Analysis I Zusammenfassung

Quelle: Einsiedler, Manfred, Peter Jossen, und Andreas Wieser. "Analysis I und II." (2017).

Eric Ceglie

! := auswendig lernen

1. Einführung

Lemma 1.38 (Eigenschaften von Verknüpfungen)**.** *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen.*

(i) Falls f und g injektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.

(ii) Falls f und g surjektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.

(iii) Falls f und g bijektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ bijektiv und es gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Bew. direkt über Def.

Wichtige Übung 1.39 (Weitere Eigenschaften von Verknüpfungen)**.** *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen.*

(i) Zeigen Sie, dass g surjektiv ist, falls $g \circ f$ surjektiv ist. Überzeugen Sie sich davon, dass in diesem Fall f nicht unbedingt surjektiv sein muss.

(ii) Zeigen Sie, dass f surjektiv ist, falls $g \circ f$ surjektiv und g injektiv ist.

(iii) Zeigen Sie, dass f injektiv ist, falls $g \circ f$ injektiv ist. Überzeugen Sie sich davon, dass in diesem Fall g nicht unbedingt injektiv sein muss.

(iv) Zeigen Sie, dass g injektiv ist, falls $g \circ f$ injektiv ist und f surjektiv ist.

Peano Axiome. *Die* ***natürlichen Zahlen*** $\mathbb{N}$ *sind (in einem gewissen Sinne eindeutig) durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert:*

(i) Es existiert ein ausgezeichnetes Element $1 \in \mathbb{N}$ und eine injektive Abbildung $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, auch Nachfolgerfunktion genannt, so dass $1 \notin \nu(\mathbb{N})$.

(ii) $\mathbb{N}$ erfüllt das Induktionsaxiom: Ist A eine Teilmenge von $\mathbb{N}$, die 1 enthält und für alle $n \in \mathbb{N}$ die Eigenschaft „$n \in A \implies \nu(n) \in A$“ erfüllt, dann gilt $A = \mathbb{N}$.

Proposition 1.64 (Korrespondenz zwischen Äquivalenzrelationen und Partitionen)**.** *Sei X eine Menge. Dann entsprechen Äquivalenzrelationen auf X und Partitionen von X einander im folgenden Sinne: Für eine gegebene Äquivalenzrelation $\sim$ auf X ist die Menge*

$$\mathcal{P}_\sim = \{[x]_\sim \mid x \in X\}$$

eine Partition von X. Umgekehrt definiert für eine Partition $\mathcal{P}$ von X

$$x \sim_{\mathcal{P}} y \iff \exists P \in \mathcal{P} : x \in P \wedge y \in P$$

für $x, y \in X$ eine Äquivalenzrelation auf X. Des Weiteren sind die Konstruktion der Partition aus der Äquivalenzrelation und die Konstruktion der Äquivalenzrelation aus der Partition zueinander invers: Für jede Partition $\mathcal{P}$ von X gilt $\mathcal{P}_{\sim_{\mathcal{P}}} = \mathcal{P}$ und für jede Äquivalenzrelation $\sim$ auf X gilt $\sim_{\mathcal{P}_\sim} = \sim$.

Definition 1.31 (Drei Eigenschaften von Funktionen)**.** Sei $f : X \to Y$ eine Funktion.

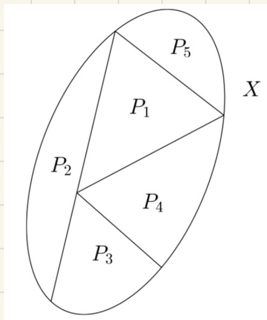
- Die Funktion f heisst **injektiv** oder eine **Injektion** falls für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt, dass $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.
- Die Funktion f ist **surjektiv**, eine **Surjektion** oder eine Funktion von X **auf** Y, falls es zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.
- Die Funktion f heisst **bijektiv**, eine **Bijektion** oder eine **eineindeutige Abbildung**, falls f surjektiv und injektiv ist.

