times J$ für Indexmenge J mit diskreter Topologie. Dann gilt
  $$\pi_1(X) \cong \mathop{\ast}_{j\in J} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^J.$$

- Für den *Hawaiischer Ohrring* $X := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \subseteq \mathbb{C}$ mit $C_n := B_{\frac{1}{n}}(\frac{1}{n})$ gilt
  $$X \not\simeq \bigvee_{n\in\mathbb{N}} S^1 =: Y,$$
  wegen
  $$|\pi_1(X)| > \underbrace{|\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}|}_{\text{abzählbar}} = |\pi_1(Y)|.$$

---

5. Abzählbarkeitsaxiome

X erfüllt 1AA $\not\Longrightarrow$ X erfüllt 2AA

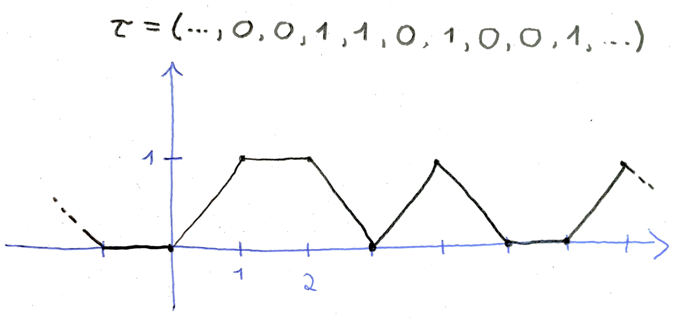
Sei

$$X := \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ ist beschränkt}\}$$

mit der von $\|\cdot\|_\infty$ induzierten Metrik. Dann erfüllt X das 1AA aber nicht das 2AA.
$\longrightarrow$ Grund. Für eine 0-1-Folge $\tau = (\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wähle ein $f_\tau \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_\tau(n) = \tau_n$$

und f_τ beschränkt.



Sei nun

$$A := \{f_\tau \mid \tau \text{ beliebige 0-1-Folge}\} \subseteq X.$$

Dann gilt

$$\forall g \in A : B_1(g) \cap A = \{g\},$$

womit X eine überabzählbare, diskrete Teilmenge besitzt. Damit erfüllt X das 2AA nicht.
Da X ein metrischer Raum ist, erfüllt X aber 1AA.

Nicht 1AA

Falls J überabzählbar ist und X_j ein topologischer Raum mit nicht-trivialer Topologie, dann erfüllt $\prod_{j \in J} X_j$ nicht das 1AA.

Kompakt $\not\Rightarrow$ folgenkompakt

$[0,1]^{[0,1]}$ ist nach Tychonoff kompakt aber ist nicht folgenkompakt.

---

6. Konstruktion stetiger Funktionen

---

7. Überlagerungen

Nicht trivial aber lokal trivial

Erinnerung. Das Möbiusband ist definiert durch $M = [-1,1] \times [0,1]/\alpha$ für $\alpha : [-1,1] \to [-1,1], s \mapsto -s$.

Die Abbildung

$$\pi : M \to S^1, [(s,t)] \mapsto e^{2\pi i t}$$

ist keine triviale Faserung aber eine lokal triviale Faserung.

$\longrightarrow$ Für

$$\tilde{\pi} : S^1 \times [-1,1] \to S^1, (s,t) \mapsto s$$

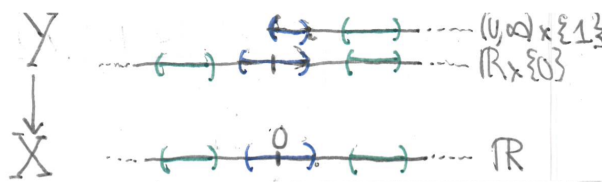
sind π und $\tilde{\pi}$ nicht isomorph, womit π keine triviale Faserung sein kann.

Lokaler Homeomorphismus, keine Überlagerung

Die Abbildung

$$\pi : \underbrace{\mathbb{R} + (0,\infty)}_{=\mathbb{R}\times\{0\}\sqcup(0,\infty)\times\{1\}} \to \mathbb{R}, (r,k) \mapsto r$$

ist ein lokaler Homeomorphismus aber keine Überlagerung.

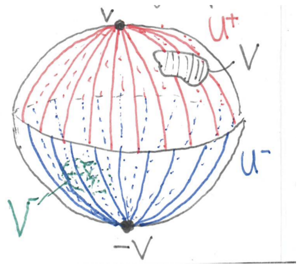


2-blättrige Überlagerung

Für $d \in \mathbb{N}$ ist

$$\pi : S^d \to S^d/\sim =: \mathbb{RP}^d, v \mapsto [v]$$

mit $v \sim -v$ eine 2-blättrige Überlagerung.



Wegzsh. aber nicht lokal wegzsh.

Der Kegel

$$C(\{0\} \cup \{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}) \subseteq \mathbb{R}^2$$

ist wegzsh. aber nicht lokal wegzsh.

Überlagerungen

- $\pi : \mathbb{R} \to S^1, r \mapsto e^{2\pi i r}$ ist eine ∞-blättrige Überlagerung
- $\pi_n : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, z \mapsto z^n$ ist eine n-blättrige Überlagerung
- $\pi : \partial M \to S^1, [(s,t)] \mapsto e^{2\pi i t}$ ist eine 2-blättrige Überlagerung.
