# TOPOLOGIE

20.2.

## 0. KURZE EINFÜHRUNG

i) Topologie ist Teil der Analysis, der sich mit "allg. Lage" beschäftigt.

↳ Satz. Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt $f$ auf $[0,1]$ ein Min. und ein Max. an. Zudem werden alle Werte dazwischen angenommen.

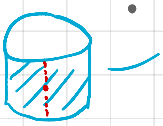
"Topologischer Grund": Bilder von kompakten/zsmh. Mengen unter stetigen Abbildung sind wieder kompakten/zsmh.

ii) Studium und Konstruktion von Topologischen Räumen.

↳ Verallg. von metr. Räumen mit Fokus auf Nachbarschaft statt Distanz.

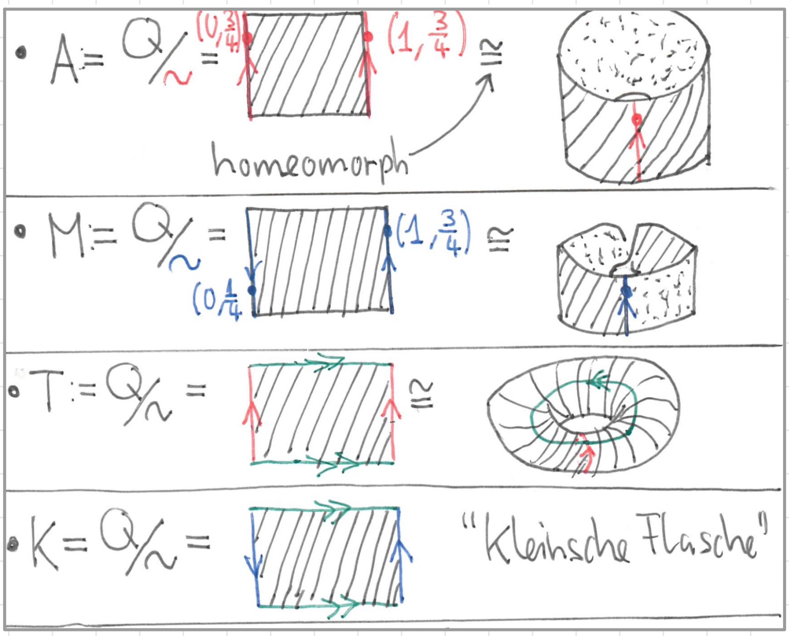
Bsp. • $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$

• $Q := [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$



• $A := Q/\sim$ mit $\forall y \in [0,1]: (1,y) \sim (0,y)$

└ "Faktorraum"



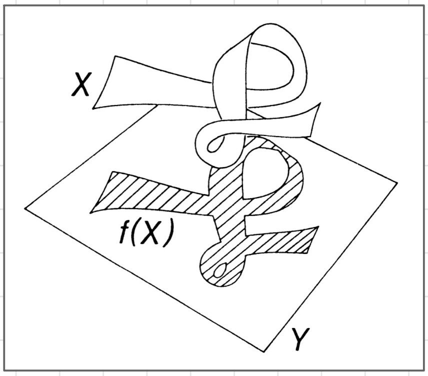

Hilfsmittel für das Studium Top. Räume:

"Algebraische Invarianten"

↳ z.B. Zahlen, Gruppen, Ringe, Körper, ... zuordnen

↳ In dieser Vorlesung: Die Fundamentalgruppe

# 1. GRUNDLAGEN




## TOPOLOGISCHE RÄUME

Motivation in $\mathbb{R}$: $U \subseteq \mathbb{R}$ heisst offen*, falls

$$\forall x \in U \; \exists \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U.$$

Def. Ein topologischer Raum ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$, bestehend aus einer Menge $X$ und einer Menge von Teilmengen $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$, s.d.

i) Beliebige Vereinigung von Mengen in $\mathcal{O}$ sind in $\mathcal{O}$.

ii) Der Durchschnitt von je zwei Mengen in $\mathcal{O}$ liegt wieder in $\mathcal{O}$.

iii) $\emptyset$, $X$ liegen in $\mathcal{O}$.

Man nennt $U \in \mathcal{O}$ offene Menge von $X$ und $\mathcal{O}$ Topologie von $X$.

Bsp. a) Die Menge von offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}$ im Sinne von * bilden eine Topologie von $\mathbb{R}$.

Def. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. 24.2.

- $A \subseteq X$ heisst abgeschlossen, falls $X \setminus A \in \mathcal{O}$.
- $U \subseteq X$ heisst Umgebung von $x \in X$, falls eine offene Menge $V \in \mathcal{O}$ existiert mit $x \in V \subseteq U$.
- Seien $x \in X$, $B \subseteq X$. Dann heisst $x$
  - innerer Punkt von $B$, falls $B$ eine Umgebung von $x$ ist.
  - äusserer Punkt von $B$, falls $X \setminus B$ eine Umgebung von $x$ ist.

- Randpunkt von B, falls weder B noch $X \setminus B$ Umgebung von $x$ ist.

- $B^\circ := \{x \in X \mid x \text{ ist innerer Punkt von } B\}$ heisst das Innere von B.
- $\overline{B} := \{x \in X \mid x \text{ ist nicht äusserer Punkt von } B\}$ heist Abschluss von B.
- $\partial B := \{x \in X \mid x \text{ ist Randpunkt von } B\}$ heisst Rand von B.

## Alternative Def. von top. Räumen

I) Fokus auf abgs. Mengen.

II) Fokus auf Umgebungen ("Hausdorff'scher Zugang").

III) Hüllenaxiome.

# METRISCHE RÄUME

Motivation: Euklidsche topologie auf $\mathbb{R}^n$.

Def. Ein metrischer Raum ist ein Paar $(X,d)$ mit einer Abbildung $d: X \times X \to \mathbb{R}$, s.d.

i) $\forall x,y \in X: \quad d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

ii) $\forall x,y \in X: \quad d(x,y) = d(y,x)$

iii) $\forall x,y,z \in X: \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Def. Sei $(X,d)$ metr. Raum. Dann heisst

$$\mathcal{O}(d) := \{U \subseteq X \mid \forall x \in U \; \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq U\}$$

die von $d$ induzierte Topologie.

d.h. es ex. eine Metrik $d$ mit $\mathcal{O} = \mathcal{O}(d)$

Frage: Ist jeder topologische Raum metrisierbar?

$\to$ Nein! Sei $X := \{a,b\}$ mit $a \neq b$ und $\mathcal{O} := \{\emptyset, X\}$.

Dann ist $\mathcal{O}$ Top. von $X$.

Agn. $X$ wäre metrisierbar, d.h. es ex. Metrik $d$ mit $\mathcal{O} = \mathcal{O}(d)$. Sei $\varepsilon := \frac{d(a,b)}{2}$. Dann gilt

$$B_\varepsilon(a) = \{a\} \in \mathcal{O}(d)$$

aber $\{a\} \notin \mathcal{O}$. Also ist $(X, \mathcal{O})$ nicht metrisierbar.

**Def.** Sei $X$ eine Menge. Dann heisst $\mathcal{O}_{trivial} = \{\emptyset, X\}$ die triviale Topologie und $\mathcal{O}_{disc} := \mathcal{P}(X)$ heisst die diskrete Topologie.

**Bsp.**

- $(\mathbb{R}^n, d_{eucl}) \Rightarrow \mathcal{O}_{eucl} := \mathcal{O}(d_{eucl})$
- $(\mathbb{R}, d)$ für $d(x,y) := \begin{cases} 0 & x=y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$ gilt

$$\mathcal{O}(d) = \mathcal{P}(\mathbb{R}) \supsetneq \mathcal{O}_{eucl}.$$

**Frage:** Was verlieren wir von $d$ nach $\mathcal{O}(d)$?

$\rightarrow$ Sei $(X,d)$ metr. Raum und setze

$$\tilde{d}(x,y) := \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} < 1.$$

**Beh.** $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(\tilde{d})$.

**Bew.** Sei $U \subseteq X$. Dann gilt

$$U \in \mathcal{O}(d) \Leftrightarrow \forall x \in U \, \exists \varepsilon > 0 : \underbrace{B_\varepsilon^d(x)}_{\substack{\| \\ \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\} \\ \| \\ \{y \in X \mid \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\} = B_{\tilde\varepsilon}^{\tilde{d}}(x)}} \subseteq U$$

$$\Longleftrightarrow \forall x \in U \, \exists \tilde{\varepsilon} > 0 : B_{\tilde{\varepsilon}}^{\tilde{d}}(x) \subseteq U$$

$$\Longleftrightarrow U \in \mathcal{O}(\tilde{d}). \qquad \square$$

**Bem.** • Verschiedene Metriken auf $\mathbb{R}^n$ können verschiedene Topologien induzieren

- Alle Metriken auf $\mathbb{R}^n$, die von einer Norm kommen induzieren die Euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$.

## Unterräume, Summen und Produkte

Notation.

- $S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
- $S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$
- $S^n := \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|v\|_2 = 1\}$

Def. Sei $(X,\mathcal{O})$ top. Raum und $X_0 \subseteq X$. Dann heisst

$$\mathcal{O}|_{X_0} := \{X_0 \cap U \mid U \in \mathcal{O}\}$$

Teilraum- bzw. Unterraumtopologie der auf $X_0$ induzierte Topologie.

Bsp. • $[0,1] \subseteq \mathbb{R} =: X$ mit $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{eucl}$. Dann ist

$$\underbrace{(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})}_{\in \mathcal{O}} \cap [0,1] = [0,\tfrac{1}{2}) \in \mathcal{O}|_{[0,1]}$$

offen in $[0,1]$.

Def. Für Mengen $X, Y$ schreiben wir $X+Y$ für die disjunkte Vereinigung oder Summe von $X$ uny $Y$. $(X+Y := X\times\{0\} \cup Y\times\{1\})$

$X\times Y$ ist das kartesische Produkt von $X$ und $Y$.

Def. Seien $(X,\mathcal{O}_X), (Y,\mathcal{O}_Y)$ top. Räume. Dann def. wir

- $(X+Y, \mathcal{O}_{X+Y})$ durch

$$\mathcal{O}_{X+Y} := \{U+V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$$

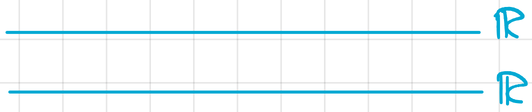
heisst (topologische) Summe von $X$ und $Y$.

- $(X\times Y, \mathcal{O}_{X\times Y})$ durch

$$\mathcal{O}_{X\times Y} := \{ W \subseteq X \times Y \mid \forall (x,y) \in W \ \exists U \in \mathcal{O}_X,\ x \in U \ \exists V \in \mathcal{O}_Y,\ y \in V, \text{ s.d. } U \times V \subseteq W \}$$

heisst (topologisches) Produkt von $X$ und $Y$.

Bsp. Für $X = Y = \mathbb{R}$ gilt

- $X + Y =$ 


- $X \times Y = \mathbb{R}^2$
- $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} = \mathcal{O}_{\mathbb{R}^{n+m}} = \mathcal{O}_{eucl.}$

# Basis und Subbasen

Motivation: Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist offen g.d.w. $\varepsilon_i > 0$ und $x_i \in \mathbb{R}^n$ ex.

mit $U = \bigcup_i B_{\varepsilon_i}(x_i)$.

Def. Sei $(X, \mathcal{O})$ top. Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ heisst Basis von $\mathcal{O}$, falls

$$\forall U \in \mathcal{O} \ \exists \{B_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{B} : U = \bigcup_{i \in I} B_i .$$

Bsp. • Für top. Räume $X$ und $Y$ bildet

$$\mathcal{B} := \{ U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X,\ V \in \mathcal{O}_Y \}$$

eine Basis von $\mathcal{O}_{X\times Y}$.

• Für metr. Raum $(X, d)$ bildet

$$\mathcal{B} := \{ B_\varepsilon(x) \mid x \in X \}$$

eine Basis von $\mathcal{O}(d)$.

**Def.** Sei $(X, \mathcal{O})$ ein top. Raum.

$S \subseteq \mathcal{O}$ heisst Subbasis von $\mathcal{O}$, falls

$\forall U \in \mathcal{O} \; \exists \{B_i\}_{i\in I}$ mit $B_i$ endliche Durchschnitte

von Mengen aus $S$, s.d. $U = \bigcup_{i\in I} B_i$.

**Bsp.** Für $X := \{a, b, c\}$ sind

$$S := \{\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$$

und

$$B := \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$$

sind Subbasis bzw. Basis der diskreten Top. auf $X$.

**Bem.** Jede Menge von Teilmengen $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist eine Subbasis einer eindeutigen Topologie auf $X$, genannt die von $S$ erzeugte Topologie auf $X$.

Konvention: $\bigcap_{i\in\emptyset} \ldots = X$, $\bigcup_{i\in\emptyset} \ldots = \emptyset$.

Übrigens: Die von $S$ erzeugte Top. ist die kleinste Topologie, welche $S$ enthält.

# STETIGE ABBILDUNGEN

**Def.** Seien $X, Y$ top. Räume und $f: X \to Y$ Abbildung.

- Dann heisst $f$ stetig, falls Urbilder offener Mengen offen sind, d.h. $\forall V \in \mathcal{O}_Y \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$.
- Sei $x_0 \in X$. $f$ heisst stetig bei $x_0$, falls für jede Umgebung $V$ von $f(x_0)$ eine Umgebung $U$ von $x_0$ ex. mit $f(U) \subseteq V$.

**Bem.** Falls $X, Y$ metr. Räume sind, dann stimmt obige Def. mit den üblichen $\varepsilon$-$\delta$-Def. überein.

**Bsp.** • $\mathrm{id}_X : X \to X$ ist stetig für jeden top. Raum $X$.

• $f: X \to Y$ ist immer stetig, falls $X$ die diskrete oder $Y$ die triviale Topologie trägt

**Lemma 1.** Seien $X, Y$ top. Räume und $f: X \to Y$ Abbildung.

a) $f$ ist stetig g.d.w. $f$ stetig bei jedem $x \in X$ ist.

Sei $Z$ weiterer top. Raum und $g: Y \to Z$ Abbildung.

b) Falls $f, g$ stetig sind, so ist $g \circ f$ stetig.

c) Falls $f$ stetig bei $x_0$ und $g$ stetig bei $f(x_0)$, so ist $f \circ g$ stetig bei $x_0$.

**Bew.** (nur (a) und (b))

b) $W \subseteq Z$ offen $\Rightarrow g^{-1}(W) \subseteq Y$ offen

$$\Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(W)) \subseteq X \text{ offen.}$$

Damit ist $g \circ f$ stetig.

a) "$\Rightarrow$": Sei $x \in X$ und $V \subseteq Y$ Umgebung von $f(x)$.

Dann ex. $\tilde{V} \subseteq V$ offen in $Y$ mit $f(x) \in \tilde{V}$.

Da $f$ stetig ist, ist $f^{-1}(\tilde{V}) \subseteq X$ offen und damit sogar Umgebung von $x$ mit

$$f(f^{-1}(\tilde{V})) \subseteq V.$$

Damit ist $f$ stetig bei $x$.

"$\Leftarrow$": Sei nun $V \subseteq Y$ offen. Dann gilt

$$\forall x \in f^{-1}(V)\ \exists\, U_x \text{ Umgebung von } x$$

mit $f(U_x) \subseteq V$,

da $V$ Umgebung von $f(x)$ ist.

$\Rightarrow \exists \tilde{U}_x \subseteq U_x$ offen mit $x \in U_x$ und $f(U_x) \subseteq V$.

Damit folgt

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} \tilde{U}_x \subseteq f^{-1}(V)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} \overbrace{\tilde{U}_x}^{\text{offen}} \text{ offen in } X, \text{ da}$$

alle $\tilde{U}_x$ offen sind. $\square$

<u>Eigenschaften.</u> (Teilraum, Sumen, Produkte). <u>3.3.</u>

i) Für $X_0 \subseteq X$ ist die Inklusion $X_0 \hookrightarrow X$ stetig.

ii) Sei $f: X \to Y$ stetig, $X_0 \subseteq X$, $Y_0 \subseteq Y$ mit $f(X_0) \subseteq Y_0$, dann ist die Einschränkung

$$f|_{X_0}^{Y_0} : X_0 \to Y_0, \quad x \mapsto f(x)$$

stetig.

iii) Die Inklusion $X \hookrightarrow X + Y$ ist stetig.

iv) Sei $f: X + Y \to Z$. Dann ist $f$ stetig g.d.w. $f|X$ und $f|Y$ stetig sind.

v) Die Projektion $\pi_X : X \times Y \to X$ und $\pi_Y : X \times Y \to Y$ sind stetig.

vi) Sei $f = (f_X, f_Y): Z \to X \times Y$. Dann ist $f$ stetig g.d.w. $f_X$ und $f_Y$ stetig.

<u>Def.</u> Eine bijektive Abbildung $f: X \to Y$ heisst Homeomorphismus, wenn $f$ und $f^{-1}$ beide stetig sind.

<u>Bsp.</u>
- $id_X : X \to X$ ist ein Homeomorphismus.
- $\tan: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ ist ein Homeom.

- $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ ist ein Homeom.
- $f : \underset{\substack{\cap \\ \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})}}{SO_2} \longrightarrow \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^2}}{S^1}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto (a,b)$ ist eine

  stetige Bijektion (stetig nach ii). Zudem ist
  $$f^{-1} : S^1 \to SO_2(\mathbb{R}),\ (a,b) \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$
  ebenfalls stetig nach (ii). Damit ist $f$ ein Homeom.

**Def.** Seien $X, Y$ top. Räume. Falls ein Homeomorphismus
$$f : X \to Y$$
existiert, dann heissen $X$ und $Y$ homeomorph und wir schreiben
$$X \cong Y.$$

# ZUSAMMENHANG

**Def.** Ein top. Raum $X$ heisst zusammenhängend, wenn $X$ nicht als disjunkte Vereinigung zweier nicht-leerer, offener Mengen geschrieben werden kann.

**Lemma 2.**

a) Intervalle in $\mathbb{R}$ sind zsmh.

b) Zsmh. Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind Intervalle

**Bew.** b) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ zsmh. Seien $x, y \in I$ beliebig. Agn. es ex. ein $z \in \mathbb{R} \setminus I$ mit $x < z < y$. Dann gilt
$$I = \underbrace{\big((-\infty, z) \cap I\big)}_{\text{offen in } I} \sqcup \underbrace{\big((z,\infty) \cap I\big)}_{\text{offen in } I},$$
im Widerspruch dazu, dass $I$ zsmh. ist. Damit ex.

kein solches $z$. Also ist $I$ ein Intervall.

a) Beweis für $I = (i, j) \subseteq \mathbb{R}$ mit $i < j$ (andere Fälle ähnlich).

Agn. $I = U \cup V$ mit $U, V$ offen und nicht-leer.

Wähle $a \in U$, $b \in V$ mit OBdA $a < b$. Setze

$$s := \sup \underbrace{\{x \in U \mid x < b\}}_{\text{nicht-leer und beschränkt}} \in \mathbb{R}.$$

da $U$ offen ist

i) Falls $s \in U$, so ex. $\varepsilon > 0$ mit $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subseteq U$.

Daraus folgt $b \in U$ und damit $U \cap V \neq \emptyset$.

ii) Falls $s \in V$, so ex. $\varepsilon > 0$ mit $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subseteq V$

und es folgt wieder $U \cap V \neq \emptyset$. $\square$

<u>Satz</u>. (Verallg. des Zwischenwertsatzes) Sei $f: X \to Y$ stetig. Falls $X_0 \subseteq X$ zsmh. ist, dann ist $f(X_0) \subseteq Y$ zsmh.

→ Zwischenwertsatz folgt als Korollar.

<u>Bew.</u> Setze $Y_0 := f(X_0)$ und betrachte die stetige, surj. Abb

$$g := f|_{X_0}^{Y_0} : X_0 \to Y_0$$

Sei $Y_0 = U \cup V$ mit $U, V$ offen und nicht-leer. Dann gilt

$$X_0 = g^{-1}(U) \cup g^{-1}(V)$$

mit $g^{-1}(U)$, $g^{-1}(V)$ offen (da $g$ stetig) und nicht-leer (da $g$ surj.). Da $X_0$ zsmh. ist, gilt

$$g^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \neq \emptyset.$$

Daraus folgt $U \cap V \neq \emptyset$, womit $Y_0$ zsmh. ist. $\square$

<u>Def.</u>
- Ein top. Raum $X$ heisst wegzusammenhängend, wenn es für alle $a, b \in X$ ein Weg von $a$ nach $b$ gibt.
- Ein Weg / Pfad von $a$ nach $b$ ist eine stetige

mit Teilraumtopologie von $\mathbb{R}$

Abbildung $\alpha : [0,1] \to X$ mit $\alpha(0) = a$ und $\alpha(1) = b$.

**Bsp.** Intervalle in $\mathbb{R}$ und beliebige konvexe Teilmengen in $\mathbb{R}^n$ sind wegzsmh.

**Eigenschaften.**

i) $X$ wegzsmh. $\Rightarrow$ $X$ zsmh.

ii) Sei $f : X \to Y$ stetig und $X_0 \subseteq X$ wegzsmh. Dann ist $f(X_0)$ auch wegzsmh.

**Bew.** i) Sei $X = U \cup V$ mit $U, V$ offen, nicht-leer. Wähle $a \in U$, $b \in V$ und $\alpha : [0,1] \to X$ stetig wie in der Def. von wegzsmh.

Dann ist $I := f([0,1]) \subseteq X$ zsmh. und

$$(U \cap I) \cup (V \cap I) = I$$

da $I$ zsmh. ist

und $U \cap I \neq \emptyset \neq V \cap I$. Damit ex. ein $y \in U \cap I \cap V \cap I \subseteq U \cap V$.

Also gilt $U \cap V \neq \emptyset$, womit $X$ zsmh. ist.

ii) Seien $a, b \in f(X_0)$. Wähle $a', b' \in X_0$ mit $f(a') = a$, $f(b') = b$. Dann ex. Weg $\alpha$ von $a'$ nach $b'$.

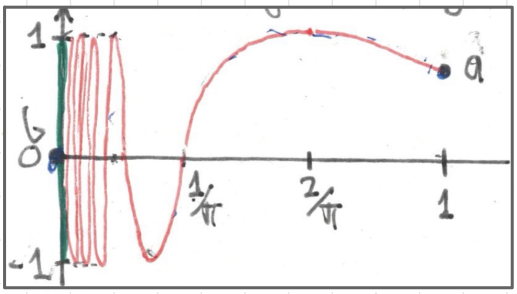
Dann ist $f \circ \alpha$ ein Weg von $a$ nach $b$. $\square$

**Bsp.** (Topologist's sine curve)

Die Menge

$$Z := \underbrace{(\{0\} \times [-1, 1])}_{Z_0} \cup \underbrace{\{(t, \sin(\tfrac{1}{t})) \mid t \in (0, 1]\}}_{Z_1} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ist nicht wegzsmh., aber zsmh.