Definition 1.42 (Graph einer Funktion)**.** Sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Der **Graph** von f ist

$$\operatorname{graph}(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} \subseteq X \times Y.$$

Definition 1.46 (Urbilder bezüglich einer Funktion)**.** Für eine Funktion $f : X \to Y$ und eine Teilmenge $B \subseteq Y$ definieren wir das **Urbild** $f^{-1}(B)$ von B unter f als

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$



Bsp

Definition 1.49 (Partition)**.** Sei X eine Menge und $\mathcal{P}$ eine Familie von nicht-leeren, paarweise disjunkten Teilmengen von X, so dass $X = \bigsqcup_{P \in \mathcal{P}} P$. Dann wird $\mathcal{P}$ eine **Partition** von X genannt.

Definition 1.56 (Relationen)**.** Seien X und Y Mengen. Eine **Relation** auf $X \times Y$ ist eine Teilmenge $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$. Wir schreiben auch $x\mathcal{R}y$ falls $(x, y) \in \mathcal{R}$ und verwenden oft Symbole wie $<, \ll, \leq, \cong, \equiv, \sim$ für Relationen. Falls $X = Y$ ist, dann sprechen wir auch von einer Relation auf X. Wenn $\sim$ (resp. $\cong, \ldots$) eine Relation ist, dann schreiben wir auch „$x \not\sim y$“ (resp. „$x \ncong y$“, ...) für „$\neg(x \sim y)$“ (resp. „$\neg(x \cong y)$“, ...).

!

Definition 1.58 (Äquivalenzrelationen)**.** Eine Relation $\sim$ auf X ist eine **Äquivalenzrelation**, falls folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:

- Reflexivität: $\forall x \in X : x \sim x$.
- Symmetrie: $\forall x, y \in X : x \sim y \implies y \sim x$.
- Transitivität: $\forall x, y, z \in X : ((x \sim y) \wedge (y \sim z)) \implies x \sim z$.

Definition 1.63 (Äquivalenzklassen und die Quotientenmenge)**.** Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X. Dann wird für $x \in X$ die Menge

$$[x]_\sim = \{y \in X \mid y \sim x\}$$

die **Äquivalenzklasse** von x genannt. Weiters ist

$$X/_\sim = \{[x]_\sim \mid x \in X\}$$

der **Quotient** (oder die **Quotientenmenge**) von X modulo $\sim$. Ein Element $x \in X$ wird auch **Repräsentant** seiner Äquivalenzklasse $[x]_\sim$ genannt.

!

Definition 1.74. Eine Menge X heisst **abzählbar unendlich** (oder kurz **abzählbar**), falls eine Bijektion zwischen X und $\mathbb{N}$ existiert. Eine Menge, die weder endlich noch abzählbar unendlich ist, nennt man auch **überabzählbar**.

Die Definition wiederspiegelt die Anschauung, dass abzählbare Mengen gerade jene sein sollten, die sich „abzählen lassen“.

2. Reelle Zahlen

Körperaxiome:

Axiome (Addition). *Die Addition erfüllt folgende Eigenschaften:*

(1) *(Nullelement)* $\exists 0 \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = 0 + x = x$.

(2) *(Additives Inverses)* $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists (-x) \in \mathbb{R} : x + (-x) = (-x) + x = 0$

(3) *(Assoziativgesetz)* $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) + z = x + (y + z)$

(4) *(Kommutativgesetz)* $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$

Axiome (Multiplikation). *Die Multiplikation erfüllt folgende Eigenschaften:*

(5) *(Einselement)* $\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \ \forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.

(6) *(Multiplikative Inverse)* $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \ \exists (x^{-1}) \in \mathbb{R} : x \cdot (x^{-1}) = (x^{-1}) \cdot x = 1$

(7) *(Assoziativgesetz)* $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

(8) *(Kommutativgesetz)* $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y \cdot x$.

