Topologie: Implikationen

Eric Ceglie

Frühjahrssemester 2023

1. Grundlagen

- $\|\cdot\|$ Norm auf $\mathbb{R}^n \implies \mathcal{O}_{\|\cdot\|} = \mathcal{O}_{\text{eukl}}$
- $f : X + Y \to Z \implies ($ f stetig $\iff f|_X$ und $f|_Y$ stetig $)$
- $f : Z \to X \times Y \implies ($ f stetig $\iff f_X$ und f_Y stetig $)$

- $f : X \to Y$ stetig $\implies (X_0 \subseteq X$ zsh. $\implies f(X_0) \subseteq Y$ zsh. $)$
- $f : X \to Y$ stetig $\implies (X_0 \subseteq X$ wegzsh. $\implies f(X_0) \subseteq Y$ wegzsh. $)$
- X wegzsh. $\implies X$ zsh.
- $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\implies (U$ zsh. $\iff U$ wegzsh. $)$
- $X, Y \neq \emptyset \implies (X \times Y$ zsh. $\iff X$ und Y zsh. $)$
- $X, Y \neq \emptyset \implies (X \times Y$ wegzsh. $\iff X$ und Y wegzsh. $)$
- X nicht zsh. $\iff \exists f : X \to \{\{0,1\}, \mathcal{O}_{\text{disc}}\}$ stetig, surjektiv

- X ist $T_2 \implies \forall x \in X : \{x\}$ ist abgeschlossen
- $X, Y \neq \emptyset \implies (X \times Y$ ist $T_2 \iff X$ und Y sind $T_2)$
- $X, Y \neq \emptyset \implies (X + Y$ ist $T_2 \iff X$ und Y sind $T_2)$
- X kompakt $\implies (K \subseteq X$ abgeschlossen $\implies K$ kompakt $)$
- $f : X \to Y$ stetig und $K \subseteq X$ kompakt $\implies f(K)$ kompakt
- X ist T_2 und $K \subseteq X$ kompakt $\implies K$ abgeschlossen
- $f : X \to Y$ stetig, bijektiv, X kompakt, Y ist $T_2 \implies f$ ist Homeomorphismus

2. Quotiententopologie

- $f: X/\sim \to Y \implies (\ f \text{ stetig} \iff f \circ \pi \text{ stetig}\ )$
- X kompakt $\implies X/\sim$ kompakt
- X (weg-)zsh. $\implies X/\sim$ (weg-)zsh.
- $\{z\} \subseteq X/\sim$ abgeschlossen $\iff \pi^{-1}\{z\} \subseteq X$ abgeschlossen

G topologische Gruppe und $H < G$.

- $X/\sim$ ist $T_1 \iff$ alle Äquivalenzklassen sind abgeschlossen in X
- G/H ist $T_2 \iff H \subseteq G$ abgeschlossen
- G ist $T_2 \iff G$ ist $T_1 \iff \{e\} \subseteq G$ ist abgeschlossen
- $\pi: G \to G/H, g \mapsto gH$ ist offen
- $f: G/Gx \to Gx, gG_x \mapsto gx$ ist stetige Bijektion

- X ist $T_2 \iff \Delta_X := \{(x,x) \in X \times X \mid x \in X\}$ ist abgs. in $X \times X$
- $X/\sim$ ist $T_2 \iff R_X := \{(x,y) \in X \times X \mid x \sim y\}$ ist abgs. in $X \times X$
- X metrisierbar und $A \subseteq X$ abgeschlossen $\implies X/A$ ist T_2

3. Homotopie

- $f: A \cup B \to Y$, A, B abgeschlossen, $f|_A, f|_B$ stetig $\implies f$ stetig
- $f \simeq g$, $\tilde{f} \simeq \tilde{g} \implies \tilde{f} \circ f \simeq \tilde{g} \circ g$
- $f_1 \simeq g_1$, $f_2 \simeq g_2 \implies f_1 \times f_2 \simeq g_1 \times g_2$
- $X \cong Y \implies X \simeq Y$
- A Deformationsretrakt von $X \implies X \simeq A$

4. Fundamentalgruppe

- $f: \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ stetig $\implies f$ hat einen Fixpunkt
- $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ ist Homeomorphismus $\implies n = 2$

5. Abzählbarkeitsaxiome

- 2AA $\implies$ 1AA
- X metrischer Raum $\implies$ X erfüllt 1AA
- $\mathbb{R}^n$ erfüllt 2AA
- f stetig $\implies$ f folgenstetig
- X erfüllt 1AA und $f : X \to Y$ stetig $\implies$ (f stetig $\iff$ f folgenstetig)
- X erfüllt 1AA $\implies$ (X kompakt $\implies$ X folgenkompakt)
- X metrischer Raum $\implies$ (X kompakt $\iff$ X folgenkompakt)
- X erfüllt 2AA $\implies$ X separabel
- $(X, \mathcal{O}_{\text{cofin}})$ und X überabzählbar $\implies$ X erfüllt nicht 1AA
- $\{X_j\}_{j\in J}$ alle kompakt $\overset{\text{Tychonoff}}{\implies}$ $\prod_{j\in J} X_j$ kompakt
- $\{X_j\}_{j\in J}$ alle T_2 $\implies$ $\prod_{j\in J} X_j$ ist T_2

6. Konstruktion stetiger Funktionen

- X metrischer Raum $\implies$ X normal
- $T_4 \implies T_3 \implies T_2 \implies T_1$
- X ist T_4 $\iff$ X ist T_1 und normal
- X kompakt und T_2 $\implies$ X normal
- X ist T_4 und erfüllt 2AA $\implies$ X metrisierbar
- X ist T_3 $\implies$ $\forall Y \subseteq X : Y$ ist T_3
- X ist T_4 $\implies$ $\forall Y \subseteq X$ abgeschlossen : Y ist T_4

7. Überlagerungen

Sei hier überall $\pi : Y \to X$ stetig.

- π Überlagerung $\iff$ π lokal triviale Faserung mit diskreter Faser
- π Überlagerung und $\forall x \in X : |\pi^{-1}\{x\}| = 1 \implies \pi$ Homeomorphismus
- π Überlagerung $\implies$ π_* injektiv (Achte hierbei auf Basispunkte!)
- f lokaler Homeomorphismus und bijektiv $\implies$ f Homeomorphismus