Bew.

- nicht wegzsmh. Seien $a=(1,\sin(1))$, $b=(0,0)\in Z$.

  Agn. es ex. Weg $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ von $a$ nach $b$. Sei

$$s:=\min\{t\in[0,1]\mid \alpha_1(t)=0\}$$
$$=\min(\alpha_1^{-1}(\{0\})) \rightsquigarrow \text{muss ex., da } \alpha_1 \text{ stetig} \Rightarrow \text{Urbild abgs.}$$

$\Rightarrow \alpha_1([0,s))\subseteq(0,1]$ mit $\lim\limits_{t\to s}\alpha_1(t)=0$ und $\alpha_1(0)=0$.

$\Rightarrow \alpha_1([0,s))=(0,1]$

$\Rightarrow \exists (s_n)_n$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$ und $\alpha_2(s_n)=1$.

$\Rightarrow \exists (s_n')_n$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}s_n'=s$ und $\alpha_2(s_n')=-1$

$\Rightarrow$ Widerspruch, da $\alpha_2$ stetig ist.

- zsmh. Sei $Z=U\cup V$ mit $U,V\subseteq Z$ offen, nicht-leer. 6.3.

  Agn. $U\cap V=\emptyset$. OBdA gilt $U=Z_0$, $V=Z_1$, da $Z_0, Z_1$ zsmh. sind als Bilder zsmh. Mengen unter stetigen Abb. Da $U$ offen ist, ex. ein $\tilde U\subseteq\mathbb{R}^2$ mit $\tilde U\cap Z=U$. Dann ex. $\varepsilon>0$ mit

$$B_\varepsilon((0,0))\subseteq\tilde U.$$
$$\Rightarrow \underbrace{\tilde U\cap Z_1}_{\subseteq U\cap Z_1=U\cap V}\neq\emptyset \Rightarrow U\cap V\neq\emptyset.$$

  Damit ist $Z$ zsmh. $\square$

Übrigens.
- Also ex. $Z\subseteq\mathbb{R}^n$ für $n\geq 2$ mit $Z$ zsmh. und nicht wegzsmh.
- Falls $U\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, dann ist $U$ zsmh. g.d.w. $U$ wegzsmh. ist.

**Bem.** Seien $X, Y$ top. Räume.

- Sind $X, Y \neq \emptyset$, dann sind $X$ und $Y$ (weg-)zsmh g.d.w. $X \times Y$ (weg-)zsmh. ist.
- $A, B \subseteq X$ und $A \cap B \neq \emptyset$. Dann gilt
$$A \text{ und } B \text{ (weg-)zsmh.} \Rightarrow A \cup B \text{ (weg-)zsmh.}$$
- $X$ ist nicht zsmh. g.d.w. $\exists f: X \longrightarrow \{\{0,1\}, \mathcal{O}_{disc}\}$ surj., stetig

**Bsp.** Für $n \in \mathbb{N}$ ist $O_n(\mathbb{R})$ nicht zsmh., da
$$\det: O_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \{-1, 1\}, \ M \longmapsto \det(M),$$
da det stetig und surj. ist.

**Übrigens.** Sei $X$ top. Raum.

- Def. $a \sim_w b :\Leftrightarrow$ es ex. Weg von $a$ nach $b$. Dies ist eine Äquivalenzrelation und die Äquivalenzklassen heissen Wegzusammenhangskomponenten. Die Menge aller Wegzsmh.komp. wird mit $\pi_0(X)$ bezeichnet.
- Ähnlich für $a \sim_Z b :\Leftrightarrow$ es ex. $Z \subseteq X$ zsmh. mit $a, b \in Z$. Auch Äquiv.relation und Äquiv.klassen heissen Zusammenhangskomponenten.

**Bsp.** $(\mathbb{N}, \mathcal{O}_{cofin})$ ist zsmh. aber nicht wegzsmh. mit
$$\pi_0(X) = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

# Das Hausdorffsche Trennunsaxiom.

Def. Sei $X$ top. Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $X$.
Dann heisst ein $a \in X$ Limes/Grenzwert von $(x_n)_n$, wenn es zu jeder Umgebung $U$ von $a$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ ex., s.d. $\forall n \geq n_0$: $x_n \in U$.

Bsp. ◦ Sei $(X, \mathcal{O}_{trivial})$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ für alle $a \in X$ und alle Folgen $(x_n)_n$ in $X$.

◦ Sei $(\mathbb{N}, \mathcal{O}_{cofin})$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} n = a$ für alle $a \in \mathbb{N}$.

Def. Sei $X$ top. Raum. $X$ heisst Hausdorffraum / Hausdorff / $T_2$-Raum / $T_2$, wenn es für je zwei verschiedene Punkte in $X$ zwei disjunkte Umgebungen ex.

Bsp. Sei $X$ ein metr. Raum. Dann ist $X$ Hausdorffsch.
Grund: Für $x, y \in X$ mit $x \neq y$ nehme $U = B_\varepsilon(x)$, $B_\varepsilon(y)$ mit $\varepsilon := \frac{1}{2}d(x,y)$ als disjunkte Umgebungen.

Eigenschaften. Sei $X$ ein $T_2$-Raum. Dann gilt
i) Für alle $x \in X$ ist $\{x\}$ abgs.
ii) Jede Folge in $X$ hat höchstens einen Grenzwert.

Bew. i) Für $x \in X$ sei $y \in X \setminus \{x\}$ beliebig. Da $X$ Hausdorffsch ist, ex. offene Menge $U_y$ mit $y \in U_y$, $x \notin U_y$.
Dann gilt $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X\setminus\{y\}} U_y$ offen, womit $\{x\}$ abgs. ist.
ii) Siehe Serie 3. $\square$

**Bem.** ∘ Im Allg. ist $T_2$ sein nicht erhalten unter stetigen Abb:

$$f : [0,1] \longrightarrow \{\{a,b\}, \mathcal{O} = \{\{a\}, \{a,b\}, \emptyset\}\}$$
$$t \longmapsto \begin{cases} a & \text{falls } t = 1 \\ b & \text{sonst} \end{cases}$$

ist stetig, surj., $[0,1]$ ist $T_2$-Raum, aber $\{a,b\}$ ist nicht ein $T_2$-Raum, da $\{a\}$ nicht abgs. ist.

∘ Teilmengen von $T_2$-Räumen sind $T_2$.

∘ $X$ und $Y$ nicht-leere top. Räume. Dann gilt

  ∘ $X \times Y$ ist $T_2$ g.d.w. $X$ und $Y$ sind $T_2$.

  ∘ $X + Y$ ist $T_2$ g.d.w. $X$ und $Y$ sind $T_2$.

## KOMPAKTHEIT

10.3.

**Def.** Sei $X$ ein top. Raum. $X$ heisst kompakt, falls jede offene Überdeckung von $X$ eine endliche Teilüberdeckung hat, d.h. es soll gelten

$$\forall \{U_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{O} \text{ mit } \bigcup_{i \in I} U_i = X$$
$$\exists J \subseteq I \text{ mit } |J| < \infty \text{ und } \bigcup_{j \in J} U_j = X.$$

**Bsp.** ∘ Ist $X$ endl., so ist $X$ kompakt.

∘ $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt.

∘ Sei $X$ top. Raum und $K \subseteq X$. Dann ist $K$ kompakt bzgl. $\mathcal{O}|_K$ g.d.w. jede offene Überdeckung von $K$ in $X$ eine endl. Teilüberdeckung hat.

**Eigenschaften.**

i) Sei $X$ kompakter top. Raum. Falls $K \subseteq X$ abgeschlossen ist, dann ist $K$ kompakt.

ii) Sei $f: X \longrightarrow Y$ stetig und $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist $f(K)$ kompakt.

**Bew.** (i) Sei $K \subseteq X$ abgs. und $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{O}$ offene Überdeckung von $K$ in $X$. Dann ist $\{U_i\}_{i\in I} \cup \{X \setminus K\}$ offene Überdeckung von $X$. Da $X$ kompakt ist, ex. $J \subseteq I$ endl. mit

$$X = \bigcup_{i\in J} U_i \cup X\setminus K$$
$$\Longrightarrow K \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i.$$

(ii) Sei $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{O}_Y$ offene Überdeckung von $f(K)$. Dann ist $\{f^{-1}(U_i)\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{O}_X$ offene Überdeckung von $K$. Da $K$ kompakt ist, ex. $J \subseteq I$ endl. s.d. $\{f^{-1}(U_i)\}_{i\in J}$ offene Teilüberdeckung von $K$ ist. Damit ist $\{U_i\}_{i\in J}$ endl. Teilüberdeckung von $f(K)$. □

**Lemma.** Sei $X$ ein $T_2$-Raum und $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist $K$ abgeschlossen.

**Bew.** Sei $p \in X \setminus K$ beliebig. Da $X$ $T_2$ ist, ex. für alle $x \in K$ zwei $U_x, V_x \in \mathcal{O}_X$ mit $U_x \cap V_x = \emptyset$, $x \in U_x$ und $p \in V_x$. Da $K$ kompakt ist, ex. $x_0, \dots, x_n \in K$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}.$$

Damit ist

$$V := \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i} \ni p$$

offen und $V \cap U_{x_i} = \emptyset$. Insb. gilt $V \cap K = \emptyset$ und damit $V \subseteq X \setminus K$. Damit ist $X \setminus K$ offen, d.h. $K$ ist abgs. □

**Satz.** (Homeomorphismussatz / Umkehrsatz)

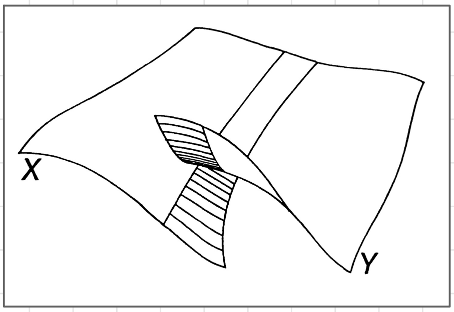
Sei $f: X \longrightarrow Y$ stetig, bijektiv, $X$ kompakt und $Y$ $T_2$-Raum. Dann ist $f$ ein Homeomorphismus.

**Bew.** Sei $A \in \mathfrak{A}_X$ beliebige abgeschlossene Menge von $X$.
Da $X$ kompakt ist, ist $A$ kompakt als abgs. Menge.
Da $f$ stetig ist, ist $f(A)$ kompakt. Da $Y$ $T_2$-Raum ist, ist $f(A)$ abgs. in $Y$. Damit ist $f^{-1}$ stetig. $\square$

**Bem.**
- Der Umkehrsatz kommt ohne "lokale Umkehrbedingung" aus.
- Sei $X$ top. Raum und $\mathcal{E}$ eine "Eigenschaft", die für $U \cup V$ gilt, falls sie für offene Mengen $U, V \in \mathcal{O}_X$ gilt. Falls $\mathcal{E}$ lokal gilt und $X$ kompakt ist, so gilt $\mathcal{E}$ für ganz $X$. (Bsp. $\mathcal{E}$ = "$f$ ist beschränkt".)

# 2. Die Quotiententopologie

## Der Begriff der Quotiententopologie




**Notation:** Sei $X$ eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X$. Setze

$$X/\sim \; := \{[x] \mid x \in X\}$$

und

$$\pi : X \twoheadrightarrow X/\sim, \quad x \longmapsto [x].$$

**Frage:** Was ist eine sinnvolle Topologie auf $X/\sim$, falls $X$ ein top. Raum ist.

**Def.** Sei $X$ top. Raum und $\sim$ eine beliebige Äquivalenzrelation auf $X$. $U \subseteq X/\sim$ heisst offen in der Quotiententopologie, wenn $\pi^{-1}(U) \subseteq X$ offen in $X$ ist. Def. zudem

$$\mathcal{O}_{X/\sim} := \{U \subseteq X/\sim \mid \pi^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X\}.$$

Dann heisst $(X/\sim, \mathcal{O}_{X/\sim})$ Quotientenraum / Faktorraum.

**Bsp.** Sei $X = [0,1]$ und $x \sim y :\Longleftrightarrow x = y$ oder $x, y \in \{0,1\}$. Dann gilt $X/\sim \; \cong S^1$.

**Lemma 1.** Seien $X$, $Y$ top. Räume und $\sim$ eine ÄR. auf $X$ und $f : X/\sim \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Dann ist $f$ stetig g.d.w. $f \circ \pi$ stetig ist. 13.3.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f \circ \pi"] & \\
X/\sim \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

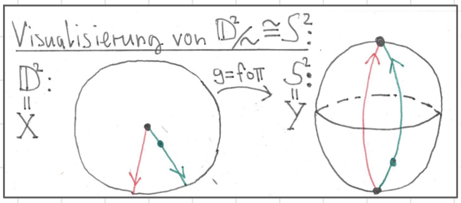
**Bew.** "$\Rightarrow$" Da $\pi$ per Def. stetig ist, ist dann auch $f \circ \pi$ stetig.

"$\Leftarrow$": Sei $V \subseteq Y$ offen. Dann ist $(f \circ \pi)^{-1}(V)$ offen. Nach Def. von $\mathcal{O}_{X/\sim}$ ist $f^{-1}(V) \subseteq X/\sim$ offen. $\square$

**Bsp.** Sei $\mathbb{D}^2 := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\| \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Def. ÄR. durch

$$x \sim y \;:\Leftrightarrow\; x = y \text{ oder } |x| = |y| = 1.$$

**Beh.** $\mathbb{D}^2/\sim \;\cong\; S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\| = 1\}$.




**Bew.** Sei

$$g : \mathbb{D}^2 \longrightarrow S^2,$$

$$v \longmapsto \begin{cases} (0, 0, -1) & \text{für } v = (0,0) \\ \left(\sqrt{1 - (2|v| - 1)^2}\, \frac{v}{|v|},\; 2|v| - 1\right) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $g$ stetig. Zudem ist

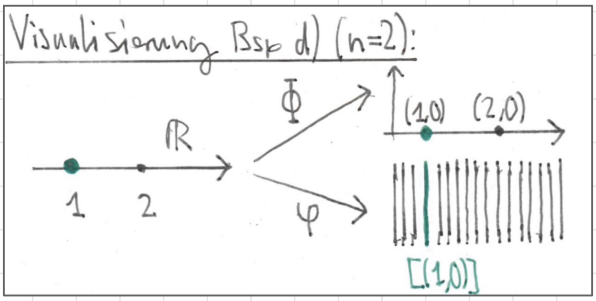
$$f : \mathbb{D}^2/\sim \;\longrightarrow S^2, \quad [v] \longmapsto g(v)$$

eine Bijektion und stetig, da $f \circ \pi = g$ stetig ist. Zudem ist $\mathbb{D}^2/\sim$ kompakt, da $\pi$ stetig und $\mathbb{D}^2$ kompakt ist. Da $S^2$ $T_2$-Raum ist, ist $f$ damit ein Homöomorphismus, d.h. $\mathbb{D}^2/\sim \;\cong S^2$. $\square$

**Lemma 2.** Seien $X, Y$ top. Räume, $\sim$ ÄR. auf $X$ und $\varphi : Y \longrightarrow X/\sim$ eine Abbildung. Falls $\Phi : Y \longrightarrow X$ stetig ist mit $\varphi = \pi \circ \Phi$, dann ist auch $\varphi$ stetig.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[ur, "\Phi"] \arrow[r, "\varphi"'] & X/\sim \end{tikzcd}$$

**Bew.** Direkt.




**Bsp.** Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $X = \mathbb{R}^n$ und

$$v \sim w :\Leftrightarrow v_i = w_i \text{ für } i \leq n-1$$

ÄR auf $X$. Sei

$$\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n/\sim,\ u \longmapsto [(u,0)].$$

Dann ist $\varphi$ stetig, da

$$\Phi : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ u \longmapsto (u,0)$$

stetig ist. Zudem ist

$$f : \mathbb{R}^n/\sim \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1},\ [v] \longmapsto (v_1, \dots, v_{n-1})$$

wohldef. Abbildung und stetig nach Lemma 1.

Dann gilt $f \circ \varphi = id_{\mathbb{R}^{n-1}}$ und $\varphi \circ f = id_{X/\sim}$.

Also ist $\varphi$ ein Homeomorphismus.

# EIGENSCHAFTEN

**Eigenschaft.** Sei $X$ top. Raum und $\sim$ ÄR.

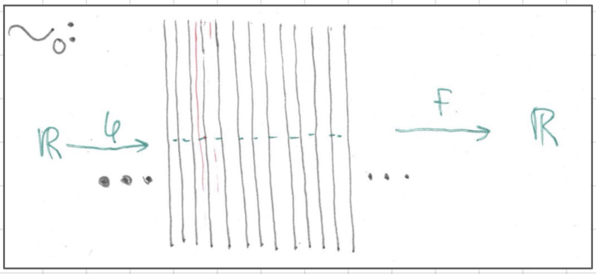
i) Ist $X$ kompakt / zsh. / wegzsh., so ist es auch der Quotient (da $\pi$ stetig und surjektiv ist).

ii) $\{z\} \subseteq X/\sim$ ist abgs. g.d.w. $\pi^{-1}(z)$ abgs. ist.

$\leadsto$ Insb. ist $X/\sim$ $T_1$-Raum g.d.w. alle Äquivalenzklassen in $X$ abgs. sind.

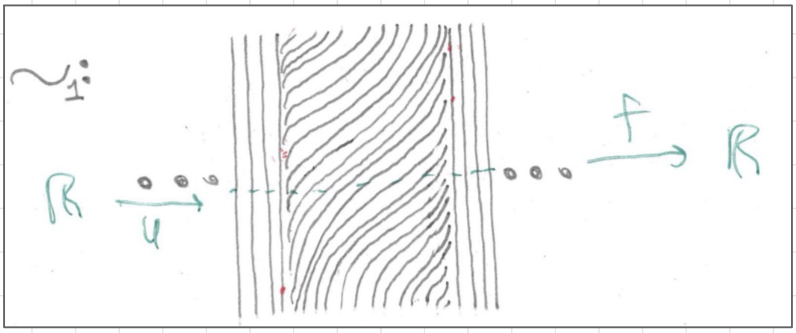
**Bsp.** Sei $X = \mathbb{R}^2$. 17.3.

0) $\sim_0$-Klassen: $\{(x,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ für $x \in \mathbb{R}$.



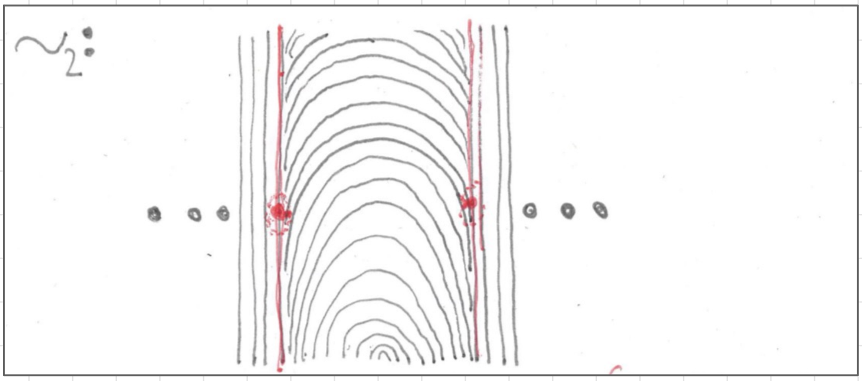
1) $\sim_1$-Klassen: $\{(x,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ für $|x| \geq \frac{\pi}{2}$

und $\{(\arctan(y + \tan x), y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ für $|x| < \frac{\pi}{2}$




2) $\sim_2$-Klassen: $\{(x,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ für $|x| \geq \frac{\pi}{2}$

und $\{(x, -(\tan x)^2 + y) \mid x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$ für $y \in \mathbb{R}$.




Beh. ∘ $X/\sim_i$ ist $T_1$-Raum für $i = 0, 1, 2$ (da $\sim_i$-Klassen abgs. sind).

∘ $X/\sim_0 \cong X/\sim_1 \cong \mathbb{R}$ aber $X/\sim_2$ ist nicht $T_2$.

Grund. Für $[(-\frac{\pi}{2}, 0)] \in U$ offen und $[(0, \frac{\pi}{2})] \in V$ offen gilt immer $U \cap V \neq \emptyset$.

# BEISPIELE: HOMOGENE RÄUME

Sei $G$ eine Gruppe und $H < G$ eine Untergruppe.

Def. Eine Gruppe $G$, die zugleich ein topologischer Raum ~~ist~~ heisst topologische Gruppe, wenn

$$m : G \times G \longrightarrow G, \ (a,b) \longmapsto a^{-1}b$$

$$\Updownarrow$$

stetig ist.

$(a,b) \longmapsto ab$
und $a \longmapsto a^{-1}$
stetig sind

Bsp. ∘ $G$ mit der diskreten topologie ist eine top. Gruppe.

∘ Matrixgruppen über $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit euklidischer Topologie, z.B.

∘ $SO_n(\mathbb{Q}) \subseteq SO_n(\mathbb{R}) \subseteq Sl_n(\mathbb{R}) \subseteq GL_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$

∘ $U_n \subseteq GL_n(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}^{n^2}$

Def. Sei $G$ eine top. Gruppe und $H < G$ eine Untergruppe. Dann heisst $G/H = G/\sim$ ein homogener Raum.

Bsp. Sei $G = \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit Multiplikation und $H = \mathbb{R}_{>0} < G$ Untergruppe. Dann definiert

$$f : G/H \longrightarrow S^1 \subseteq \mathbb{C}^\times$$
$$[z] \longmapsto \frac{z}{|z|}$$

ein Homeomorphismus (-> sogar ein Gruppenisomorphismus).

Grund: $f$ ist stetig, da $f \circ \pi : \mathbb{C}^\times \longrightarrow S^1, \ z \longmapsto \frac{z}{|z|}$ stetig ist. $f$ ist zudem eine Bijektion, $S^1$ ist $T_2$ und $G/H = \pi(S^1)$ ist kompakt. Also ist $f$ ein Homeomorphismus.

**Lemma 3.** Sei $G$ eine top. Gruppe und $H < G$.

Dann ist $G/H$ ein $T_2$-Raum g.d.w. $H \subseteq G$ abgeschlossen ist.

**Korollar.** Sei $G$ top. Gruppe. Da ist $G$ $T_2$ g.d.w.

$G$ $T_1$ ist g.d.w. $\{e\} \subseteq G$ abgs. ist.

**Überraschend.** Stetigkeit der algebraischen Struktur ergibt informationen über die Topologie.

**Bsp.** Es gibt keine top. Gruppenstruktur auf $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit der cofiniten Topologie.

**$T_2$-Kriterium.** Sei $X$ ein top. Raum.

i) $X$ ist $T_2$ g.d.w. $\Delta_X := \{(x,x) \in X \times X \mid x \in X\}$ in $X \times X$ abgs. ist.