Axiome (Kompatibilität von + und ·). *Wir verlangen*

(9) *(Distributivgesetz)* $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$

Axiome (Anordnung). *Die Relation $\leq$ auf $\mathbb{R}$ erfüllt die folgenden vier Axiome*

(10) *(Reflexivität)* $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x$

(11) *(Antisymmetrie)* $\forall x, y \in \mathbb{R} : \big((x \leq y \wedge y \leq x) \implies x = y\big)$

(12) *(Transitivität)* $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \big((x \leq y \wedge y \leq z) \implies x \leq z\big)$

(13) *(Linearität)* $\forall x, y \in \mathbb{R} : \big(x \leq y \vee y \leq x\big)$

Axiome (Kompatibilität von $\leq$). *Wir verlangen*

(14) *($\leq$ und $+$)* $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \big(x \leq y \implies x + z \leq y + z\big)$.

(15) *($\leq$ und $\cdot$)* $\forall x, y \in \mathbb{R} : \big((0 \leq x \wedge 0 \leq y) \implies 0 \leq x \cdot y\big)$.

!

Axiom (Vollständigkeit). *Die reellen Zahlen erfüllen folgendes Axiom:*

(16) *Zuerst in Worten: Falls X, Y zwei nicht-leere Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind und für alle $x \in X$ und $y \in Y$ die Ungleichung $x \leq y$ gilt, dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, das zwischen X und Y liegt in dem Sinn, als dass für alle $x \in X$ und $y \in Y$ die Ungleichung $x \leq c \leq y$ gilt. Formal:*

$$\forall X, Y \subseteq \mathbb{R} : \ \big((X \neq \emptyset \wedge Y \neq \emptyset \wedge \forall x \in X\ \forall y \in Y : x \leq y) \implies (\exists c \in \mathbb{R} \forall x \in X\ \forall y \in Y : x \leq c \leq y)\big)$$

Bew. hinzufügen!

Proposition 2.34 (Komplexe Zahlen). *Mit den oben definierten Verknüpfungen definiert $\mathbb{C}$ einen Körper, den **Körper der komplexen Zahlen**. Hierbei ist die Null gleich $0 + 0\mathrm{i}$ und die Eins gleich $1 + 0\mathrm{i}$.*

Lemma 2.38 (Eigenschaften der Konjugation). *Die komplexe Konjugation erfüllt folgende Eigenschaften:*

(i) Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $z\bar{z} \in \mathbb{R}$ und $z\bar{z} \geq 0$. Des Weiteren gilt für alle $z \in \mathbb{C}$, dass $z\bar{z} = 0$ genau dann, wenn $z = 0$.

(ii) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.

(iii) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.

Bew. über direkte Rechnung

Definition 2.12 (Induktive Teilmengen)**.** Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist **induktiv**, falls folgende zwei Eigenschaften gelten:

(i) $1 \in M$

(ii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \in M \implies x + 1 \in M$.

Beispielsweise ist $\mathbb{R}$ eine induktive Menge (gewissermassen die grösste solche). Die „kleinste“ induktive Menge sollen die natürlichen Zahlen sein.

Lemma 2.14 (Kleinste induktive Menge)**.** *Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bilden eine induktive und somit die kleinste induktive Teilmenge der reellen Zahlen.*

Die **ganzen Zahlen** sind als Teilmenge von $\mathbb{R}$ durch

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \sqcup \{0\} \sqcup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}_0 \sqcup -\mathbb{N}$$

definiert.

2.2.3 Die rationalen Zahlen

Die **rationalen Zahlen** sind definiert als die Teilmenge von Quotienten

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Lemma 2.28 (Rationale Zahlen). *Die rationalen Zahlen bilden einen Unterkörper von $\mathbb{R}$, das heisst, für alle $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt $-r, r + s, rs \in \mathbb{Q}$ und auch $r^{-1} \in \mathbb{Q}$, falls $r \neq 0$.*

2.3 Die komplexen Zahlen

Unter Verwendung der reellen Zahlen können wir die Menge der komplexen Zahlen als

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

definieren. Wir schreiben ein Element $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ viel häufiger in der Form $z = x + y\mathrm{i}$,

(g) *(Dreiecksungleichung) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Diese Ungleichung wird auch die ***Dreiecksungleichung*** *genannt.* Sie folgt, in dem wir $-|x| \leq x \leq |x|$ und $-|y| \leq y \leq |y|$ wie in (e) addieren und anschliessend auf

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

wiederum Eigenschaft (e) anwenden.