Sei desweiteren $\sim$ eine ÄR auf $X$, s.d. $\pi : X \longrightarrow X/\sim$ offen ist, d.h. $U \in \mathcal{O}_X \Rightarrow \pi(U) \in \mathcal{O}_{X/\sim}$.

ii) $X/\sim$ ist $T_2$ g.d.w. $R_X := \{(x,y) \in X \times X \mid x \sim y\}$ in $X \times X$ abgs. ist.

**Bew.** Siehe Serie 4 Agb. 5.

**Bem.** Sei $G$ eine top. Gruppe und $H < G$. Dann ist

$\pi : G \longrightarrow G/H, \; g \longmapsto gH$ offen.

**Bew.** (Lemma 3)

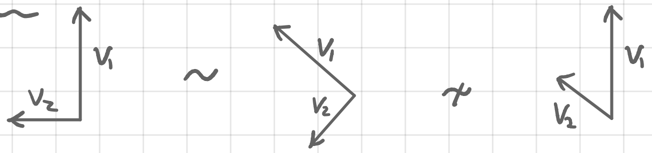
"$\Rightarrow$": $G/H$ $T_2$ $\Rightarrow$ $G/H$ $T_1$ $\Rightarrow$ $H \in G/H$ abgs.

$\Rightarrow \pi^{-1}(\{e\}) = H$ abgs. in $G$.

"$\Leftarrow$": Falls $H \subseteq G$ abgs. ist, dann ist
$$R = \{(a,b) \in G \times G \mid a^{-1}b \in H\}$$
und es gilt $R = m^{-1}(H)$. Da $m$ per Def. der top. Gruppe stetig ist, ist $R$ abgs. Also ist $G/H$ $T_2$. $\square$

<u>Bsp.</u> "Basen auf $\mathbb{R}^n$ bis auf Isometrie".

Visuell für $n=2$:




Basis $B \in GL_n(\mathbb{R})$ mit $B \sim A :\Longleftrightarrow \exists h \in H = O_n(\mathbb{R})$ mit $hA = B \Leftrightarrow A^{-1}B \in H = O_n(\mathbb{R})$.

$\rightsquigarrow GL_n(\mathbb{R})/O_n(\mathbb{R})$ homogener Raum.

<u>Bem.</u> (Homogene Räume und top. Gruppen sind "homogen")

Sei $G$ eine top. Gruppe.

- Für $a \in G$ sind
$$l_a : G \longrightarrow G,\ g \longmapsto ag$$
und
$$r_a : G \longrightarrow G,\ a \longmapsto ga$$
Homeomorphismen.
- Sei $H < G$ Untergruppe und $x, y \in G/H$. Dann ex. ein Homeomorphismus $f: G/H \longrightarrow G/H$ mit $f(x) = y$.

# Beispiele: Orbiträume

**Bsp.** $SO_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $A \longmapsto Av$.

**Def.** Sei $G$ eine top. Gruppe und $X$ ein top. Raum. Eine Operation / stetige Aktion / stetige Wirkung von $G$ auf $X$ ist eine stetige Abbildung

$$G \times X \longrightarrow X, \ (g, x) \longmapsto gx,$$

so dass

i) $\forall x \in X: \ ex = x$

ii) $\forall x \in X \ \forall g, h \in G: \ g(hx) = (gh)x$

gilt. Man nennt einen top. Raum $X$ mit einer Operation von $G$ auf $X$ auch einen $G$-Raum. Sei $X$ ein $G$-Raum und $x \in X$. Dann heisst

$$Gx := \{gx \mid x \in X\}$$

der Orbit oder die Bahn von $x$. Die Bahnen $Gx$ sind $\sim$-Klassen mit ÄR. $x \sim y :\Leftrightarrow \exists g \in G: gx = y$.
Zudem heisst $X/G := X/\sim$ Orbitraum / Bahnenraum.

**Bsp.** Sei $G := SO_n(\mathbb{R})$. Dann gilt für alle $v \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} Gv &= \{Av \in \mathbb{R}^n \mid A \in SO_n(\mathbb{R})\} \\ &= \{w \in \mathbb{R}^n \mid |w| = |v|\}. \end{aligned}$$

Zudem gilt $\mathbb{R}^n/G \cong [0, \infty)$ durch

$$\mathbb{R}^n/G \longrightarrow [0,\infty), \ Gv \longmapsto |v|.$$

**Bsp.** ($\mathbb{RP}^n$) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $G = \mathbb{R}^\times$ mit Multiplikation **20.3.**
auf $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Dann ist

$$G \times X \longrightarrow X, \ (\lambda, x) \longmapsto \lambda x.$$

Dann heisst $\mathbb{RP}^n := X/G$ n-dimensionaler projektiver Raum. → Siehe Serie 4 Agb. 4.

**Def.** Sei $X$ ein top. Raum und $x \in X$. Sei weiter $G$ eine top. Gruppe, die auf $X$ operiert (d.h. $X$ ist ein $G$-Raum). Dann heisst

$$G_x := \{ g \in G \mid gx = x \} < G$$

die Stabilisatorgruppe / der Stabilisator von $x$.

**Satz.** (topologischer Bahnensatz) Sei $X$ ein $G$-Raum und $x \in X$. Dann ist

$$f : G/G_x \longrightarrow Gx, \ gG_x \longmapsto gx$$

eine stetige Bijektion.

**Bew.**
- $f$ ist wohl-def., denn

$$aG_x = bG_x \Rightarrow \exists h \in G_x : a = bh$$
$$\Rightarrow ax = bhx = bx.$$

- $f$ ist per Def. surjektiv
- $f$ ist injektiv, denn

$$ax = bx \Rightarrow a^{-1}bx = x$$
$$\Rightarrow a^{-1}b \in G_x \Rightarrow aG_x = bG_x.$$

- $f$ ist stetig, denn

$$f \circ \pi : G \longrightarrow Gx, \ g \longmapsto gx$$

ist stetig da $i: G \longrightarrow G \times X$, $g \longmapsto (g, x)$ stetig ist. $\square$

<u>Bsp.</u> $G = SO_n(\mathbb{R})$, $X = \mathbb{R}^n$ und sei $x = e_1$. Dann gilt

- $Gx = S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$
- $G_x = \{A \in G \mid Ax = x\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \,\middle|\, B \in SO_{n-1}(\mathbb{R}) \right\}$$

Also ex. nach dem Satz eine stetige Bijektion

$$f: G/G_x \longrightarrow Gx = S^{n-1}.$$

Zudem ist $S^{n-1}$ $T_2$-Raum und $G/G_x$ ist kompakt (weil $G \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ abgs. und beschränkt, also kompakt ist). Also gilt $G/G_x \cong S^{n-1}$.

$\longrightarrow$ Also "$SO_n(\mathbb{R})/SO_{n-1}(\mathbb{R}) \cong S^{n-1}$".

## Beispiele: Zusammenschlagen

<u>Def.</u> Sei $X$ top. Raum und $A \subseteq X$ mit $A \neq \emptyset$. Def. dann $X/A := X/\sim$ für $x \sim y :\Leftrightarrow x = y$ oder $x, y \in A$.

<u>Def.</u> Sei $X$ ein top. Raum und $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ alle nicht-leer und paarweise disjunkt. Def. dann

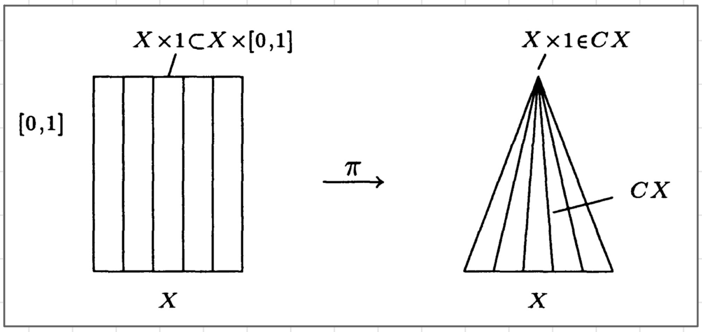
$$X/A_1, \ldots, A_n := X/\sim$$

für $x \sim y :\Leftrightarrow x = y$ oder $\exists i \in \{1, \ldots, n\}: x, y \in A_i$.

**Bem.** Falls $X$ metrisierbar ist und $A_1, \dots, A_n$ alle abgs., dann ist $X/A_1, \dots, A_n$ ein $T_2$-Raum.

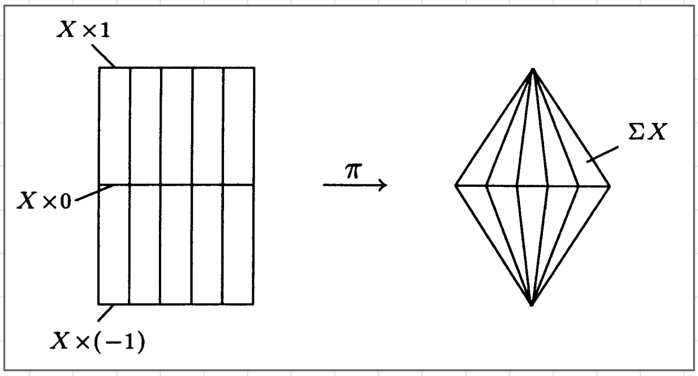
**Konstruktion 1.** (Kegel) 24.3.

Sei $X$ ein top. Raum. Dann heisst
$$CX := X \times [0,1] / X \times \{1\}$$
der Kegel von $X$.




**Konstruktion 2.** (Suspension)

Sei $X$ ein top. Raum. Dann heisst
$$\Sigma X := X \times [-1,1] / X \times \{-1\}, X \times \{1\}$$
die Suspension/Einhängung von $X$.




**Bsp.** Für $\{a,b\}$ mit der diskreten Topologie gilt
$$\Sigma\{a,b\} \cong S^1.$$

## Konstruktion 3. (Wedge / Smash)

Seien $X$ und $Y$ top. Räume und $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ Basispunkte. Dann heisst

$$X \vee Y := X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y \subseteq X \times Y$$

wedge Produkt und

$$X \wedge Y := X \times Y / X \vee Y$$

heisst smash Produkt.

Bsp. Seien $X = S^n$ und $Y = S^m$ und $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$.

Dann gilt $X \wedge Y \cong S^{n+m}$.

Grund: Es gilt $S^n \cong \widehat{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.

Wähle $x_0 = \infty \in \widehat{\mathbb{R}^n} = X$ und $y = \infty \in \widehat{\mathbb{R}^m} = Y$.

Definiere

$$g : \widehat{\mathbb{R}^n} \times \widehat{\mathbb{R}^m} \longrightarrow \widehat{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m}$$

$$(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longmapsto (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

$$\mathbb{R}^n \times \{\infty\} \cup \{\infty\} \times \mathbb{R}^m \longmapsto \infty.$$

Dann gilt

- $g$ ist stetig
- $f : \widehat{\mathbb{R}^n} \wedge \widehat{\mathbb{R}^m} \longrightarrow \widehat{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m}$, $[z] \longmapsto [g(z)]$

  ist wohldef., Bijektion (da $f^{-1}(\infty) = X \vee Y$) und $f$ ist stetig. Also ist $f$ Homöomorphismus (da $\widehat{\mathbb{R}^n} \wedge \widehat{\mathbb{R}^m}$ kompakt und $\widehat{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \cong S^{n+m}$ $T_2$-Raum).

# ZUSAMMENKLEBEN VON RĀUMEN

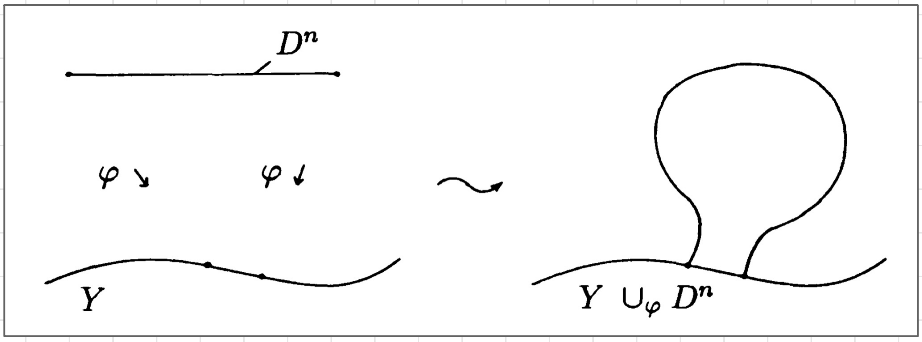
**Def.** Seien $X, Y$ top. Räume, $X_0 \subseteq X$ und

$$\varphi : X_0 \longrightarrow Y$$

stetig. Sei $\sim$ die von $\varphi(x) \sim x$ erzeugte ĀR auf $X + Y$. Dann heisst

$$Y \cup_\varphi X := X + Y / \sim$$

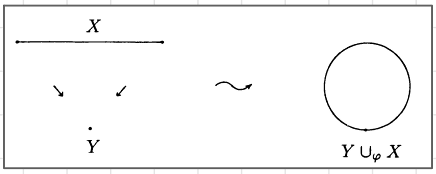
die Anhäftung / Verklebung von $X$ an $Y$.




**Bem.**

i) $X \longrightarrow Y \cup_\varphi X$, $x \longmapsto [x]$ ist stetig, da
   $i_X : X \longrightarrow X + Y$ und $\pi$ stetig sind.

ii) Für $A \subseteq X$ mit $A \neq \varnothing$. Dann gilt




$$X / A \cong \{p\} \cup_\varphi X$$

mit $\varphi : A \longrightarrow \{p\}$ für einen abstrakten Punkt $p$.

iii) $i : Y \hookrightarrow Y \cup_\varphi X$, $y \longmapsto [y]$ ist stetige Injektion und sogar Homeomorphismus auf ihr Bild, d.h. $i|_Y^{\mathrm{Bild}(i)}$ ist Homeomorphismus.

**Konstruktion 4.** (Abbildungstorus)

Sei $\alpha : X \to X$ ein Homeomorphismus. Dann heisst

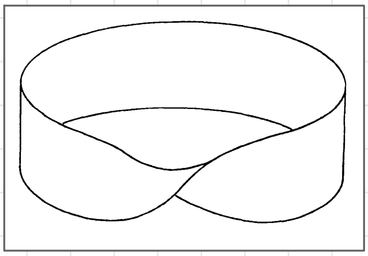
$$X \times [0,1]/\alpha := X \times [0,1]/\sim ,$$

wobei $\sim$ die von $(x,0) \sim (\alpha(x), 1)$ erzeugte ÄR ist, der Abbildungstorus.

**Bsp.** • Für $\alpha : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$, $x \longmapsto -x$ heisst

$$M := [-1,1] \times [0,1]/\alpha$$

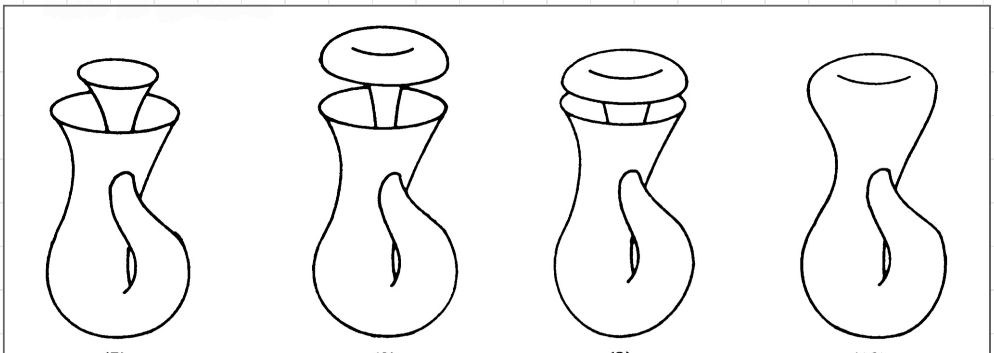
das Möbiusband.



• Für $\beta : S^1 \longrightarrow S^1$, $z \longmapsto \bar{z}$ heisst

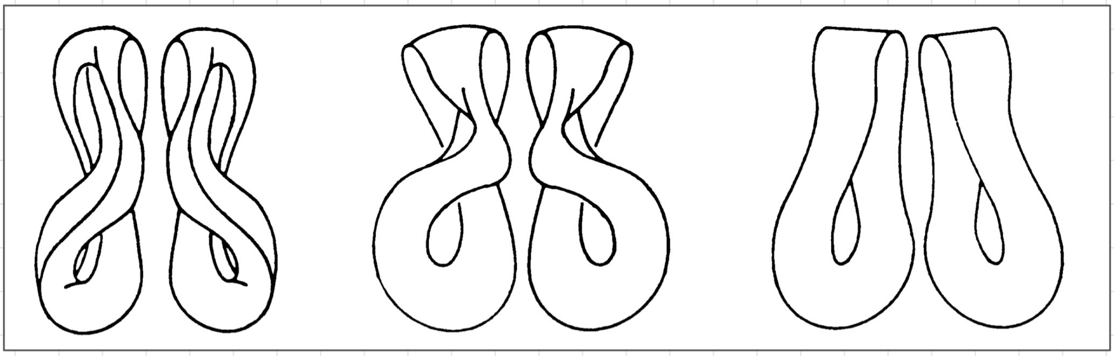
$$K := S^1 \times [0,1]/\beta$$

die Kleinsche Flasche.

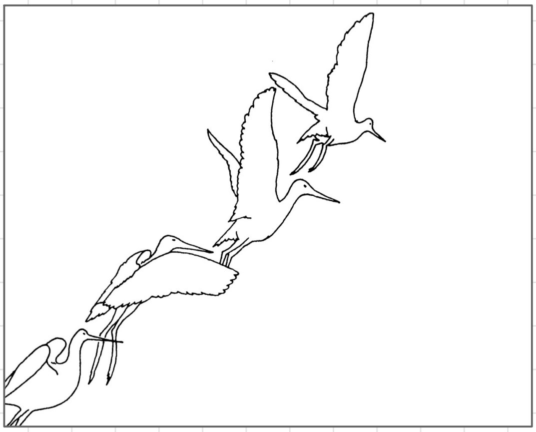


(7) (8) (9) (10)

**Übrigens.** Für $\varphi : \partial M \longrightarrow \partial M$, $m \longmapsto m$ gilt $M \cup_\varphi M \cong K$.



# 3. HOMOTOPIE



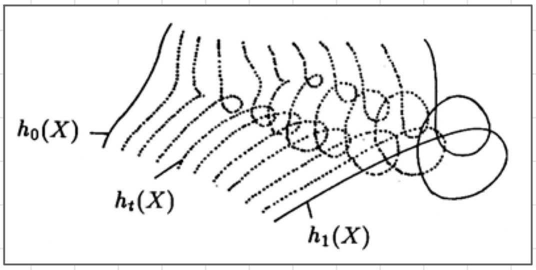
## HOMOTOPE ABBILDUNGEN

**Def.** Seien $f, g : X \longrightarrow Y$ stetige Abbildungen. Eine stetige Abbildung

$$h : X \times [0,1] \longrightarrow Y$$

mit $h(x,0) = f(x)$ und $h(x,1) = g(x)$ für alle $x \in X$ heisst Homotopie zwischen $f$ und $g$ und wir schreiben $f \underset{h}{\simeq} g$. In diesem Fall heissen $f$ und $g$ homotop und wir schreiben $f \simeq g$.

Ist $h$ eine Homotopie zwischen $f$ und $g$, dann setzen wir $h_t : X \longrightarrow Y$, $x \longmapsto h(x,t)$ für alle $t \in [0,1]$.




**Bsp.**
- Für alle stetigen $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gilt $f \underset{h}{\simeq} g$ mit
$$h : X \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \ (x,t) \longmapsto (1-t)f(x) + t g(x).$$
- Für stetige $f, g : \{p\} \longrightarrow X$ gilt $f \simeq g$ g.d.w. ein Weg von $f(p)$ nach $g(p)$ ex.

**Bem.** Seien $X, Y$ top. Räume. Dann bildet Homotopie eine ÄR auf der Menge der stetigen Abb. von $X$ nach $Y$.

Lemma. (Verklebungslemma)

Sei $f: Z \longrightarrow Y$ beliebige Abbildung mit $Z = A \cup B$ und $A, B \subseteq Z$ abgs., $f|_A$, $f|_B$ beide stetig. Dann ist $f$ stetig.

Notation. Bezeichne $[X, Y] :=$ "Menge der Homotopieklassen".

Eigenschaften.

i) Seien $f, g: X \to Y$ stetig und homotop und $\bar{f}, \bar{g}: Y \to Z$ stetig, homotop. Dann gilt

$$\bar{f} \circ f \simeq \bar{g} \circ g.$$

implizit also auch stetig

ii) Seien $f_i, g_i: X_i \longrightarrow Y_i$ homotop für $i \in \{1, 2\}$. Dann gilt $f_1 \times f_2 \simeq g_1 \times g_2$.

# HOMOTOPIEÄQUIVALENZ

Def. Seien $X, Y$ top. Räume. Eine stetige Abbildung $f: X \to Y$ heisst Homotopieäquivalenz, wenn eine stetige Abbildung $g: Y \to X$ existiert mit

$$g \circ f \simeq id_X \quad \text{und} \quad f \circ g \simeq id_Y.$$

Dann heisst $g$ Homotopieinverse von $f$.

Falls eine Homotopieäquivalent $f$ von $X$ nach $Y$ ex., dann heisst $X$ homotopieäquivalent zu $Y$ und wir schreiben $X \underset{f}{\simeq} Y$ oder $X \simeq Y$.

Bem. Falls $X \cong Y$ gilt, so folgt $X \simeq Y$.

**Bsp.** $\circ$ $\mathbb{R}^n \simeq \{p\}$

- $\mathbb{D}^n \simeq \{p\}$
- $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq \mathbb{D}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$.

**Def.** Ein top. Raum $X$ heisst Kontrahierbar / Zusammenziehbar, wenn er homotopieäquivalent zu einem Punkt ist, d.h. $X \simeq \{p\}$. 27.3.

**Bem.** Falls $X \simeq Y$ gilt, dann gilt

- $X$ wegzsh. g.d.w. $Y$ wegzsh.
- $X$ zsh. g.d.w. $Y$ zsh.
- falls zusätzlich $Y \simeq Z$, dann folgt $X \simeq Z$.

$\rightarrow$ $\simeq$ ist also eine ÄR.

**Bsp.** $\mathbb{Q} \not\simeq \{p\}$, z.B. da $\mathbb{Q}$ nicht zsh. ist.

**Def.** Sei $X$ top. Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heisst Retrakt von $X$, falls eine stetige Abbildung

$$\rho : X \longrightarrow A$$

mit $\rho|_A = id_A$ existiert. So ein $\rho$ heisst Retraktion.

**Bsp.** $\circ$ $A = [0,1]$ ist ein Retrakt von $X = [0,1] \cup [4,6]$ mit Retraktion $\rho : X \to A,\ x \longmapsto \min(x, 1)$.

- $\{a,b\} \subseteq [a,b]$ mit $a<b$ ist kein Retrakt.

Grund: Agn. es ex. Retraktion $\rho : [a,b] \longrightarrow \{a,b\}$.
Dann ist $\rho$ stetig und surj., doch da $\{a,b\}$ nicht zsh. ist, ist dies ein Widerspruch zum Zusammenhang von $[a,b]$.

- $S^{n-1} \subseteq \mathbb{D}^n$ ist kein Retrakt.

**Def.** Sei $X$ top. Raum und $A \subseteq X$. Eine Retraktion $\varrho: X \to A$ heisst Deformationsretraktion, falls die Abb. $X \to X, x \longmapsto \varrho(x)$ homotop zu $id_X$ ist.
$\varrho$ heisst starke Deformationsretraktion, falls eine solche Homotopie $h$ ex. mit $h(a,t) = a$ für alle $a \in A$.
$A$ heisst dementsprechend dann (starker) Deformationskontrakt.

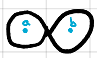
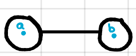
**Bsp.** $\circ$ $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist ein starker Deformationskontrakt mit $\varrho: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow S^{n-1}, \ v \longmapsto \frac{v}{\|v\|}$.

**Lemma.** Ist $A$ Deformationsretrakt von $X$, dann gilt

$$X \simeq A.$$

**Bew.** Sei $f: X \to A$ Deformationsretraktion und $g: A \to X, \ a \longmapsto a$. Dann gilt

$$g \circ f \simeq id_X \quad \text{und} \quad f \circ g = id_A. \qquad \square$$

**Bsp.** Sei $\mathbb{R}^2 \supseteq X :=$  $\simeq$  $=: Y \subseteq \mathbb{R}^2$.
Grund: $X, Y \subseteq \mathbb{D}^2 \setminus \{a,b\}$ sind beides starke Deformationsretrakte.

31.3.

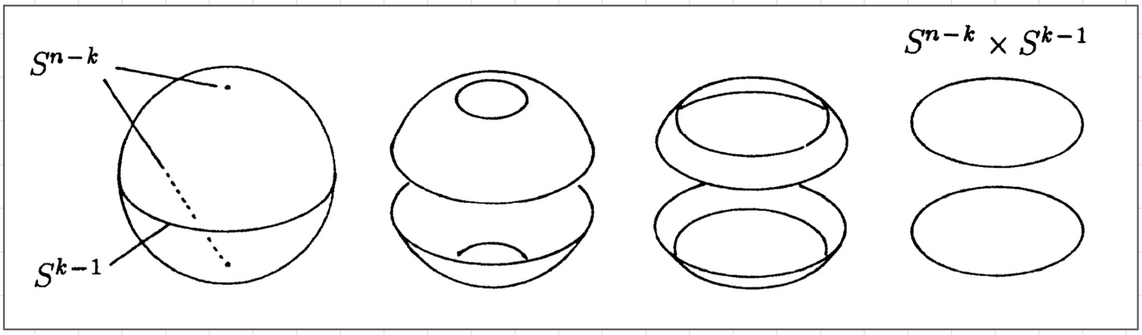
**Bsp.** $\circ$ $S^{n-1} \subseteq \mathbb{D}^n \setminus \{0\}$ ist ein starker Deformationsretrakt.
$\circ$ Sei $\varphi: S^{n-1} \longrightarrow Y$ stetig. Dann ist

$$i(Y) \subseteq Y \cup_\varphi (\mathbb{D}^n \setminus \{0\}) =: Q$$

ein starker Deformationsretrakt.

- Seien $0 < k \leq n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$A := \frac{\sqrt{2}}{2}(S^{k-1} \times S^{n-k}) \subseteq S^n \setminus (S^{k-1} \times \{0\} \cup \{0\} \times S^{n-k})$$
$$=: X \subseteq \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k+1}.$$




Dann ist $A$ starker Deformationsretrakt von $X$.

Grund: Sei

$$g : X \longrightarrow A, \ (v, w) \longmapsto \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{v}{|v|}, \frac{w}{|w|}\right)$$

und

$$h : X \times [0,1] \longrightarrow X,$$
$$((v,w),t) \longmapsto \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(tv + (1-t)\frac{v}{|v|}, \ tw + (1-t)\frac{w}{|w|}\right)}{\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\left(tv + (1-t)\frac{v}{|v|}, \ tw + (1-t)\frac{w}{|w|}\right)\right|}.$$

Lemma. Sei $X$ top. Raum. $X$ ist kontrahierbar g.d.w. $\{x_0\} \subseteq X$ ein Deformationsretrakt ist.

Bew. "$\Leftarrow$": Per Def.

"$\Rightarrow$": Sei $f : X \to \{p\}$ mit Homotopieinversem $g$.

Setze $x_0 := g(p)$ und

$$g : X \to \{x_0\}, \ x \longmapsto x_0 = (g \circ f)(x).$$

Also ist $X \to X, \ x \longmapsto x_0$ gleich $g \circ f$ und per Annahme gilt $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$. $\square$

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[dr, dashed, "u"] \arrow[drr, bend left, "q_2"] \arrow[ddr, bend right, "q_1"'] & & \\ & P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & Y \arrow[d, "g"] \\ & X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

# Exkurs: Kategorien

## Kategorien

**Def.** Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus

i) Einer Klasse von mathematischen Objekten $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, Objekte genannt.

ii) Einer Menge $\mathrm{Mor}(X,Y)$ pro Paar von Objekten $(X,Y)$, genannt die Morphismen von $X$ nach $Y$, wobei $\mathrm{Mor}(X,Y)$ und $\mathrm{Mor}(X',Y')$ disjunkt sind falls $(X,Y) \neq (X',Y')$.

iii) Einer Abbildung

$$\circ : \mathrm{Mor}(X,Y) \times \mathrm{Mor}(Y,Z) \longrightarrow \mathrm{Mor}(X,Z)$$

pro Tripel $(X,Y,Z)$ von Objekten $X, Y, Z$, die Verknüpfung genannt, welche folgende Axiome erfüllt:

- Axiom 1. (Assoziativität) Für alle $X,Y,Z,W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $f \in \mathrm{Mor}(X,Y)$, $g \in \mathrm{Mor}(Y,Z)$ und $h \in \mathrm{Mor}(Z,W)$ gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

- Axiom 2. (Identität) Zu jedem Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ex. ein $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Mor}(X,X)$, s.d. für alle $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ gilt

$$\forall f \in \mathrm{Mor}(X,Y) : f \circ \mathrm{id}_X = f$$

und

$$\forall g \in \mathrm{Mor}(Y,X) : \mathrm{id}_X \circ g = g.$$

Bsp.

1) **Set** mit
- $Ob(\mathbf{Set})$ = Klasse aller Mengen
- $Mor(X,Y)$ = Menge aller Abbildungen von $X$ nach $Y$
- übliche Verknüpfung.

2) **Top** mit:
- $Ob(\mathbf{Top})$ = Klasse aller top. Räume
- $Mor(X,Y)$ = Menge aller stetigen Abbildungen
- übliche Verknüpfung.

3) Die Kategorie der Gruppen **Grp**

4) Die Kategorie der Vektorräume über einen Körper $\mathbb{K}$, bezeichnet mit $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$.

5) Kat. der Körper.

6) Kat. der Ringe mit 1.

7) Kat. der punktierten top. Räume $\mathbf{Top}_\circ$ mit
- $Ob(\mathbf{Top}_\circ) := \{(X, x_0) \mid X \in \mathbf{Top},\ x_0 \in X\}$.
- $Mor((X, x_0), (Y, y_0)) = \{f : X \to Y \mid f \text{ stetig mit } f(x_0) = y_0\}$

8) Die leere Kategorie mit $Ob(\mathcal{C}) = \emptyset$.

9) Sei $G$ eine Gruppe. Def. eine Kategorie $\mathcal{D}$ durch
- $Ob(\mathcal{D}) = \{p\}$

- $\mathrm{Mor}(p,p) = G$
- $\mathrm{Mor}(p,p) \times \mathrm{Mor}(p,p) \longrightarrow \mathrm{Mor}(p,p)$, $(f,g) \longmapsto f \circ g$.

10) Die Homotopiekategorie $\mathcal{H}_{\mathcal{Top}}$ mit
   - $\mathrm{Ob}(\mathcal{H}_{\mathcal{Top}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{Top})$
   - $\mathrm{Mor}(X,Y) = [X,Y] =$ Homotopieklassen von stetigen abbildungen von $X$ nach $Y$.
   - $[X,Y] \times [Y,Z] \longrightarrow [X,Z]$, $([f],[g]) \longmapsto [g \circ f]$.

<u>Def.</u> Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Ein $f \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ heisst Isomorphismus, falls ein $g \in \mathrm{Mor}(Y,X)$ ex. mit $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$. In diesem Fall heissen $X$ und $Y$ Isomorph.

<u>Bsp.</u> In $\mathcal{H}_{\mathcal{Top}}$ gilt $id_X = [id_X] \in \mathrm{Mor}(X,X)$ und $[f] \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ ist ein Isomorphismus g.d.w. $f$ eine Homotopieäquivalenz ist.

<u>Achtung.</u> Mengen sind Klassen, aber Klassen sind im allg. keine Mengen.

<u>Def.</u> Eine Kategorie heisst kleine Kategorie, wenn $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ eine Menge ist.

# FUNKTOREN



<u>Bsp.</u> Jedem Körper $\mathbb{K}$ lässt sich die Einheitengruppe $\mathcal{F}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^\times$ zuordnen und jedem Körperhomomorphismus $f: \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ lässt sich ein Gruppenhomomorphismus

$$\mathcal{F}(f): \mathcal{F}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{L}),\ x \longmapsto f(x)$$

zuordnen.

<u>Def.</u> Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Eine Zuordnung $\mathcal{F}$, die jedem $X \in Ob(\mathcal{C})$ genau ein $Y \in Ob(\mathcal{D})$ zuordnet und jedem Morphismus $f \in Mor(X,Y)$ genau ein Morphismus $\mathcal{F}(f) \in \begin{cases} Mor(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))^{(1)} \\ Mor(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(X))^{(2)} \end{cases}$ zuordnet heisst covarianter Funktor$^{(1)}$/ contravarianter Funktor$^{(2)}$, wenn

i) $\forall X \in Ob(\mathcal{C})$: $\mathcal{F}(id_X) = id_{\mathcal{F}(X)}$.

ii) $\forall X, Y, Z \in Ob(\mathcal{C})\ \forall f \in Mor(X,Y)\ \forall g \in Mor(Y,Z)$ gilt

$$\mathcal{F}(g \circ f) = \begin{cases} \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)^{(1)} \\ \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)^{(2)} \end{cases} \qquad (\text{Kettenregel})$$

<u>Bsp.</u> Folgendes sind kovariante Funktoren:

- $\mathcal{T}op \longrightarrow \mathcal{S}et,\ (X, \mathcal{O}) \longmapsto X,\ f \longmapsto f$
- $\mathcal{T}op \longrightarrow \mathcal{H}\mathcal{T}op,\ (X, \mathcal{O}) \longmapsto (X, \mathcal{O}),\ f \longmapsto [f]$.

<u>Bsp.</u> $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \mathcal{V}ect_K$, $\mathcal{F}: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, wobei für $V, W \in Ob(\mathcal{C})$ und $\varphi \in Hom(V, W)$ mit

$$\mathcal{F}(V) := V^* = Hom(V, K) \in Ob(\mathcal{D})$$

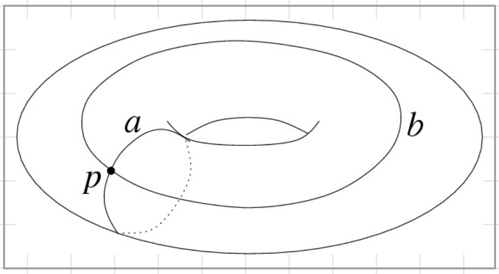
$$\mathcal{F}(\varphi) := \varphi^* \in Hom(W^*, V^*)$$

ist ein contravarianter Funktor.

<u>Bem.</u> Sei $\mathcal{F}: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor. Falls $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ und $f \in Mor(X, Y)$ ein Isomorphismus ist, so ist $\mathcal{F}(f)$ auch ein Isomorphismus.

# 4. Fundamentalgruppe

## Definitionen und Funktorialität




<u>Def.</u> Ein Weg $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ heisst **Schleife** (an $x_0$) falls $\alpha(0) = \alpha(1)$ $(= x_0)$.

Zwei Wege $\alpha, \beta$ heissen **homotop rel. Endpunkte**, falls $\alpha \simeq \beta$ via Homotopie $h$, s.d.

$$h(0,t) = \alpha(0), \; h(1,t) = \alpha(1)$$

für alle $t \in [0,1]$ gilt.

Zwei Schleifen an $x_0$ heissen **homotop rel. $x_0$**, falls sie homotop rel. Endpunkte sind.

Falls $\alpha$ Weg von $a$ nach $b$ und $\beta$ Weg von $b$ nach $c$ ist, dann ist

$$\alpha\beta : [0,1] \longrightarrow X, \; t \longmapsto \begin{cases} \alpha(2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

ein Weg von $a$ nach $c$, **Verknüpfung** von $\alpha$ und $\beta$ genannt.

<u>Bem.</u> Falls $\alpha \simeq \alpha'$ und $\beta \simeq \beta'$ rel. Endpunkte, so gilt $\alpha\beta \simeq \alpha'\beta'$ rel. Endpunkte

<u>Def. / Satz.</u> Sei $X$ top. Raum und $x_0 \in X$. Dann bildet

$$\pi_1(X, x_0) := \{ [\alpha] \mid \alpha \text{ ist Schleife an } x_0 \}$$

Menge aller zu $\alpha$ homotopen Wege rel. Endpunkte

mit der Multiplikation

$$\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

$$([\alpha], [\beta]) \longmapsto [\alpha\beta]$$

eine Gruppe, die Fundamentalgruppe genannt.

Bew. Die Multiplikation ... 17.4.

- ist wohldef.: $[\alpha] = [\alpha'], [\beta] = [\beta']$ $\overset{\text{Bem.}}{\Longrightarrow}$ $[\alpha\beta] = [\alpha'\beta']$

- hat eine Eins: Sei $e := [\text{konst}_{x_0}]$. Dann gilt
$$[\alpha]e = e[\alpha] = [\alpha].$$

- hat Inverse: $[\alpha][\alpha^-] = e = [\alpha^-][\alpha]$ für
$$\alpha^- : [0,1] \to X, \quad t \mapsto \alpha(1-t).$$

- ist assoziativ: Folgt direkt.

Damit ist $\pi_1(X, x_0)$ eine Gruppe. $\square$

Bsp. a) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $x_0 \in K$. Dann ist $\pi_1(K, x_0)$ trivial.

Satz 1. a) $\pi_1(S^n, x_0) = \{e\}$ für alle $n \geq 2$, $z_0 \in S^n$

b) $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(S^n, 1)$, $k \longmapsto [\alpha_k]$ für
$$\alpha_k : [0,1] \longrightarrow S^1, \quad s \longmapsto e^{2\pi i k s}$$
ist ein Gruppenisomorphismus.

Bew. (nur (a)) Sei $\alpha$ eine Schleife an $x_0$ in $S^n$ für $n \geq 2$.

Beh. $\exists \beta$ Schleife an $x_0$ mit $\alpha \simeq \beta$ rel $x_0$ und $\beta$ ist nicht surj.

Daraus folgt $[\alpha] = [\beta]$ und $\exists x_0 \in S^n \setminus \operatorname{Im}(\beta)$. Nun ex ein Homeom

$$\varphi : S^n \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt $\quad \varphi \circ \beta \simeq \text{konst}_{\varphi(x_0)}$ via $h$ da $\mathbb{R}^n$ konvex ist

$$\Rightarrow \beta \simeq \text{konst}_{x_0} \quad \text{via } \varphi^{-1} \circ h$$

$$\Rightarrow \alpha \simeq \beta \simeq \text{konst}_{x_0}$$

$$\Rightarrow [\alpha] = e.$$

Grund. (für die Beh) Sei $\alpha$ eine Schleife an $x_0$ mit $\operatorname{Im}(\alpha) = S^n$. Sei $H$ $\cong \mathbb{D}^n$ die obere Hämisphäre mit Zentrum $x_0$. Seien $\{I_j\}_{j\in J}$ die maximalen Intervalle mit $\alpha(I_j) \subseteq H$.

Setze
$$\beta(s) = \begin{cases} \alpha(s) & \text{für } s \notin \bigcup_{i\in J} I_i \\ \beta_j(s) & \text{für } s \in I_j, \end{cases}$$

wobei $\beta_j : I_j \longrightarrow \partial\mathbb{D}^n$. $\square$

## Lemma 1. (Funktorialität)

i) Sei $f : X \to Y$ stetig, $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$ mit $f(x_0) = y_0$. Dann definiert

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$
$$[\alpha] \longmapsto [f \circ \alpha]$$

ein Gruppenhomomorphismus.

ii) Es gilt $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X, x_0)}$.

iii) Sei zudem $g : Y \to Z$ stetig, $z_0 \in Z$ mit $g(y_0) = z_0$. Dann gilt

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

$\longrightarrow \pi_1(f) = f_*$ ist ein covarianter Funktor.

Bew. Serie 7 Agb. 1.

Korollar. Falls $f: X \to Y$ Homeomorphismus ist und $x_0 \in X$, dann ist $f_*$ ein Gruppenisomorphismus.

Bew. Benutze Lemma 1.

# ANWENDUNGEN.

Satz 2. (Fixpunktsatz von Brouwer) Sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$f: \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{D}^n$$

stetig. Dann hat $f$ einen Fixpunkt.

21.4.

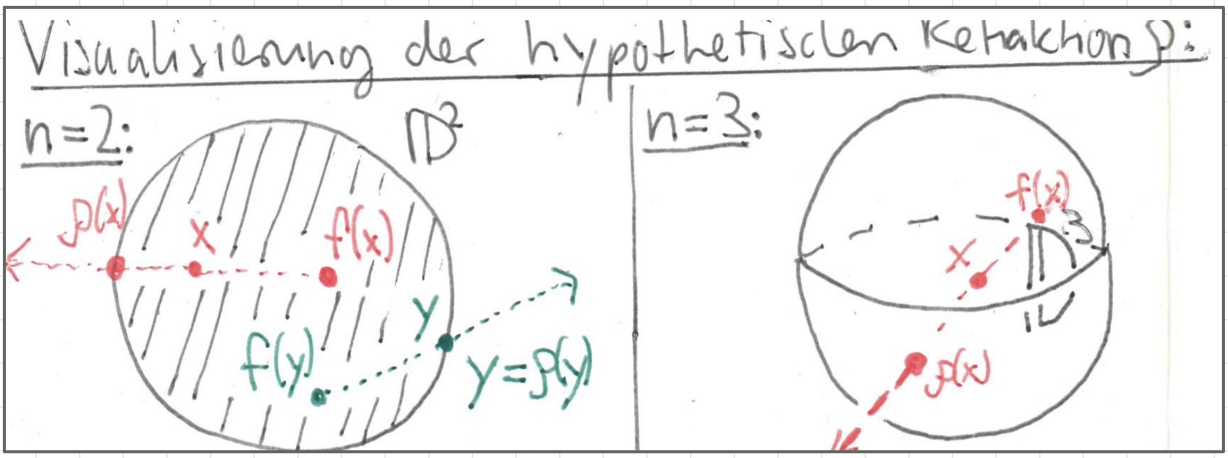
Bew. (nur für $n \leq 2$)

Gegenannahme: Es ex. $f$ mit $\forall x \in \mathbb{D}^n: f(x) \neq x$.

Schritt 1: Es ex. eine Retraktion $\rho: \mathbb{D}^n \longrightarrow S^{n-1}$

$\rightarrow$ Definiere $\rho(x)$ als den eindeutigen Punkt mit

$$\{\rho(x)\} = S^{n-1} \cap \{f(x) + r(x - f(x)) \mid r > 0\}$$



Schritt 2: Es ex. keine solche Retraktion

→ • $n=1$: Bereits gezeigt (W6 Bsp. f)

• $n=2$: Agn. es ex. eine Retraktion $\rho: \mathbb{D}^2 \to S^1$.

$\Rightarrow \mathrm{id}_{S^1} = \rho \circ i$, wobei $i: S^1 \hookrightarrow \mathbb{D}^2$.

Aus Lemma 1 folgt

$$\mathrm{id}_{\pi_1(S^1,1)} = (\mathrm{id}_{S^1})_* = (\rho \circ i)_*$$
$$= \rho_* \circ i_*$$

$\Rightarrow \rho_*$ surj. und $i_*$ injektiv.

Dies ist ein Widerspruch, da

Satz 1

$$\pi_1(\mathbb{D}^2, 1) = \{e\}, \quad \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}.$$

Diagrammatisch:

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{D}^2 \arrow[r, "\rho"] & S^1 \\ \pi_1(S^1,1) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \pi_1(\mathbb{D}^2,1) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "="] & \pi_1(S^1,1). \arrow[d, phantom, "\cong"] \\ \mathbb{Z} & \{e\} & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

□

**Bem.** Sei $\rho: X \to A$ Retraktion. Dann ist $i_*$ immer injektiv und $\rho_*$ surj.

Ist $\rho$ sogar Deformationsretrakt, dann sind $\rho_*$ und $i_*$ Gruppenisomorphismen.

**Bsp.** Es gilt

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x_0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n=2 \\ \{e\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Genauer: $\mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$ durch

$$d \longmapsto [\alpha_d : [0,1] \to \mathbb{C}^*, \; s \longmapsto e^{2\pi i d s}] \qquad (*)$$

**Satz 3.** (Fundamentalsatz der Algebra)

Sei $p(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \dots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[z]$.
Dann hat $p$ eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

**Bew.** Gegenannahme: Agn. es ex. keine Nullstelle.

Wähle $r > \max\left(\sum_{i=1}^{d-1} |a_i|, 1\right)$ und

$$\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}^*, \quad s \longmapsto \frac{p(re^{2\pi i s})}{p(r)}.$$

Schritt 1: $\alpha \simeq$ konst$_1$ rel. Endpunkte durch

$$h(s,t) = \frac{p(tre^{2\pi i s})}{p(tr)}.$$

$\alpha$ d-mal ablaufen

Schritt 2: $\alpha_d \simeq \alpha$ rel. Endpunkte durch

zeige wohldef.!

$$h(s,t) = \frac{tp(re^{2\pi i s}) + (1-t)(re^{2\pi i s})^d}{tp(r) + (1-t)r^d}.$$

Also folgt $\alpha_d \simeq$ konst$_1$ im Widerspruch zu (*). $\square$

# Beispiele und Homotopieäquivalenz

**Bsp.** Sei $X = S^1 \cup \{2\} \subseteq \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\pi_1(X, 1) \cong \mathbb{Z} \text{ und } \pi_1(X, 2) = \{e\}.$$

**Eigenschaften.** i) Sei $\beta$ ein Weg von $x_0$ nach $x_1$ in $X$.
Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi_\beta : \pi_1(X, x_1) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \\ [\alpha] &\longmapsto [\beta(\alpha\beta^-)] \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus

ii) Seien $X$ und $Y$ top. Räume, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$.
Dann gilt

$$\pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0)\cong\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0)).$$

Bew.

i) • Wohldef $\alpha\simeq_{x_1}\alpha' \Rightarrow \beta(\alpha\beta^-)\simeq\beta(\alpha'\beta^-)$.

• Gruppenhomom.:

$$\begin{aligned}\varphi_\beta([\alpha_1][\alpha_2]) &= [\beta(\alpha\alpha'\beta^-)]\\ &= [\beta\alpha\beta^-\beta\alpha'\beta^-]\\ &= [\beta\alpha\beta^-][\beta\alpha'\beta^-]\\ &= \varphi_\beta(\alpha)\varphi_\beta(\alpha').\end{aligned}$$

• $\varphi_\beta$ ist bijektiv: $\varphi_{\beta^-}$ ist Umkehrabbildung.

ii) Serie 7 Agb. 4a. □

Bem. • Falls $X$ wegzsh. ist, dann ist $\pi_1(X,x_0)$ unabhängig vom Basispunkt $x_0$. In diesem Fall kürzt man oft mit $\pi_1(X)$ ab.

• Es gilt $\varphi_\beta=\varphi_{\beta'}$ falls $\beta\simeq\beta'$ rel. Endpunkte.

Korollar. Sei $\varphi:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^n$ ein Homeomorphismus. Dann gilt $n=2$.

Bew. Sei $n\geq 2$ und $\varphi:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^n$ ein Homeomorphismus mit OBdA $\varphi(0)=0$. Dann ist

$$\tilde\varphi:\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\quad x\longmapsto\varphi(x)$$

auch Homeomorphismus. Aber aus

$$\mathbb{Z}\cong\pi_1(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})\underset{\tilde\varphi_*}{\cong}\pi_1(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$$

folgt dann $n=2$. $\square$

**Def.** Sei $X \neq \emptyset$ ein top. Raum. $X$ heisst *einfach zusammenhängend*, falls $X$ wegzsh. ist und $\pi_1(X, x_0) = \{e\}$ für ein (und damit für alle) $x_0 \in X$ gilt.

**Bsp.** Für $n \geq 2$ ist $S^n$ einfach zsh. und $S^1$ ist nicht einfach zsh nach Satz 1.

**Satz 4.** Sei $f: X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz und $x_0 \in X$. Dann ist

$$f_*: \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$$

ein Gruppenisomorphismus.

**Lemma 2.** Seien $f_0, f_1 : X \to Y$ homotop via $h$ und $x_0 \in X$. Sei weiter $\beta$ der Weg

$$\beta(s) = h(x_0, s)$$

von $f_0(x_0)$ nach $f_1(x_0)$. Dann gilt

$$(f_0)_* = \Psi_\beta \circ (f_1)_*,$$

wobei

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(Y, f_1(x_0)) \arrow[d, "\Psi_\beta", "\cong"'] \\ \pi_1(X, x_0) \arrow[ur, "(f_1)_*"] \arrow[r, "(f_0)_*"'] & \pi_1(Y, f_0(x_0)) \end{tikzcd}.$$

$\to$ Spezialfall: Falls $h(x_0, s) = \beta(s) = f_0(x_0)$ gilt für alle $s$, dann folgt $(f_0)_* = (f_1)_*$, da $\Psi_\beta = \mathrm{id}_{\pi(Y, f_0(x_0))}$.

<u>Bew.</u> (Lemma 2)

Setze $\beta_t : [0,1] \longrightarrow Y$, $s \longmapsto \beta(st)$. Sei $\alpha$ eine Schleife an $x_0$. Dann gilt

$$f_0 \circ \alpha \simeq \beta((f_1 \circ \alpha)\beta^{-1})$$

rel. Endpunkte via

$$H_t = \beta_t((h_t \circ \alpha)\beta_t^{-}).$$

Daraus folgt

$$(f_0)_*([\alpha]) = [f_0 \circ \alpha] = [\beta((f_1 \circ \alpha)\beta^{-1})]$$
$$= \psi_\beta([f_1 \circ \alpha]) = \psi_\beta((f_1)_*([\alpha])).$$

□

<u>Bew.</u> (Satz 3) Sei $f : X \to Y$ Homo. äquiv. mit Homo. inv. $g : Y \to X$, d.h. $g \circ f \underset{h}{\simeq} \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \underset{k}{\simeq} \mathrm{id}_Y$.

Betrachte $x_0 \in X$ und $f_*$, $g_*$ bzgl. $x_0$ und $f(x_0)$.

- $\beta : [0,1] \to X$ mit $\beta(s) = h(x_0, s)$ ist Weg von $g(f(x_0))$ nach $x_0$

$$\Rightarrow g_* \circ f_* = (g \circ f)_* \overset{\text{Lemma 2}}{=} \psi_\beta \circ (\mathrm{id}_X)_* = \psi_\beta$$

ist also iso nach Eigenschaft (i).

$\Rightarrow f_*$ inj. und $g_*$ surj.

- $\beta' : [0,1] \to Y$ mit $\beta'(s) = k(f(x_0), s)$ ist Weg von $f(g(f(x_0)))$ nach $f(x_0)$.

$$\Rightarrow f_* \circ g_* \overset{\text{Lemma 2}}{\simeq} \psi_\beta$$

$\Rightarrow g_*$ inj.

Also ist $g_*$ bijektiv und damit auch $f_*$, da $g_* \circ f_*$ bijektiv ist.

□

**Folge.** $X$ kontrahierbar $\Rightarrow$ $X$ einfach zsh.

**Bsp.** $S^1, S^2, S^1 \times S^1, S^1 \times S^1 \times S^1$ sind paarweise nicht homotopieäquivalent.

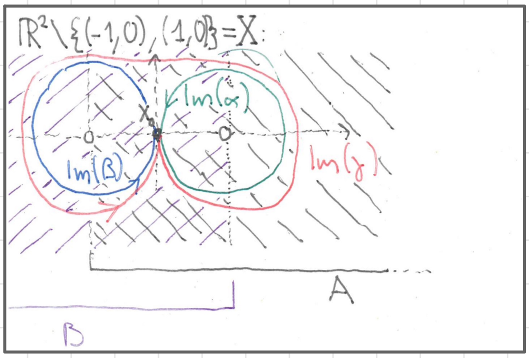
**Grund.** $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(S^2) = \{e\}$, $\pi_1(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z}^2$, $\pi_1(S^1 \times S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z}^3$.

# Der Satz von Seifert-von Kampen

24.4.

**Bsp (a).** $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$, $x_0 = (0,0) \in X$.

Sei $G := \pi_1(X, x_0)$ und $a = [\alpha]$, $b = [\beta]$, $c = [\gamma] \in G$ wie im folgenden Bild.




Dann gilt $c = ab$ und

$$A = \{(x,y) \in X \mid x > -1\} \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$
$$\cong$$
$$B = \{(x,y) \in X \mid x < 1\} \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\Rightarrow \pi_1(A, x_0) \cong \pi_1(B, x_0) \cong \mathbb{Z}.$$

und $\pi_1(A \cap B, x_0) \cong \{e\}$.

Wir werden sehen:
- $G \supseteq \langle a \rangle = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$.
- $G = \langle a, b \rangle$.
- $ab \neq ba$.

- $G$ ist die freie Gruppe mit zwei Erzeugern,

  d.h. $G \cong F_2 \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

  freies Produkt

**Def.** Seien $H$ und $K$ zwei Gruppen (mit $H \cap K = \emptyset$).

- Ein Wort in $H$ und $K$ ist $g_1 g_2 \cdots g_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$, wobei $g_i \in H \cup K$ (formal nur eine "Liste").
- Ein Wort $g_1 g_2 \cdots g_n$ heisst reduziert, falls $g_i \notin \{e_H, e_K\}$ gilt und $g_i, g_{i+1}$ immer in verschiedenen Gruppen sind.

**Bem.** Jedes Wort $w$ hat eine eindeutige Reduktion $R(w)$.

**Def./Satz.** Seien $K$ und $H$ Gruppen. Dann bildet

$$H * K := \{ w \mid w \text{ ist reduziertes Wort} \}$$

mit der Multiplikation

$$\begin{aligned} (H * K) \times (H * K) &\longrightarrow H * K \\ (w_1, w_2) &\longmapsto R(w_1 w_2) \overset{\text{Notation}}{=:} w_1 w_2 \end{aligned}$$

eine Gruppe, genannt das freie Produkt / Coprodukt / Summe von $H$ und $K$.

**Bew.** • Hat eine Eins: Das leere Wort $e$.

- Hat Inversen: Für $w = g_1 g_2 \cdots g_n$ gilt

$$w^{-1} = g_n^{-1} \cdots g_2^{-1} g_1^{-1}.$$

- Assoziativität: Folgt aus der Def. von $R$. $\square$

**Bem.** • Die Inklusion

$$i_H : H \hookrightarrow H * K,\ h \longmapsto \begin{cases} h & \text{falls } h \neq e_H \\ e & \text{falls } h = e_H \end{cases}$$

ist ein inj Gruppenhomomorphismus. Wir identifizieren

$$H < H * K$$

via $i_H$.

- Falls $K = \{e_K\}$, dann gilt $H * K \cong H$.
- Falls $H$ und $K$ beide nicht-trivial sind, dann ist $H * K$ nicht kommutativ.

<u>Bsp.</u> Seien $H = \langle a \mid a^2 = e_H \rangle$ und $K = \langle b \mid b^3 = e_K \rangle$ die zyklischen Gruppen der Ordnung 2 und 3. Dann gilt

$$G := H * K \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

<u>Übrigens:</u> $G \cong SL_2(\mathbb{Z}) / \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} = PSL_2(\mathbb{Z})$.

<u>Eigenschaft.</u> (Universelle Eigenschaft des freien Produkts).

Seien $G, H, K$ Gruppen und

$$\varphi_H : H \longrightarrow G$$
$$\varphi_K : K \longrightarrow G$$

Gruppenhomomorphismen. Dann ex. ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus $\varphi : H * K \longrightarrow G$ mit

$$\varphi \circ i_H = \varphi_H$$

und

$$\varphi \circ i_K = \varphi_K.$$

<u>Grund.</u> Definiere

$$\varphi(h_1 k_1 h_2 k_2 \cdots h_n k_n) := \varphi_H(h_1)\varphi_K(k_1) \cdots \varphi_H(h_n)\varphi_K(k_n).$$

**Setup.** Sei $X$ top. Raum, $A, B \subseteq X$ und $x_0 \in A \cap B$. Seien

$$j_A : \pi_1(A) \longrightarrow \pi_1(X),$$

$$j_B : \pi_1(B) \longrightarrow \pi_1(X),$$

$$i_A : \pi_1(A \cap B) \longrightarrow \pi_1(A),$$

$$i_B : \pi_1(A \cap B) \longrightarrow \pi_1(B)$$

die von den Inklusionen induzierten Gruppenhomom. für den fixen Basispunkt $x_0$.

**Satz 1.** (Seifert-van Kampen) Für $x_0 \in A \cap B$, wobei $A, B \subseteq X$ mit $A \cap B \subseteq X$, $A, B$ wegzsh. und offen und $A \cup B = X$ sei

$$\varphi : \pi_1(A) * \pi_1(B) \longrightarrow \pi_1(X)$$

der eindeutige Gruppenhomom. mit

$$\varphi(a) = j_A(a),$$

$$\varphi(b) = j_B(b)$$

für alle $a \in \pi_1(A)$, $b \in \pi_1(B)$. Dann gilt:

i) $\varphi$ ist surjektiv

ii) $\mathrm{Kern}(\varphi) = \langle\langle \{ i_A(c)(i_B(c))^{-1} \mid c \in \pi_1(A \cap B) \rangle\rangle =: N$

$\rightsquigarrow$ Notation: Für $H \subseteq G$ sei $\langle\langle H \rangle\rangle$ der kleinste Normalteiler von $G$, der $H$ enthält.

Insbesondere, gilt

$$(\pi_1(A) * \pi_1(B))/N \cong \pi_1(X)$$

**Spezialfall.**

i) Gilt $\pi_1(A \cap B) = \{e\}$, so ist $\varphi$ Gruppenisomorphismus.

ii) Gilt $\pi_1(A) \cong \pi_1(B) = \{e\}$, so folgt $\pi_1(X) = \{e\}$.

__Bsp.__ (Satz 1a aus W8) Für $n \geq 2$ sei $S^n = A \cup B$ mit $A = S^n \setminus \{p_1\}$ und $B = S^n \setminus \{p_2\}$ mit $p_1 \neq p_2$. Dann gilt $\pi_1(A) \cong \pi_1(B) = \{e\}$ und damit $\pi_1(S^n) = \{e\}$.

→ Achtung. Für $n=1$ gilt ~~ebenfalls~~ $\pi_1(A) \cong \pi_1(B)$, aber $A \cap B$ ist nicht wegzsh. und damit gilt der Satz von Seifert-van Kampen nicht.

__Bsp.__ Betrachte $X = S^1 \vee S^1 = (S^1 \times \{1\}) \cup (\{1\} \times S^1)$ und sei $x_0 = (1,1)$. Sei

$$A := (S^1 \times \{1\}) \cup \{(1, e^{2\pi i s}) \mid s \in (-\varepsilon, \varepsilon)\},$$

$$B := (\{1\} \times S^1) \cup \{(e^{2\pi i s}, 1) \mid s \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$$

für $\varepsilon > 0$ klein genug. Dann gilt

$$A \simeq S^1 \simeq B$$

und

$$A \cap B \simeq \{x_0\}.$$

Daraus folgt

$$\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

__Bew.__ (von Satz 1) Sei $\varphi$ wie im Satz 1.

i) Sei $\gamma : [0,1] \to X$ eine Schleife an $x_0$.

Zu zeigen: $\exists\, w \in \pi_1(A) * \pi_1(B) : \varphi(w) = [\gamma]$.

Beh. 1. Es ex. $s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_k = 1$ mit

$\gamma([s_i, s_{i+1}]) \subseteq A$ oder $\gamma([s_i, s_{i+1}]) \subseteq B$

und $\gamma(s_i) \in A \cap B$.

$\rightarrow$ Grund. $\forall s \in [0,1]\ \exists I_s \subseteq [0,1]$ offen mit $s \in I_s$ und $\gamma(\bar{I}_s) \subseteq A$ oder $\gamma(\bar{I}_s) \subseteq B$.

Da $[0,1]$ kompakt ist, ex. $I_1, \dots, I_e$ wie oben, die $[0,1]$ überdecken. Damit ex. $s_0, \dots, s_n$ mit

$$I = [0, s_0] \cup \dots \cup [s_n, 1]$$

durch verkleinern und zusammenkleben wo nötig.

Sei nun

$$\gamma_i'(s) = \gamma((1-s)s_i + s s_{i+1})$$

für $i \in \{0, \dots, k-1\}$ und $\beta_i$ ein Weg von $x_0$ nach $\gamma(s_i) \in A \cap B$. Setze

$$\gamma_i := \beta_i(\gamma_i' \bar{\beta}_{i+1}),$$

wobei $\beta_0 := \beta_k := \text{konst}_{x_0}$. Dann gilt

$$[\gamma] = [\gamma_1][\gamma_2] \cdots [\gamma_k] \in \pi_1(X)$$

und

$$[\gamma_i] \in \text{Bild}(j_A) \cup \text{Bild}(j_B).$$

Daraus folgt

$$[\gamma] \in \text{Bild}(\varphi),$$

womit $\varphi$ surj. ist.

ii) Sei

$$N := \langle\langle \{ i_A([\delta])(i_B([\delta]))^{-1} \mid [\delta] \in \pi_1(A \cap B) \} \rangle\rangle.$$

Für $[\delta] \in \pi_1(A \cap B)$ beliebig gilt

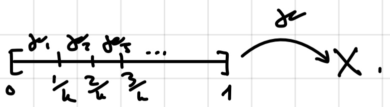
$$\begin{aligned} \varphi(i_A[\delta]) &= j_A(i_A([\delta])) \\ &= [\iota_{A \cap B} \circ \delta] \\ &= j_B(i_B([\delta])) = \varphi(i_B([\gamma])) \end{aligned}$$

mit Inklusion $\iota_{A \cap B} \hookrightarrow X$. Daraus folgt

$$i_A([\delta])(i_B([\delta]))^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi)$$

und damit $N \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Sei nun $e \neq w = [\gamma_1][\gamma_2]\cdots[\gamma_n] \in \pi_1(A) * \pi_1(B)$ reduziertes Wort mit $\varphi(w) = e = [\gamma]$, wobei

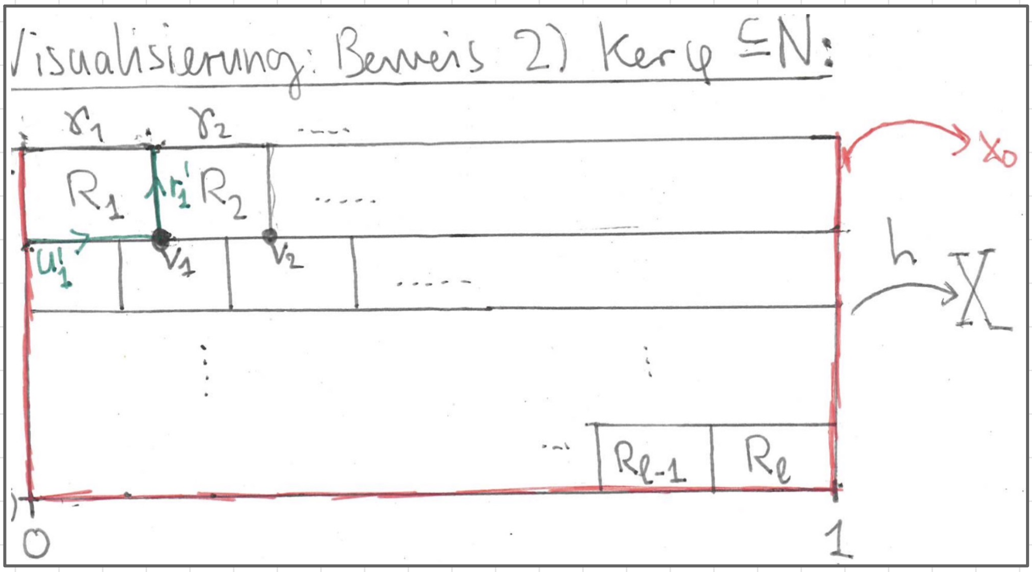



Dann ex. eine Homotopie mit $\mathrm{konst}_{x_0} \simeq \gamma$ rel. $x_0$.

Beh. 2. Es ex abgs. Rechtecke

$$R_1, R_2, \dots, R_\ell \subseteq [0,1]^2$$

mit $h(R_i) \subseteq A$ oder $h(R_i) \subseteq B$.




→ Grund: Ähnlich wie Beh. 1.

Idee: Nun finden wir Wörter

$$w = w_0, w_1, w_2, \dots, w_\ell = e \in \pi_1(A) * \pi_2(B)$$

mit $w_{i-1}N = w_iN$ in $(\pi_1(A) * \pi_2(B))/N$.

- Wähle $\beta_i$ Weg von $x_0$ nach $h(v_i)$ mit

$$\mathrm{Bild}(\beta_i) \subseteq A \quad \text{falls } h(v_i) \in A$$

und

$$\mathrm{Bild}(\beta_i) \subseteq B \quad \text{falls } h(v_i) \in B.$$

- OBdA sei $[\gamma_1] \in \pi_1(A)$.

Schritt 1. (via $R_1$):

- Falls $h(R_1) \subseteq A$:

$$[\gamma_1] = [\text{konst}_{x_0}\gamma_1] = [u_1' r_1'] = [\underbrace{(u_1'\beta_1^-)}_{u_1}\underbrace{(\beta_1 r_1')}_{r_1}]$$

$$= [u_1][r_1].$$

Setze

$$w_1 := [u_1][r_1][\gamma_2]\cdots[\gamma_\ell].$$

Dann gilt $w = w_0 = w_1$

- Falls $h(R_1) \not\subseteq A$: Dann gilt $h(R_1) \subseteq B$ nach Annahme und damit $\text{Bild}(\gamma_1) \subseteq A \cap B$. Sei

$$\delta: [0,1] \to A \cap B, \quad s \longmapsto \gamma_1(s),$$

$$\tilde{\gamma}_1: [0,1] \to B, \quad s \longmapsto \delta(s) = \gamma_1(s).$$

Dann gilt

$$i_A([\delta]) = [\gamma_1] \quad \text{und} \quad i_B([\delta]) = [\tilde{\gamma}_1]$$

$$\Rightarrow \quad [\gamma_1]N = [\tilde{\gamma}_1]N$$

$$\Rightarrow \quad w_0 N = w_0' N$$

für $w_0' := [\tilde{\gamma}_1][\gamma_2]\cdots[\gamma_\ell]$.

Wie für $h(R_1) \subseteq A$ finde nun $w_1 := [u_1][\gamma_2]\cdots[\gamma_\ell]$ und $w_0' = w_1 \Rightarrow w_0 N = w_1 N$.

Schritt i. (via $R_i$) Finde $w_i$ aus $w_{i-1}$ wie im Schritt 1 via $R_i$.

Damit ex. $w = w_0, w_1, \ldots, w_\ell$ mit

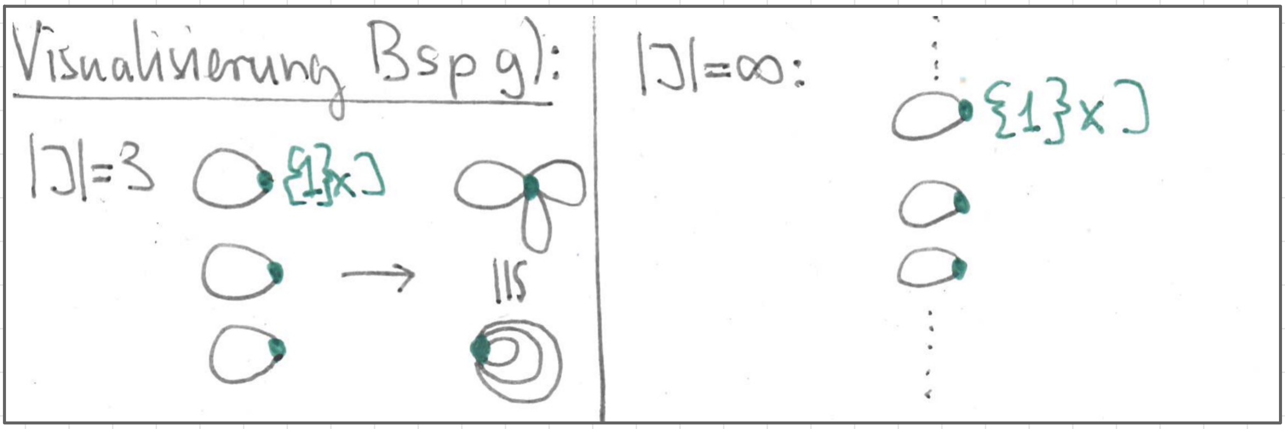
$$w_{i-1}N = w_i N \quad \text{und} \quad w_\ell = [\text{konst}_{x_0}]\cdots[\text{konst}_{x_0}] = e.$$

Insgesamt folgt damit

$$w_{i-1}N = w_i N \Rightarrow w_0 N = w_\ell N = N,$$

d.h. $w = w_0 \in N$. Also folgt $\mathrm{Kern}(\varphi) \subseteq N$ und damit Gleichheit. $\square$

<u>Bsp.</u> Sei $X := \bigvee_{j\in J} S^1 := (S^1 \times J)/\{1\}\times J$ für eine Indexmenge $J$ mit der diskreten Topologie.




Dann gilt $\pi_1(X) \cong \underset{j\in J}{*}\mathbb{Z} \;(\cong \mathbb{Z}^J)$.

$\rightarrow$ <u>Grund</u>: Falls $|J| < \infty$, so folgt dies induktiv mit Satz 1. Sonst benutze folgendes:

<u>Satz 2.</u> Sei $X = \bigcup_{e\in J} A_e$ mit Indexmenge $J$ und $A_e \cap A_k$ offen, wegzsh., $x_0 \in \bigcap_{e\in J} A_e$ und

$$\varphi : \underset{j\in J}{*}\pi(A_j) \longrightarrow \pi_1(X)$$

eindeutiger Gruppenhomom. mit $\varphi(a) = j_{A_e}(a)$ für $a \in A_e$.

Dann gilt:

i) $\varphi$ ist surj.

ii) Falls $A_e \cap A_k \cap A_r$ wegzsh. für alle $e,k,r \in J$, so gilt

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \langle\langle\, i_{e,k}(c)(i_{k,e}(c))^{-1} \mid k,e \in J,\ c\in\pi_1(A_k\cap A_e)\}\rangle\rangle$$

mit $i_{e,k} : \pi_1(A_e \cap A_k) \hookrightarrow \pi_1(A_k)$.

**Bsp.** Hawaiischer Ohrring. Sei $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \subseteq \mathbb{C}$ mit 5.5.23

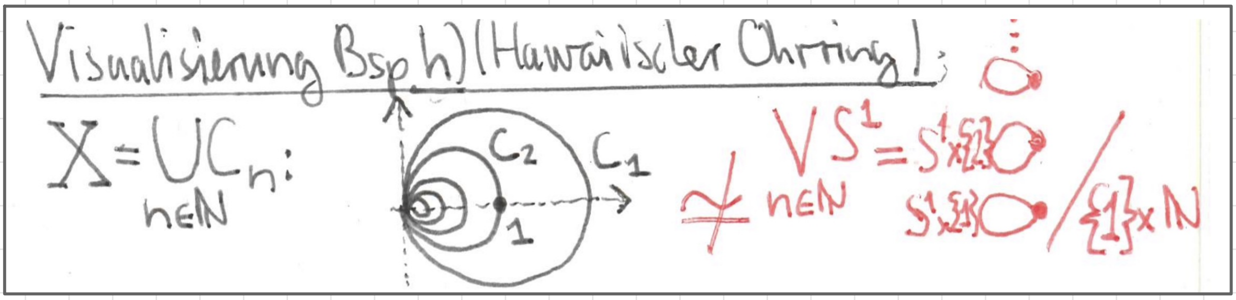
$C_n := B_{\frac{1}{n}}(\tfrac{1}{n})$

Dann gilt $X \not\simeq \bigvee_{n\in\mathbb{N}} S^1$.

Grund: $\pi_1(X)$ ist überabzählbar, aber

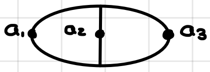
$$\pi_1\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} S^1\Big) \simeq \mathop{\ast}_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}$$

ist abzählbar.




**Bsp.** (Warum $A_k \cap A_e \cap A_r$ wegzsh. sein muss in Satz 2)

Sei

$\mathbb{R}^2 \supseteq X :=$ 

$\infty = S^1 \vee S^1$

und $A_e := X \setminus \{a_e\}$ für $e = 1,2,3$. Dann gilt

- $\pi_1(A_e) \cong \mathbb{Z}$
- $\pi_1(A_e \cap A_k) \cong \{e\}$ für $k \neq e$

aber $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

# 5. Abzählbarkeitsaxiome

## Erstes & Zweites Abzählbarkeitsaxiom

<u>Def.</u> Sei $(X, \mathcal{O})$ ein top. Raum.

- Sei $x_0 \in X$. Dann heisst

$$\mathcal{U} \subseteq \{U \subseteq X \mid U \text{ ist Umgebung von } x_0\}$$

  Umgebungsbasis von $x_0$, falls jede Umgebung von $x_0$ eine Umgebung $U \in \mathcal{U}$ enthält.
- $X$ erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom (1AA), falls jeder Punkt in $X$ eine abzählbare Umgebungsbasis hat.
- $X$ erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom (2AA), falls $X$ eine abzählbare Basis hat.

<u>Bsp.</u>

- Jeder metr. Raum erfüllt 1AA.
- $\mathbb{R}^n$ erfüllt 2AA

<u>Bem.</u> Es gilt 2AA $\Rightarrow$ 1AA, aber nicht umgekehrt.

<u>Grund.</u> Sei $\mathcal{B}$ abzählbare Basis von $X$ und $x_0 \in X$. Setze dann $\mathcal{U} := \{B \in \mathcal{B} \mid x_0 \in B\}$.

<u>Bem.</u> Sei $Y \subseteq X$ unterraum. Dann gilt

- $X$ erfüllt 1AA $\Rightarrow$ $Y$ erfüllt 1AA
- $X$ erfüllt 2AA $\Rightarrow$ $Y$ erfüllt 2AA

<u>Bem.</u> Falls $A \subseteq X$ überabzählbar und diskret existiert, dann erfüllt $X$ 2AA nicht.

Grund. Sei $\mathcal{B}$ Basis von $X$ und wähle $U_a$ offen mit

$$U_a \cap A = \{a\}$$

für alle $a \in A$. Dann gilt

$$\forall a \in A \; \exists \, O_a \in \mathcal{B} : \quad a \in O_a \subseteq U_a$$

und damit ex. eine injektion

$$A \hookrightarrow \mathcal{B}, \; a \longmapsto O_a.$$

Bsp. Sei $X = \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ beschränkt}\}$ mit der von $\|\cdot\|_\infty$ induzierten Metrik $d_{sup}$. Dann erfüllt $X$ 1AA aber nicht 2AA.

Grund. $X$ ist metr. Raum. Aber sei $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $0-1-$Folge und wähle ein

$$f_\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $f_\varepsilon(n) = \varepsilon_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\overbrace{B_1(a)}^{\text{offen}} \cap A = \{a\},$$

für alle $a \in A := \{f_\tau \mid \tau \text{ beliebige } 0\text{-}1\text{-Folge}\}$.

Da dies existiert, erfüllt $X$ nicht 2AA.

# UNENDLICHE PRODUKTE

Sei $\{X_j\}_{j\in J}$ eine Familie von Mengen und seien

$$\pi_k : \prod_{j\in J} X_j \longrightarrow X_k, \; \{x_j\}_{j\in J} \longmapsto x_k$$

die Projektionen für $k \in J$.

Def. Sei $\{X_j\}_{j\in J}$ eine Familie von top. Räumen.

- Die Produkttopologie $\tau \subseteq \mathcal{P}(\prod_{j\in J} X_j)$ ist die eindeutige

Topologie mit Basis

$$\mathcal{B} := \{ \pi_{j_1}^{-1}(U_1) \cap \pi_{j_2}^{-1}(U_2) \cap \dots \cap \pi_{j_n}^{-1}(U_n) \mid n \in \mathbb{N},\ j_i \in J,\ U_i \subseteq X_{j_i} \text{ offen} \}.$$

**Notation.** Für $X_j = X$, $j \in J$ schreibe $X^J := \prod_{j \in J} X_j$.

**Eigenschaft.** (Universelle Eigenschaft des Produkts)

- Sei $Y$ top. Raum und $f_j : Y \longrightarrow X_j$ stetig für $j \in J$.
  Dann ex ein eindeutiges
  $$f : Y \longrightarrow \prod_{j \in J} X_j$$
  mit $f$ stetig und $\pi_k \circ f = f_k$.
- Insb. ist die Produkttopologie die gröbste Topologie, s.d. alle $\pi_k$ stetig sind.

**Bew.** Serie 10.

**Bsp.** Falls $J$ überabzählbar ist und $X_j$ ein top. Raum mit nicht-trivialer Topologie. Dann erfüllt $\prod_{j \in J} X_j$ 1AA nicht.

Grund. Wähle $\emptyset \neq O_j \subsetneq X_j$ offen und $x_j \in O_j$.

Agn. für $\{x_j\}_j$ ex. eine abzb. Umgebungsbasis $\mathcal{U}$

OBdA gilt

$$U \in \mathcal{U} \Rightarrow U = \pi_{j_1}^{-1}(U_1) \cap \dots \cap \pi_{j_n}^{-1}(U_n)$$

für $j_i \in J$ und $U_i \subseteq X_{j_i}$ offen.

Dann ex. $k \in J$ mit $\pi_k(U) = X_k$ für alle $U \in \mathcal{U}$,

da nur abzählbar viele Faktoren nicht ganz $X_j$ sind.

Dann ist $\pi_k^{-1}(O_k) \subseteq \prod_{j \in J} X_j$ Umgebung von $x$

aber $\pi_u^{-1}(O_u)$ enthält kein $U$ aus $\mathcal{U}$ wegen ⊛ im Widerspruch zu ⊚.

<u>Satz 1.</u> (Tychonoff) Sei $\{X_j\}_{j\in J}$ eine Familie von kompakten top. Räumen. Dann ist $\prod_{j\in J} X_j$ kompakt.

# Die Rolle der Abzählbarkeitsaxiome

## Warum 1AA?

<u>Def.</u> Seien $X, Y$ top. Räume. Eine Abbildung

$$f: X \to Y$$

heisst folgenstetig, falls für alle Folgen $(x_n)_n \subseteq X$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

<u>Bem.</u> $f$ stetig $\Rightarrow$ $f$ folgenstetig.

<u>Lemma 1.</u> Erfüllt $X$ 1AA, so gilt

$$f \text{ stetig} \Leftrightarrow f \text{ folgenstetig}$$

für $f: X \to Y$.

<u>Bew.</u> "$\Rightarrow$". Folgt aus Bemerkung.

"$\Leftarrow$". Kontraposition. Agn. $f$ ist nicht stetig, d.h. es ex. $a \in X$ mit $f$ nicht stetig bei $a$, d.h.

$$\exists V \text{ Umgebung von } f(a)\ \forall \text{ Umgebungen } U \text{ von } a: f(U) \not\subseteq V. \quad ⊛$$

Sei $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots\}$ abzählbare Umgebungsbasis von $a$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$, wähle $x_n \in U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$ mit

$$f(x_n) \notin V$$

nach ❄. Nun gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, aber $f(a)$ ist nicht Limes von $(f(x_n))_n$. $\square$

<u>Bsp.</u> ($f$ folgenstetig aber nicht stetig) 8.5.23

- Sei $X = \{\varphi : [0,1] \to [0,1] \mid \varphi \text{ stetig}\}$

$$\subseteq \{\varphi : [0,1] \to [0,1]\} = [0,1]^{[0,1]} = \prod_{j\in[0,1]} [0,1]$$

mit Unterraumtopologie der Produkttopologie.

Beh. (Serie 10) $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi \iff \forall s \in [0,1] : \lim_{n\to\infty} \varphi_n(s) = \varphi(s)$.

- Sei $Y = \{\varphi : [0,1] \to [0,1] \mid \varphi \text{ stetig}\}$ mit $L^1$-metrik, d.h.

$$d(\varphi, \psi) := \int_0^1 |\varphi(s) - \psi(s)|\, ds.$$

- Setze $f : X \to Y$, $\varphi \longmapsto \varphi$.

Beh. $f$ ist folgenstetig.

Grund. Sei $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ in $X$.

$$\Rightarrow \forall s \in [0,1] : \lim_{n\to\infty} \varphi_n(s) = \varphi(s)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(\varphi_n, \varphi) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi_n(s) - \varphi(s)|\, ds$$

DCT

$$= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} |\varphi_n(s) - \varphi(s)|\, ds$$

$$= 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\varphi_n) = \varphi. \quad \square$$

Beh. $f$ ist nicht stetig bei $\varphi_0 := \text{konst}_0 \in X$.

Grund. Sei $0 < \varepsilon < 1$ und $V := B_\varepsilon(f(\varphi_0)) \subseteq Y$.

Sei $\mathcal{U}$ eine Umgebung von $\varphi_0$ in $X$, d.h

$\exists s_1, \dots, s_n \in [0,1]$ und $U_i \subseteq [0,1]$ offen mit $0 \in U_i$, s.d.

$$\mathcal{U} \supseteq (\pi_{s_1}^{-1}(U_1) \cap \dots \cap \pi_{s_n}^{-1}(U_n)) \cap X$$
$$= \{ \varphi : [0,1] \to [0,1] \mid \varphi(s_i) \in U_i \,,\ \varphi \text{ stetig} \}.$$

Dann $\exists \varphi \in \mathcal{U}$ mit $\int_0^1 |\varphi(s) - 0| \, ds = \int_0^1 \varphi(s) \, ds > \varepsilon$ und damit

$$f(\varphi) \notin V \Rightarrow f(\mathcal{U}) \nsubseteq V. \qquad \square$$

<u>Def.</u> $X$ heisst **folgenkompakt**, falls jede Folge in $X$ eine konvergente Teilfolge hat (d.h. hat mind. einen Grenzwert).

<u>Lemma 1.</u>

i) Falls $X$ 1AA erfüllt, dann gilt

$$X \text{ kompakt} \Rightarrow X \text{ folgenkompakt}.$$

ii) Falls $X$ ein metr. Raum ist, dann gilt

$$X \text{ kompakt} \Leftrightarrow X \text{ folgenkompakt}.$$

<u>Bew.</u> Für (ii) siehe Analysis.

i) Sei $X$ kompakt und $(x_n)_n$ Folge in $X$.

<u>Schritt 1.</u> (Kandidaten für GW)

$$\exists a \in X \ \forall \text{ Umgebungen } \mathcal{U} \subseteq X \text{ von } a :$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists m \geq n : x_m \in \mathcal{U}.$$

⇝ Grund. Agn. es gilt

$$\forall a \in X \ \exists \text{ Umgebungen } \mathcal{U}_a \subseteq X \text{ von } a :$$
$$\exists n_a \in \mathbb{N} \ \forall m \geq n : \ x_m \notin \mathcal{U}.$$

Wegen Kompaktheit ex. $a_1, \dots, a_k$ mit $X = \mathcal{U}_{a_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{a_k}$

und damit ergibt sich ein Widerspruch zu

$$\forall m \geq \max(n_{a_1}, \dots, n_{a_L}) : \quad x_m \notin U.$$

Schritt 2. Sei $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots\}$ abzählbare Umgebungsbasis von $a$ und wähle induktiv $n_1 \leq n_2 \leq \dots$ mit

$$x_{n_\ell} \in U_1 \cap \dots \cap U_n$$

nach Schritt 1. Dann gilt

$$\lim_{\ell \to \infty} x_{n_\ell} = a$$

wie im Beweis von Lemma 1. $\square$

Bem. Im allg. gilt

- kompakt $\not\Rightarrow$ folgenkompakt
- folgenkompakt $\not\Rightarrow$ kompakt

Bsp.

- $[0,1]^{[0,1]}$ ist nach Tychonoff kompakt aber ist nicht folgenkompakt.
- Die "Lange Linie" erfüllt 1AA, ist folgenkompakt aber nicht kompakt.

Warum 2.AA?

# EXKURS: MANNIGFALTIGKEIT

Erinnerung. $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst d-dim. glatte Untermannigfaltigkeit, falls $\forall p \in M \; \exists V_p, U_p \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $p \in U_p$ und es ex. $\varphi_p : U_p \longrightarrow V_p$ Diffeomorphismus mit

$$\varphi_p(U_p \cap M) = V_p \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}).$$

**Def.** $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst *d-dim. topologische Untermannigfaltigkeit*, falls $\forall p \in M \; \exists V_p, U_p \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $p \in U_p$ und es ex. $\varphi_p : U_p \to V_p$ Homeomorphismus mit $\varphi_p(U_p \cap M) = V_p \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$.

**Def.** Sei $X$ ein top. Raum und $d \in \mathbb{N}$. $X$ heisst *topologische Mannigfaltigkeit*, falls:

i) $\forall p \in X \; \exists U \subseteq X$ offen mit $p \in U$ und $U \cong \mathbb{R}^d$.

ii) $X$ ist Hausdorffraum

iii) $X$ erfüllt das 2. AA.

**Einbettungssatz.**

a) Top. Umfg des $\mathbb{R}^n$ sind top. Mannigfaltigkeiten.

b) Ist $X$ eine top. Mannigfaltigkeit, dann ex. $n \in \mathbb{N}_0$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine top. Umfg. mit $M \cong X$.

# 6. Konstruktion von stetigen Funktionen

## Urysohnsches Lemma

Frage: Sei $X$ top. Raum und $A, B \subseteq X$ disjunkt und abgs. Gibt es ein

$$f: X \longrightarrow [0,1]$$

stetig mit $f(A) \subseteq \{0\}$ und $f(B) \subseteq \{1\}$ ?

Bem. Falls $f: X \longrightarrow [0,1]$ mit $f(A) = \{0\}$ und $f(B) = \{1\}$. Dann ex. $U, V \subseteq X$ offen, disjunkt mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ (z.B. $U := f^{-1}([0,\frac{1}{2}))$, $V := f^{-1}((\frac{1}{2},1])$.

Def. Ein top Raum $X$ heisst normal, falls für alle $A, B \in \mathcal{A}_X$ disjunkt, disjunkte $U, V \in \mathcal{O}_X$ ex. mit $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$.

Bem. Metr. Räume sind normal.

Def. Sei $X$ ein $T_2$-Raum

- $X$ heisst $T_4$-Raum, falls $X$ normal ist.
- $X$ heisst $T_3$-Raum, falls für alle $A \in \mathcal{A}_X$ und $b \in X \setminus A$ disjunkte Umgebungen $U, V$ mit $A \subseteq U$ und $b \in V$ ex.

Bem. • Es gilt $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$.

- $X$ ist $T_4$ g.d.w $X$ $T_1$ und normal ist.
- Jeder kompakte $T_2$-Raum ist normal.

**Satz 2.** (Urysohnsches Lemma) Sei $X$ ein normaler top. Raum. Falls $A, B \subseteq X$ abgs. und disjunkt sind, dann ex. ein

$$f : X \longrightarrow [0,1]$$

stetig mit $f(A) \subseteq \{0\}$ und $f(B) \subseteq \{1\}$

**Lemma 4.** (Verfeinerungs Lemma) Sei $X$ ein normaler top. Raum und $M \subseteq N \subseteq X$ mit $\bar{M} \subseteq N^\circ$, dann ex. $L \subseteq X$ mit

$$\bar{M} \subseteq L^\circ \subseteq \bar{L} \subseteq N^\circ.$$

Notation: $M < N$ und $M < L < N$.

**Bew.** $\bar{M} \cap (X \setminus N^\circ) = \varnothing \overset{\text{normal}}{\Longrightarrow} \exists U, V \subseteq X$ offen, disjunkt mit

$$\bar{M} \subseteq U \quad \text{und} \quad X \setminus N^\circ \subseteq V.$$

Wähle $L$ mit $U \subseteq L \subseteq X \setminus V$ (z.B. $L := U$)

Dann gilt

$$\bar{M} \subseteq L^\circ \subseteq \bar{L} \subseteq N^\circ. \qquad \square$$

**Bew.** (vom Satz)

Plan: Baue $f_n : X \to [0,1]$, s.d.

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

stetig ist und $f(A) \subseteq \{1\}$, $f(B) \subseteq \{0\}$.

Schritt 1. • $A = \bar{A} \subseteq X^\circ \setminus B = X \setminus B \quad (A < B)$

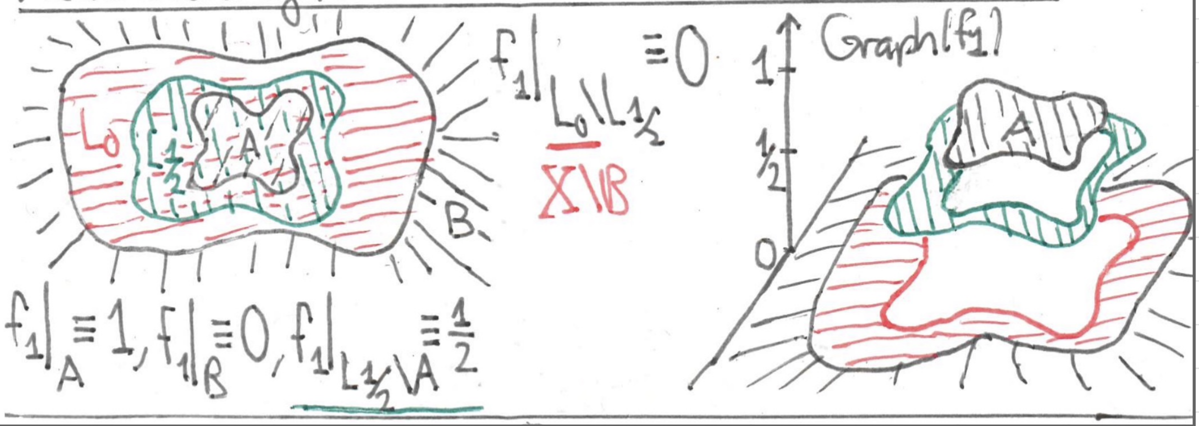
$\overset{\text{Lemma 4}}{\Longrightarrow} \exists L_{\frac{1}{2}} \subseteq X$ mit $A < L_{\frac{1}{2}} < B$,

def. $L_1 := A$, $L_0 := X \setminus B$.

• $f_1 : X \to [0,1]$ mit $f_1|_A \equiv 1$, $f_1|_B \equiv 0$, $f_1|_{L_{\frac{1}{2}} \setminus L_1} \equiv \frac{1}{2}$

und $f_1|_{L_0 \setminus L_{\frac{1}{2}}} \equiv 0$.

Visualisierung von Schritt 1 der Konstruktion von $f$:




Schritt n: Seien

$$A < L_1 < L_{1/2} < \dots < L_{\frac{k+1}{2^{n-1}}} < L_{\frac{k}{2^{n-1}}} < \dots < L_{\frac{1}{2^{n-1}}} < L_0 = X \setminus B$$

bereits konstruiert. Für $k \in \{0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1\}$ ex. $L_{\frac{2k+1}{2^n}}$ mit $L_{\frac{k+1}{2^{n-1}}} < L_{\frac{2k+1}{2^n}} < L_{\frac{k}{2^{n-1}}}$ nach Lemma 4

- Setze $f_n : X \to [0,1]$ mit $f_n|_A \equiv 1$, $f_n|_B \equiv 0$ und

$$f_n|_{L_{\frac{k}{2^n}} \setminus L_{\frac{k+1}{2^n}}} \equiv \frac{k}{2^n}$$

für $k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$.

Def. nun $f : X \to [0,1]$ durch

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Dies ex., da Folge monoton steigend und beschränkt ist.

Nach Konstruktion gilt $f(A) \subseteq \{1\}$ und $f(B) \subseteq \{0\}$.

Sei $\varepsilon > 0$ und $x \in X$.

- Falls $x \in A$: Wähle $n$ mit $2^{-n} < \varepsilon$ und setze

$$U := \left(L_{\frac{2^n-1}{2^n}}\right)^\circ \supseteq A = L_1 \ni x.$$

Für $y \in U$ gilt

$$|f(x) - f(y)| = 1 - f(y) \leq 1 - f_n(y)$$
$$\leq 1 - \frac{2^n - 1}{2^n} = 2^{-n} < \varepsilon.$$

Damit ist $f$ bei $x$ stetig.

- Falls $x \in B$: Ähnlich.
- Falls $x \notin A \cup B$: Wähle $n$ mit $\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$. Dann gilt

$$X \setminus (A \cup B) = \bigcup_{k=1}^{2^n-1} \left( L^\circ_{\frac{k-1}{2^n}} \setminus \overline{L_{\frac{k+1}{2^n}}} \right)$$

$$\Rightarrow \exists k \in \{1, \dots, 2^n - 1\}: \quad x \in L^\circ_{\frac{k-1}{2^n}} \setminus \overline{L_{\frac{k+1}{2^n}}} =: U.$$

Dann gilt

$$\forall y \in U: \quad f(y) \in \left[\tfrac{k-1}{2^n}, \tfrac{k+1}{2^n}\right]$$

und damit

$$|f(x) - f(y)| < \frac{2}{2^n} < \varepsilon \qquad \square$$

<u>Bem.</u> Falls $X$ normal und zsh. ist und $A, B \subseteq X$ nicht-leer und disjunkt, dann ex.

$$f: X \to [0, 1]$$

stetig und surjektiv mit $f|_A \equiv 1$ und $f|_B \equiv 0$.

# Tietzsches Erweiterungslemma

<u>Satz 3.</u> (Tiezsches Erweiterungslemma) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $X$ normaler Raum, $C \subseteq X$ abgs. und

$$f: C \longrightarrow [a, b]$$

stetig. Dann ex.

$$F: X \longrightarrow [a, b]$$

stetig mit $F|_C = f$.

**Korollar 1.** Satz 3 gilt auch für Produkte von abgeschlossenen Intervallen. 

**Bew.** Sei $f : C \longrightarrow \prod_{j\in J} [a,b]$ stetig.

$$\Rightarrow \pi_j \circ f : C \longrightarrow [a,b] \text{ stetig}$$

$$\overset{\text{Satz 3}}{\Rightarrow} \exists\, F_j : X \longrightarrow [a,b] \text{ stetig mit } F_j|_C = \pi_j \circ f_j$$

$$\Rightarrow \exists!\, F : X \longrightarrow \prod_{j\in J}[a,b] \text{ stetig mit } \pi_j \circ F = F_j.$$

$$\Rightarrow F|_C = f. \qquad \square$$

**Korollar 2.** Satz 3 gilt auch für $(-1,1) \cong \mathbb{R}$ (und bel. Produkte davon) und auch für $(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$.

**Bew.** Sei $f : C \longrightarrow (-1,1)$ stetig und

$$i : (-1,1) \longrightarrow [-1,1]$$

die Inklusion.

$$\Rightarrow \tilde{f} := i \circ f \text{ stetig}$$

$$\Rightarrow \exists\, \tilde{F} : X \to [-1,1] \text{ stetig mit } \tilde{F}|_C = \tilde{f}.$$

Setze $A = C$ und $B = \tilde{F}^{-1}(\{\pm 1\})$.

$$\overset{\text{Urysohn}}{\Rightarrow} \exists\, \lambda : X \longrightarrow [-1,1] \text{ mit } \lambda(A) \subseteq \{1\},\ \lambda(B) \subseteq \{0\}.$$

Setze

$$\hat{F} : X \longrightarrow [-1,1],\quad x \longmapsto \lambda(x)\tilde{F}(x),$$

stetig. Dann gilt $\hat{F}(X) \subseteq (-1,1)$ und $\hat{F}|_C = f$. $\square$

<u>Bew.</u> (Satz 3) Sei OBdA $f: C \longrightarrow [-1,1]$ stetig.

Beh. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists F_n : X \longrightarrow [-1,1]$ stetig mit

a) $|f(c) - (F_1(c) + F_2(c) + \dots + F_n(c))| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ , $\forall c \in C$.

b) $|F_n(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ , $\forall x \in X$.

Setze damit

$$F : X \to [-1,1],\ x \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x).$$

Nach der Beh. ist $F$ wohldef. mit $F|_C = f$.

$F$ ist zudem stetig, da

$$S_N(x) := \sum_{n=1}^{N} F_n(x)$$

gleichmässig gegen $F$ konvergiert nach (b).

Grund der Beh.

1) Setze $A := f^{-1}([\frac{1}{3}, 1])$ und $B := f^{-1}([-1, -\frac{1}{3}])$ abgs. und disjunkt. Nach dem Urysohnschen Lemma ex. ein

$$F_1 : X \longrightarrow [-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}]$$

stetig mit $F_1(A) \subseteq \{\frac{1}{3}\}$ und $F_1(B) \subseteq \{-\frac{1}{3}\}$. Setze

$$f_1 := f - F_1|_C : C \longrightarrow [-\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}].$$

2) Setze $A_1 := f_1^{-1}([\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\cdot 1])$ und $B_1 := f_1^{-1}([-1\cdot\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\cdot\frac{-1}{3}])$

Analog zu (1) ex.

$$F_2 : X \longrightarrow [-\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{3}]$$

stetig mit $F_2(A_1) \subseteq \{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\}$, $F_2(B) \subseteq \{-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\}$. Setze

$$f_2 := f_1 - F_2|_C : C \longrightarrow [-(\tfrac{2}{3})^2, (\tfrac{2}{3})^2].$$

3) Finde analog

$$F_n : X \longrightarrow [(-\tfrac{1}{3})(\tfrac{2}{3})^{n-1}, \tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{3})^{n-1}]$$

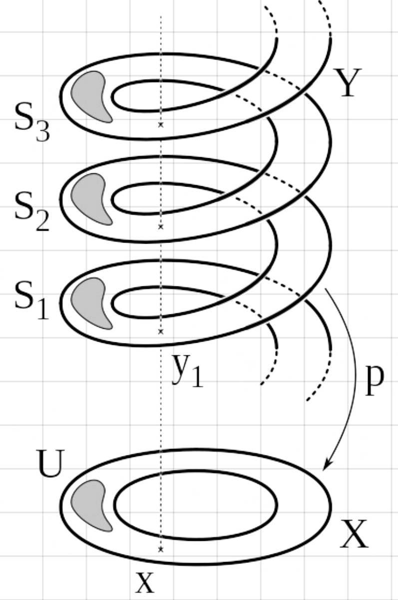
und def.

$$f_n := f_{n-1} - F_n|_C : C \longrightarrow \left[-\left(\tfrac{2}{3}\right)^n, \left(\tfrac{2}{3}\right)^n\right].$$

Dafür gilt nun (a) und (b). $\square$

<u>Übrigens.</u> (Metrisierungssatz) Ist $X$ ein $T_4$-Raum und erfüllt $X$ 2. AA, dann ist $X$ metrisierbar.

# 7. ÜBERLAGERUNGEN




19.5.

## TOPOLOGISCHE RÄUME ÜBER X

Sei $X$ ein top. Raum. Wir möchten top. Räume $Y$ mit stetiger Abbildung $f: Y \to X$ studieren.

**Bsp.** • Das Möbiusband $M = [-1,1] \times [0,1]/\alpha$ für $\alpha(s) = -s$ mit

$$\pi : M \to S^1,\ [(s,t)] \mapsto e^{2\pi i t}$$

und

$$\tilde{\pi} : S^1 \times [-1,1] \to S^1,\ [(s,t)] \mapsto s$$

} nicht isomorph

stetig.

**Def.** Zwei stetige $\pi : Y \to X$ und $\tilde{\pi} : \tilde{Y} \to X$ heissen isomorph über $X$, falls ein Homeomorphismus $\varphi : Y \to \tilde{Y}$ ex., s.d.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \tilde{Y} \arrow[dl, "\tilde{\pi}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

kommutiert, d.h. es gilt $\tilde{\pi} \circ \varphi = \pi$.

**Def.** Sei $\pi : Y \to X$ stetig.

- $\pi$ heisst triviale Faserung, falls ein top. Raum $F$ ex., s.d. $\pi$ isomorph zu

$$\tilde{\pi} : X \times F \to X,\ (x, f) \mapsto x$$

ist, d.h.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & X \times F \arrow[dl, "\tilde{\pi}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

kommutiert. $F$ heisst dann Faser.

- $\pi$ heisst lokal triviale Faserung oder Faserbündel, falls für alle $x \in X$ eine Umgebung $\mathcal{U}$ von $X$ ex., s.d. $\pi|^{\mathcal{U}}_{\pi^{-1}(\mathcal{U})} : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{U}$ eine triviale Faserung ist.

Bsp. $\pi : M \longrightarrow S^1$ ist nicht trivial aber lokal triviale Faserung.

Bem. Ist $X$ zsh. und $\pi : Y \longrightarrow X$ lokal triviale Faserung, dann gilt $\pi^{-1}(\{x_1\}) \cong \pi^{-1}(\{x_2\})$ für alle $x_1, x_2 \in X$

Bsp. Die Abbildungen

$$\partial M \longrightarrow S^1, \; [(s,t)] \longmapsto e^{2\pi i t}$$

und

$$S^1 \times \{-1,1\} \longrightarrow S^1, \; (s,t) \longmapsto s$$

sind lokal triviale Faserungen mit Faser $\cong \{-1,1\}$ mit trivialer Topologie.

# ÜBERLAGERUNG

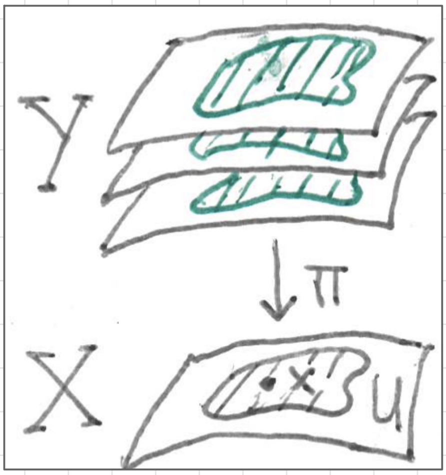
Def. Eine stetige, surjektive Abbildung $\pi : Y \longrightarrow X$ heisst Überlagerung von $X$, falls $\forall x \in X \; \exists \mathcal{U} \in \mathcal{O}_x$ mit $x \in \mathcal{U}$ und $\{\mathcal{U}_j\}_{j\in J} \subseteq \mathcal{O}_Y$ disjunkt, s.d.

$$\pi^{-1}(\mathcal{U}) = \bigsqcup_{j \in J} \mathcal{U}_j$$

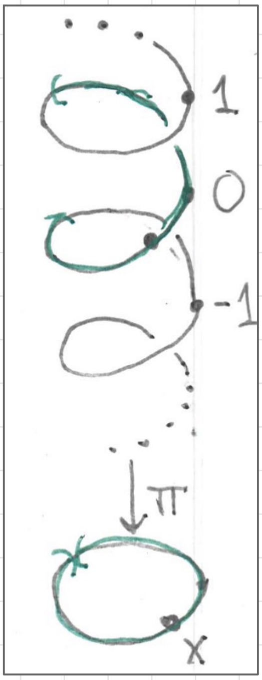
gilt und

$$\pi|^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}_j} : \mathcal{U}_j \longrightarrow \mathcal{U}$$

ein Homeomorphismus ist für alle $j \in J$.



**Bsp.** • $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $r \longmapsto e^{2\pi i r}$ ist eine Überlagerung.




Grund. Sei $x \in S^1$ beliebig und setze $U := S^1 \setminus \{-x\}$.

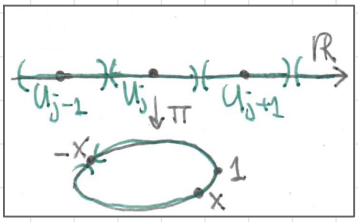
Dann gilt

$$\pi^{-1}(U) = \mathbb{R} \setminus \pi^{-1}(\{-x\}) = \bigsqcup_{j\in\mathbb{Z}} \overbrace{(r_0+j,\ r_0+j+1)}^{=:U_j}$$

für $r_0 \in \pi^{-1}(\{x\})$ und

$$\pi|_{U_j}^{U} : U_j \longrightarrow U,\ r \longmapsto e^{2\pi i r}$$

ist Homeom. mit Umkehrabb. $\frac{\log}{2\pi i}$.




**Bem.** (Alternative Def. von Überlagerung) Sei $\pi : Y \to X$ stetig.

Dann ist $\pi$ Überlagerung g.d.w. $\pi$ lokal triviale Faserung mit diskreter Faser ist.

**Bem.** Sei $\pi : Y \to X$ Überlagerung.

- Dann ist $\pi$ ein lokaler Homeomorphismus, d.h.

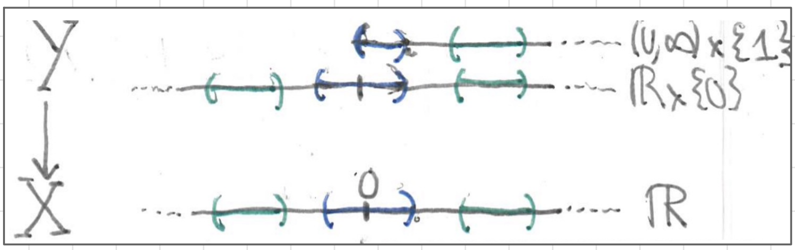
$$\forall y \in Y\ \exists y \in V \in \mathcal{O}_y\ \exists U \in \mathcal{O}_x : \pi|_V^U \text{ ist Homeomorphismus.}$$

- Gilt $|\pi^{-1}(\{x\})| = 1$ für alle $x \in X$, dann ist $X$ ein Homeomorphismus.

**Bsp.** Die Abbildung

$$\pi : Y := \mathbb{R} + (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ (r,k) \longmapsto r$$

ist ein lokaler Homeomorphismus aber keine Überlagerung.



**Def.** Sei $\pi : Y \to X$ eine Überlagerung.

- $U \in \mathcal{O}_X$ wie in der Def. heisst gleichmässig überlagert durch $\pi$. Die $U_j \in \mathcal{O}_Y$ heissen Blätter von $\pi$ über $U$.
- Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dann heisst $\pi$ $n$-blätterige Überlagerung, falls $|\pi^{-1}(\{x\})| = n$ für alle $x \in U$ gilt.

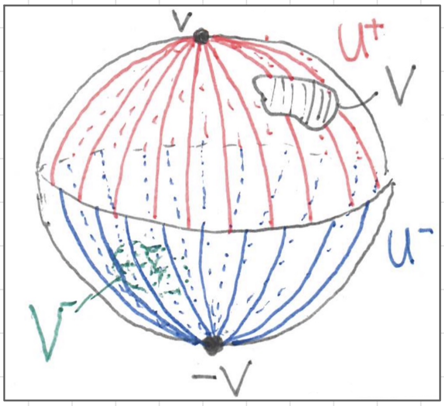
**Bsp.** Sei $d \in \mathbb{N}$ und $\pi : S^d \twoheadrightarrow S^d/\sim \; =: \mathbb{R}P^d$ mit $v \sim -v$.

Dann ist $\pi$ eine 2-blättrige Überlagerung.

Grund. Sei $x \in S^d/\sim$ und $v \in S^d$ mit $x = [v] = \{\pm v\}$.

Setze $U_\pm :=$ offene Hemisphäre um $\pm v$ und $U := \pi(U_+) = \pi(U_-)$.

Dann ist $U$ gleichmässig überlagert durch $\pi$ und $U_\pm$ sind zwei Blätter.




**Ziel.** Sei $X$ wegzsh.

- Klassifikation: Korrespondenz zwischen Überlagerungen (mit $Y$ auch wegzsh) und Untergruppen von $\pi_1(X)$.
- Konstruktion stetiger Hochhebungen: Sei $\pi : Y \to X$ Überlagerung und $f : Z \to X$ stetig. Wann ex. dann $\tilde{f} : Z \to Y$ mit $\pi \circ \tilde{f} = f$, d.h. wann kommutiert

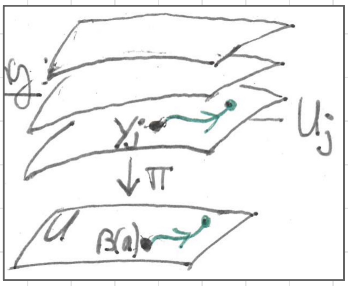
$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "\pi"] \\ Z \arrow[ur, dashed, "\exists ? \tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd} \quad ?$$

Konkret z.B.:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} \arrow[d, "\exp"] \\ \mathbb{C}^\times \supseteq Z \arrow[ur, dashed, "\exists ? \log"] \arrow[r, hook] & \mathbb{C}^\times \\ z \arrow[r, mapsto] & z \end{tikzcd}$$

# Hochheben von Wegen

**Def.** Sei $\pi : Y \to X$ eine Überlagerung und $\alpha$ ein Weg in $X$.
Ein Weg $\tilde{\alpha}$ in $Y$ heisst **Hochhebung** von $\alpha$ zum **Anfangspunkt** $y_0 \in Y$, falls $\tilde{\alpha}(0) = y_0$ und $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ gilt.




**Lemma 1.** (Hochhebung von Wegen) Sei $\pi : Y \to X$ Überlagerung, $\alpha : [a,b] \to X$ ein Weg und $y_0 \in \pi^{-1}(\alpha(a))$. Dann ex. genau eine Hochhebung von $\alpha$ zu $y_0$, d.h.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "\pi"] \\ {[a,b]} \arrow[ur, dashed, "\exists!\tilde{\alpha}"] \arrow[r, "\alpha"'] & X \end{tikzcd}.$$

**Bew.** Sei OBdA $[a,b] = [0,1]$.

Vorbemerkung. Sei $U \in \mathcal{O}_X$ gleichmässig überlagert. Für jeden Weg $\beta : [a,b] \to U$ gilt:

$$\forall y_j \in \pi^{-1}(\beta(a)) \; \exists! \text{ Hochhebung } \tilde{\beta} \text{ zu } y_j,$$

nämlich ist für $y_j \in U_j$

$$\tilde{\beta} = \tilde{\beta}_j := \left(\pi|_{U_j}^{U}\right)^{-1} \circ \beta : [a,b] \to U_j.$$

Insb. gilt $\mathrm{Bild}(\tilde{\beta}_j) \cap \mathrm{Bild}(\tilde{\beta}_k) = \emptyset$ für $j \neq k$.

Eindeutigkeit. Seien $\tilde{\alpha}$ und $\bar{\alpha}$ zwei Hochhebungen von $\alpha$

zu $y_0$. Sei $I := \{t \in [0,1] \mid \tilde{\alpha}(t) = \bar{\alpha}(t)\}$.

Beh. $I$ ist nicht-leer, offen und abgs.

$\longrightarrow$ ∘ nicht-leer, denn $\tilde{\alpha}(0) = y_0 = \bar{\alpha}(0)$.

∘ Sei $t_0 \in I$ und wähle $U \in \mathcal{O}_X$ glm. überlagert mit $\alpha(t_0) \in U$ und wähle $a < t_0 < b$ mit $\alpha([a,b]) \subseteq U$ falls möglich (sonst $a = t_0$ oder $b = t_0$).
Es gilt $\tilde{\alpha}(t_0) = \bar{\alpha}(t_0)$ und

$$\tilde{\beta} := \tilde{\alpha}|_{[a,b]}, \quad \bar{\beta} := \bar{\alpha}|_{[a,b]}$$

sind Hochhebungen von $\beta := \alpha|_{[a,b]}$. Aus der Vorbemerkung folgt nun $\tilde{\beta} = \bar{\beta}$ und damit ist $[a,b] \subseteq I$ Umgebung von $t_0$. Damit ist $I$ offen.

∘ Sei $t_0 \in [0,1] \setminus I$. Zeige ähnlich wie oben, dass dann Umgebung $U \subseteq [0,1] \setminus I$ von $t_0$ ex. Damit ist $I$ abgs.

Da $I$ zsh. ist, folgt $I = [0,1]$ und damit $\tilde{\alpha} = \bar{\alpha}$.

Existenz. Sei $I := \{t \in [0,1] \mid \alpha|_{[0,t]}$ besitzt Hochhebung zu $y_0\}$.
Dann gilt $I = [0,T)$ oder $I = [0,T]$ für $T := \sup I$.
Wähle $U$ glm. überlagert mit $\alpha(T) \in U$ und $a < T < b$ wie oben. Wähle $\tilde{\beta} : [a,b] \longrightarrow U_j \ni \tilde{\alpha}(a)$, wobei $\tilde{\alpha}$ Hochhebung von $\alpha|_{[0,a]}$ ist, mit $\pi \circ \tilde{\beta} = \alpha|_{[a,b]}$. Setze

$$\tilde{\alpha} : [0,b] \longrightarrow U_j,\ t \longmapsto \begin{cases} \tilde{\alpha}(t) & \text{für } t \leq a \\ \tilde{\beta}(t) & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\square$

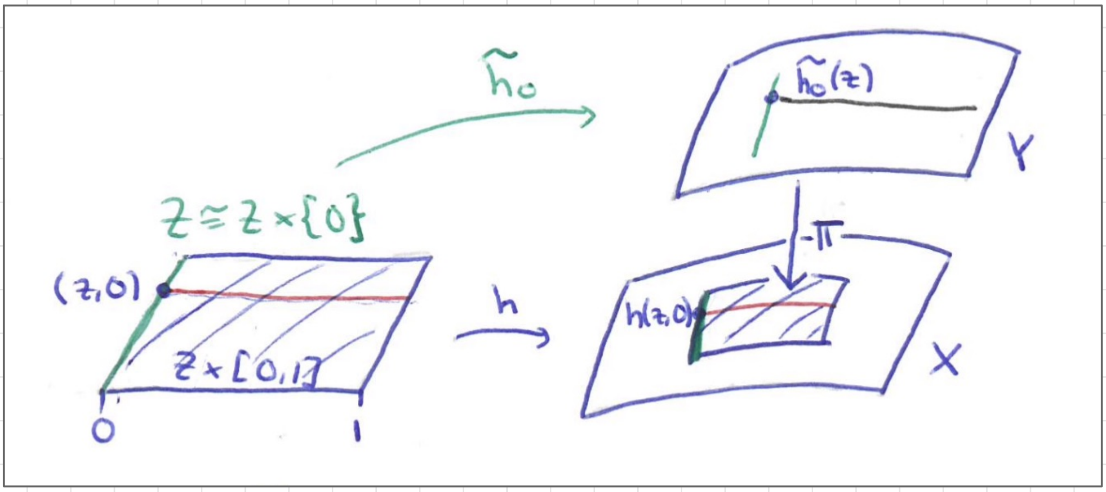
**Lemma 2.** (Hochhebung von Homotopien)

Sei $\pi: Y \to X$ eine Überlagerung, $Z$ ein top. Raum und $h: Z \times [0,1] \longrightarrow X$ stetige Abbildung und $\tilde{h}_0 : Z \longrightarrow Y$ stetige Hochhebung von $h_0 : Z \to X$, d.h. $\pi \circ \tilde{h}_0 = h_0$, wobei $h_0(z) = h(z,0)$.

Dann ex. ein eindeutiges

$$\tilde{h} : Z \times [0,1] \longrightarrow Y$$

stetig mit $\pi \circ \tilde{h} = h$ und $\tilde{h}(z,0) = \tilde{h}_0(z)$.




Bew. Für $z \in Z$ sei

$$\alpha_z : [0,1] \to X, \; t \longmapsto h(z,t).$$

Sei $\tilde{\alpha}_z$ die Hochhebung von $\alpha_z$ zum Anfangspunkt $\tilde{h}_0(z)$ nach Lemma 1. Definiere nun

$$\tilde{h} : Z \times [0,1] \longrightarrow Y, \; (z,t) \longmapsto \tilde{\alpha}_z(t).$$

Wir prüfen, dass $\tilde{h}$ eine Hochhebung ist:

- $\pi \circ \tilde{h} = h$ gilt, da
$$\pi(\tilde{h}(z,t)) = \pi(\tilde{\alpha}_z(t)) = \alpha_z(t) = h(z,t).$$
- $\tilde{h}(z,0) = \tilde{\alpha}_z(0) = \tilde{h}_0(z)$ gilt ebenfalls.
- $\tilde{h}$ ist auch stetig (ähnlich wie im Bew von Lemma 1).
  siehe Jänich S. 156 f

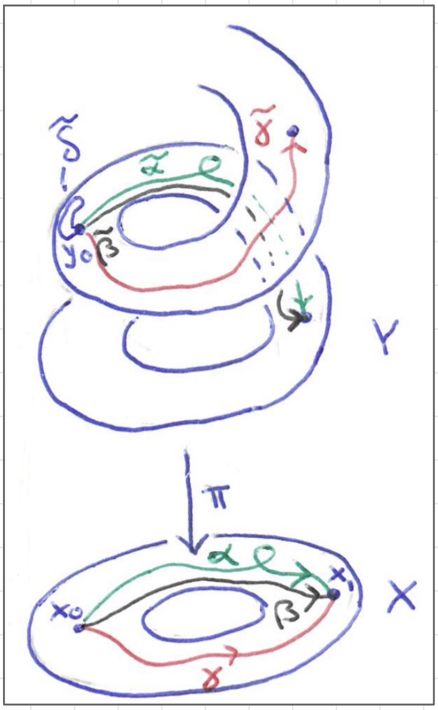
Eindeutigkeit. Sei nun $\bar{h} : Z \times [0,1] \to Y$ eine weitere stetige Abbildung mit $\alpha \circ \bar{h} = h$ und $\bar{h}(z,0) = \tilde{h}_0(z)$.

Sei
$$\bar{\alpha}_z : [0,1] \longrightarrow Y, \quad t \longmapsto \bar{h}(z,t).$$

Nach Lemma 1 gilt dann
$$\bar{\alpha}_z = \tilde{\alpha}_z$$
für alle $z \in Z$ und damit folgt $\bar{h} = \tilde{h}$. $\square$

**Korollar 1.** (Monodromielemma)

Sei $\pi : Y \to X$ eine Überlagerung, $y_0 \in Y$ und $\alpha, \beta$ Wege in $X$ mit $\alpha \simeq \beta$ rel. Endpunkte. Falls $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ Hochhebungen von $\alpha$ und $\beta$ zu $y_0$ sind, dann gilt $\tilde{\alpha} \simeq \tilde{\beta}$ rel. Endpunkte.




Bew. Seien $\alpha \simeq \beta$ rel. Endpunkte via $h : [0,1]^2 \to X$. Sei

Da
$$x_0 := \alpha(0) = \beta(0),$$
$$h_0(t) := h(0,t) = x_0$$
gilt, ist $y_0 =: \tilde{h}_0(t)$ Hochhebung von $h_0(t)$. Nach Lemma 2 $\exists!$
$$\tilde{h} : [0,1]^2 \longrightarrow Y$$
stetig mit $\pi \circ \tilde{h} = h$ und $\tilde{h}(0,t) = y_0$.

Dann gilt

- $\tilde{h}(\cdot, 0)$ ist Hochhebung von $\alpha$ zu $y_0$.
- $\tilde{h}(\cdot, 1)$ ist Hochhebung von $\beta$ zu $y_0$.

Nach der Eindeutigkeit in Lemma 1 gilt nun

$$\tilde{\alpha} = \tilde{h}(\cdot, 0), \quad \tilde{\beta} = \tilde{h}(\cdot, 1)$$

und damit folgt $\tilde{\alpha} \simeq \tilde{\beta}$ via $\tilde{h}$. Zudem gilt

- $\tilde{h}(0, t) = y_0$
- $\tilde{h}(1, t) = \pi^{-1}(h(1,t)) = \pi^{-1}(\alpha(1)) \subseteq Y$. Da $Y$ diskret ist, muss $\tilde{h}(1,t) =: y_1 \in Y$ konstant sein.

Damit gilt $\tilde{\alpha} \simeq \tilde{\beta}$ rel. Endpunkte.

# Fundamentalgruppe & Hochhebeverhalten

<u>Notation.</u> Schreibe $f : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ kurz für $f : Y \to X$ mit $y_0 \in Y$, $x_0 \in X$ und $f(y_0) = x_0$.

<u>Korollar 2.</u> Sei $\pi : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung. Dann ist $\pi_* : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ injektiv.

<u>Bew.</u> Sei $[\tilde{\delta}] \in \mathrm{Kern}(\pi_*)$, d.h. es gilt

$$\pi \circ \tilde{\delta} \simeq \mathrm{konst}_{x_0}$$

rel. $x_0$. Zudem sind $\tilde{\delta}$ und $\mathrm{konst}_{y_0}$ sind Hochhebungen von $\pi \circ \tilde{\delta}$ und $\mathrm{konst}_{x_0}$ zu $y_0$. Nach Korollar 1 folgt nun

$$\tilde{\delta} \simeq \mathrm{konst}_{y_0}$$

rel. $y_0$ und damit $[\tilde{\delta}] = 1$. $\square$

**Def.** Sei $\pi : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung.
Dann heisst

$$G(\pi, y_0) := G(\pi) := \pi_*(\pi_1(Y, y_0)) < \pi_1(X, x_0)$$

charakteristische Untergruppe der Überlagerung $\pi$.

**Bsp.** Für $\pi : S^1 \longrightarrow S^1$, $z \longmapsto z^n$ gilt

$$G(\pi) \cong n\mathbb{Z} < \mathbb{Z}.$$

**Bem.** Sei $\pi : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung und 26.5.
$f : (Z, z_0) \longrightarrow (X, x_0)$ stetig. Sei zudem

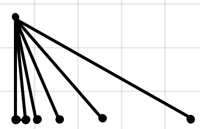
$$\tilde{f} : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$$

eine Hochhebung von $f$, d.h. $\tilde{f}$ ist stetig und es gilt $\pi \circ \tilde{f} = f$. Dann gilt auch $\pi_* \circ \tilde{f}_* = f_*$ und damit

$$f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subseteq G(\pi).$$

**Def.** Ein top. Raum $X$ heisst lokal wegzusammenhängend, falls $\forall x \in X$ jede Umgebung von $x$ eine wegzsh. Umgebung von $x$ enthält.

**Bsp.**
- Offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind lokal wegzsh.
- Der Kegel $C(\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}) \subseteq \mathbb{R}^2$ ist wegzsh., aber nicht lokal wegzsh.



**Satz.** (Hochhebbarkeitskriterium)
Sei $\pi : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung und $Z$ wegzsh. und lokal wegzsh und

$$f : (Z, z_0) \longrightarrow (X, x_0).$$

Dann ex. eine, und dann auch nur eine, Hochhebung

$$\tilde{f} : (Z, z_0) \longrightarrow (Y, y_0)$$

von $f$ (d.h. $\pi \circ \tilde{f} = f$ und $\tilde{f}$ stetig) g.d.w.

$$f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subseteq G(\pi)$$

gilt.

<u>Bew</u> "$\Rightarrow$": Folgt aus obiger Bemerkung.

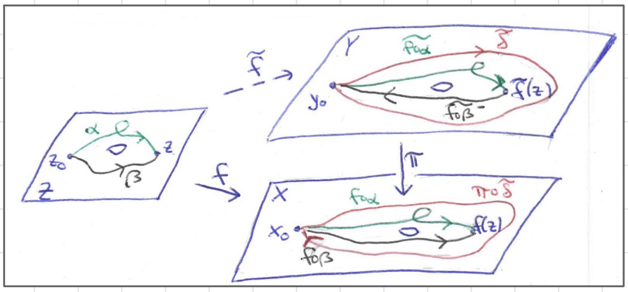
"$\Leftarrow$": Schritt 1. Für jedes $z \in Z$,

wähle $\alpha$ Weg von $z_0$ nach $z$

und setze

eindeutige Hochhebung von $f \circ \alpha$

$$\tilde{f}(z) := (\widetilde{f \circ \alpha})(1).$$




Schritt 2. $\tilde{f}$ ist wohldef., denn sei $\beta$ ein weiterer Weg von $z_0$ nach $z$. Dann ist $\alpha\beta^-$ eine Schleife an $z_0$.

Setze

$$\gamma := f \circ (\alpha\beta^{-1}) = (f \circ \alpha)(f \circ \beta^-)$$

Schleife an $x_0$. Dann gilt

$$[\gamma] = f_*([\alpha\beta^-]) \in f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subseteq G(\pi),$$

d.h. $\gamma \simeq \pi \circ \tilde{\delta}$ rel. Endpunkte für eine Schleife $\tilde{\delta}$ an $y_0$. Nach Korollar 1 ist die Hochhebung $\tilde{\gamma}$ von $\gamma$ zu $y_0$ eine Schleife. Wegen

$$\tilde{\gamma} = (\widetilde{f \circ \alpha})(\widetilde{f \circ \beta^-})$$

ist $(\widetilde{f \circ \beta^-})^- = \widetilde{f \circ \beta}$ und damit

$$(\widetilde{f \circ \beta})(1) = (\widetilde{f \circ \beta^-})(0) = (\widetilde{f \circ \alpha})(1),$$

womit $\tilde{f}$ wohldef. ist.

Schritt 3. Es gilt $\pi \circ \tilde{f} = f$, da

$$\pi(\tilde{f}(z)) = \pi((\widetilde{f\circ\alpha})(1)) = f(\alpha(1)) = f(z)$$

gilt.

Schritt 4. Wir zeigen Stetigkeit von $\tilde{f}$ bei $z \in Z$.

Sei $V \subseteq Y$ offen mit $\tilde{f}(z) \in V$. Sei OBdA $U := \pi(V)$ offen und

$$\pi|_V^U : V \longrightarrow U$$

ein Homeom. Wähle wegzsh. Umgebung $W \subseteq Z$ von $z$ mit $f(W) \subseteq U$ durch lokal wegzsh. von $Z$. Sei $w \in W$. Sei nun $\alpha$ ein Weg von $z_0$ nach $z$ und $\beta$ ein Weg von $z$ nach $w$. Dann gilt

$$\tilde{f}(w) = ((\widetilde{f\circ\alpha})(\widetilde{f\circ\beta}))(1) = (\widetilde{f\circ\beta})(1) \in V,$$

da

$$\widetilde{f\circ\beta} = (\pi|_V^U)^{-1} \circ (f\circ\beta)$$

und

$$(f\circ\beta)(1) = f(w) \in U.$$

Damit ist $\tilde{f}$ stetig.

Schritt 5 Eindeutigkeit von $\tilde{f}$ folgt ähnlich wie im Beweis von Lemma 1. $\square$

# KLASSIFIKATION VON ÜBERLAGERUNGEN

Korollar 3. (Eindeutigkeitssatz)

Seien

$$\pi : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$$

und

$$\pi' : (Y', y_0') \longrightarrow (X, x_0)$$

Überlagerungen mit $Y$, $Y'$ wegzsh. und lokal wegzsh. Dann ex. ein, und dann genau ein, basispunkterhaltender Isomorphismus zwischen $\pi$ und $\pi'$ g.d.w.

$$G(\pi) = G(\pi')$$

gilt.

<u>Bew.</u> "$\Rightarrow$": Sei $\varphi : (Y, y_0) \longrightarrow (Y', y_0')$ ein basispunkterhalternder Isomorphismus, d.h. $\pi = \pi' \circ \varphi$. Dann gilt

$$\begin{aligned} G(\pi) &= \pi_*(\pi_1(Y, y_0)) \\ &= (\pi' \circ \varphi)_*(\pi_1(Y, y_0)) \\ &= \pi'_*(\varphi_*(\pi_1(Y, y_0))) \\ &= \pi'_*(\pi_1(Y', y_0')) = G(\pi'). \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$": Agn. es gilt OBdA $G(\pi) = G(\pi')$. Dann gilt

$$\pi_*(\pi_1(Y, y_0)) = G(\pi) \subseteq G(\pi')$$

und nach obigem Satz ex. Hochhebung

$$\varphi : (Y, y_0) \longrightarrow (Y', y_0')$$

mit $\pi = \pi' \circ \varphi$. Analog ex. ein

$$\psi : (Y', y_0') \longrightarrow (Y, y_0)$$

mit $\pi' = \pi \circ \psi$. Dann ist

$$\psi \circ \varphi : (Y, y_0) \longrightarrow (Y, y_0)$$

die eindeutige Hochhebung von $\pi$ bzgl. $\pi$.

Doch da id ebenfalls eine solche Hochhebung ist, folgt

$$\psi \circ \varphi = id.$$

Analog folgt $\varphi \circ \psi = id$, womit $\varphi$ Homöom. ist. $\square$

**Satz 2.** (Existenzsatz)

Sei $X$ hinreichend* zsh., $x_0 \in X$ und

$$G < \pi_1(X, x_0)$$

eine Untergruppe. Dann ex. eine Überlagerung

$$\pi : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$$

mit $Y$ hinreichend zsh., s.d. $G(\pi) = G$ gilt.

**Vorbemerkung A.** Sei $\pi : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung mit $G(\pi) = \{1\}$ und $U$ glm überlagerte Umgebung von $x_0$. Dann gilt für Schleifen $\alpha$ an $x_0$ in $U$

$$\alpha = \pi \circ \tilde{\alpha}$$

für eine Schleife $\tilde{\alpha}$ an $y_0$. Dann gilt

$$[\alpha] \in G(\pi) = \{1\}$$

$$\Rightarrow \alpha \simeq \text{konst}_{x_0} \text{ rel. Endpunkte in } X.$$

**Def.** Ein top. Raum $X$ heisst semilokal einfach zusammenhängend, falls für alle $x_0 \in X$ eine Umgebung $U$ von $x_0$ ex., s.d. alle Schleifen an $x_0$ in $U$ homotop zu $\text{konst}_{x_0}$ rel. Endpunkte in $X$ sind.

*__Def.__ Ein top. Raum $X$ heisst hinreichend zusammenhängend, wenn $X$ zsh., lokal zsh. und semilokal einfach zsh. ist.

**Bsp.** Offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind semilokal einfach zsh.

**Vorbetrachtung B.** Sei $X = S^1$, $G = \{1\}$ und

$$\pi : (\mathbb{R}, 0) \longrightarrow (S^1, 1), \; r \longmapsto e^{2\pi i r}.$$

Was zeichnet $\pi$ bzw. $\mathbb{R}$ aus?

$\longrightarrow$ Sei $r \in \mathbb{R}$. Dann $\exists! [\alpha]$ für $\alpha$ Weg in $S^1$

mit $\tilde{\alpha}(1) = r$ und $\tilde{\alpha}(0) = 1$.

**Bew.-Skizze.** (vom Existenzsatz)

Sei $X$, $x_0 \in X$ und $G < \pi_1(X, x_0)$.

- Def. $Y := \Omega(X, x_0) := \bigcup_{x \in X} \Omega(X, x_0, x)$,

  wobei
  $$Y_x := \Omega(X, x_0, x) := \{\alpha \mid \alpha \text{ Weg von } x_0 \text{ nach } x\}.$$

- Für $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0, x)$ setze
  $$\alpha \sim \beta :\Leftrightarrow [\alpha\beta^-] \in G.$$

- Sei $y_0 := [\mathrm{konst}_{x_0}] \in Y_{x_0}$ und  2.6.
  $$\pi : Y \longrightarrow X, \; [\alpha] \longmapsto \alpha(1) = x.$$
  $\longrightarrow \pi$ ist surj.

- Def. Topologie auf $Y$: Für $x \in X$, $U$ offen wegzsh. mit $x \in X$ und $\alpha$ Weg von $x_0$ nach $x$ und $y = [\alpha] \in Y$. Setze
  $$V(U, [\alpha]) := \{[\alpha\beta] \mid \beta \text{ Weg in } U \text{ mit } \beta(0) = x\}.$$

  Dann ist
  $$\mathcal{B} := \{V(U, y) \mid U \in \mathcal{O}_x \text{ wegzsh. mit } \pi(y) \in U\}$$
  Basis einer Topologie auf $Y$, s.d. $\pi$ eine Überlagerung ist mit $G = G(\pi)$.

# DECKBEWEGUNGSGRUPPE UND UNIVERSELLE ÜBERLAGERUNG

Def. Sei $\pi : Y \longrightarrow X$ Überlagerung.

- $\varphi : Y \longrightarrow Y$ Homeom. mit $\pi \circ \varphi = \pi$ heisst Deckbewegung.
- $\mathrm{Deck}(\pi) := \{\varphi \mid \varphi \text{ ist Deckbewegung}\}$ mit Verknüpfung heisst Deckbewegungsgruppe.

Bsp. Für $\pi : \mathbb{R} \to S^1$, $r \longmapsto e^{2\pi i r}$ gilt

$$\mathrm{Deck}(\pi) \cong \mathbb{Z}.$$

Beh. Es ex. ein Isomorphismus

$$\Psi : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathrm{Deck}(\pi),$$

$$[\alpha] \longmapsto \varphi \text{ mit } \varphi(0) = \tilde{\alpha}(1) = k.$$

entspricht $k \in \mathbb{Z}$

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x + k$

Bsp. Sei $\pi_n : S^1 \longrightarrow S^1$, $z \longmapsto z^n$. Dann gilt

$$\mathrm{Deck}(\pi_n) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1, 1) / G(\pi)$$

Beobachtung

Satz 3. (Deckbewegungsgruppen)

Seien $X$, $Y$ lokal wegzsh. und wegzsh. und

$$\pi : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$$

eine Überlagerung und sei $G := G(\pi)$. Dann für

$$[\alpha] \in N_G < \pi_1(X, x_0)$$

ex. genau ein $\varphi_{[\alpha]} \in \mathrm{Deck}(\pi)$ mit $\varphi_{[\alpha]}(y_0) = \tilde{\alpha}(1)$.

Zudem ist

$$\psi: N_G/G \longrightarrow \mathrm{Deck}(\pi),\ [\alpha] \longmapsto \varphi_{[\alpha]}$$

ein Gruppenisomorphismus, wobei

$$N_G := \{h \in \pi_1(X, x_0) \mid h^{-1}Gh = G\}.$$

Spezialfälle:

- $G = \{1\} \Rightarrow N_G = \pi_1(X, x_0)$.
- $G \trianglelefteq \pi_1(X, x_0) \Leftrightarrow N_G = \pi_1(X, x_0)$.

<u>Bsp.</u> Sei $\pi: S^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n = S^n/\sim$, $v \sim -v$ für $n \geq 2$.

Dann gilt

- $\mathrm{Deck}(\pi) = \{id, -id\}$, denn

  "$\supseteq$": Klar.

  "$\subseteq$": Sei $v_0 \in S^n$ fix. Es gilt $\pi^{-1}(\pi(v_0)) = \{v_0, -v_0\}$.

$$\varphi \in \mathrm{Deck}(\pi) \Rightarrow \varphi(v_0) \in \{v_0, -v_0\}$$

$$\overset{\substack{\text{Eindeutigkeit} \\ \text{in Korollar 3}}}{\Longrightarrow} \varphi \in \{id, -id\}.$$

Nach Satz 3 gilt damit

$$\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \mathrm{Deck}(\pi) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

$\longrightarrow$ Es gilt $\pi_1(SO_3(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, denn

$$SO_3(\mathbb{R}) \cong D^3/\sim \cong \mathbb{RP}^3.$$

<u>Def.</u> Sei $\pi: Y \longrightarrow X$ Überlagerung und $X, Y$ lokal wegzsh. und wegzsh.

- $\pi$ heisst **universelle Überlagerung**, falls $Y$ einfach zsh. ist.
- $\pi$ heisst **normal**, falls $G(\pi) \trianglelefteq \pi_1(X, x_0)$.

**Bem.** Sei $\pi : Y \longrightarrow X$ Überlagerung und $X, Y$ lokal wegzsh. und wegzsh. und $x_0 \in X$.

- $\pi$ ist normal g.d.w. $\mathrm{Deck}(\pi)$ transitiv auf $\pi^{-1}(x_0)$ operiert.
- $|\pi^{-1}(x_0)| = |\pi_1(X, x_0) / G(\pi)|$.
- Bis auf basispunkterhaltende Isomorphie ist die universelle Überlagerung eindeutig und ex. für hinreichend zsh $X$.
- Sei $\pi : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ beliebige Überlagerung mit $X, Y$ hinreichend zsh. und $\tilde{\pi} : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \longrightarrow (X, x_0)$ universelle Überlagerung. Dann ex. eindeutiges
$$\varphi : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \longrightarrow (Y, y_0)$$
stetig mit $\pi \circ \varphi = \tilde{\pi}$ und $\varphi$ ist eine Überlagerung.

"**Satz.**" Die universelle Überlagerung überlagert jede andere Überlagerung.