(h) *(umgekehrte Dreiecksungleichung) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Denn die Dreiecksungleichung in (g) zeigt

$$|x| \leq |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$$

was zu $|x| - |y| \leq |x - y|$ führt. Durch Vertauschen von x, y erhalten wir $|y| - |x| \leq |x - y|$. Also ist nach Eigenschaft (e) $||x| - |y|| \leq |x - y|$ wie gewünscht.

Eigenschaften des Absolutbetrags auf $\mathbb{C}$.

(i) *(Definitheit) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $|z| \geq 0$ und $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$.*

(ii) *(Multiplikativität) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $|zw| = |z||w|$.*

(iii) *(Dreiecksungleichung) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $|z + w| \leq |z| + |w|$.*

(iv) *(Umgekehrte Dreiecksungleichung) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $||z| - |w|| \leq |z - w|$.*

Bew: $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$

$\implies |x| - |y| \leq |x - y|$.

Vertausche x, y und erhalte insgesamt

$||x| - |y|| \leq |x - y|$. $\square$

Satz 2.60 (Supremum)**.** *Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine von oben beschränkte, nicht-leere Teilmenge. Dann gibt es eine* ***kleinste obere Schranke*** *von X, die auch das* ***Supremum*** $\sup(X)$ *von X genannt wird. Formal gelten also für $s_0 = \sup(X)$ folgende Eigenschaften:*

(1) (s_0 ist eine obere Schranke) $\forall x \in X : x \leq s_0$

(2) (s_0 ist kleiner gleich jeder oberen Schranke) $\forall s \in \mathbb{R} : ((\forall x \in X : x \leq s) \implies s_0 \leq s)$

Äquivalenterweise kann $s_0 = \sup(X)$ auch durch (1) und die folgende Bedingung definiert werden:

(2') (Kleinere Zahlen sind keine oberen Schranken) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in X : x > s_0 - \varepsilon$.

Bew: Sei $Y = \{s \in \mathbb{R} \mid \forall x \in X : x \leq s\}$. Damit gilt $X, Y \neq \emptyset$ und $\forall x \in X\ \forall y \in Y : x \leq y$.

Also existiert nach dem Vst.axiom ein $s_0 \in \mathbb{R}$, s.d. $\forall x \in X \forall y \in Y$ gilt

$x \leq s_0 \leq y$.

Aus obiger Ungl folgen (1) und (2) direkt.

Wir wollen nun zeigen, dass (2) und (2') äquivalent sind.

"$\Rightarrow$": Sei $s_0 = \sup X$ und $\varepsilon > 0$. Dann gilt $s_0 - \varepsilon < s_0$

Insbesondere ist $s_0 - \varepsilon \notin Y$ also keine obere Schranke von X.

$\implies \exists x \in X: \quad s_0 - \varepsilon < x$.

"$\Leftarrow$": Sei $s_0 = \sup X$ und t_0, so dass (1) und (2') erfüllt werden.

Da t_0 obere Schranke von X ist, gilt $s_0 \leq t_0$.

Agn. $s_0 < t_0$. Sei dann $\varepsilon = t_0 - s_0 \iff s_0 = t_0 - \varepsilon$.

Aus (2') folgt $\exists x \in X: \quad t_0 - \varepsilon = s_0 < x$.

Doch dies widerspricht der Eigenschaft (1) für s_0:

$\forall x \in X: \quad x \leq s_0$.

Also folgt $t_0 = s_0$. $\square$

Proposition 2.63 (Supremum unter Streckung)**.** *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht-leere, von oben beschränkte Teilmenge und sei $c > 0$. Dann ist cA von oben beschränkt und es gilt*

$$\sup(cA) = c \sup(A).$$

Proposition 2.64 (Supremum unter Summen)**.** *Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ zwei nicht-leere, von oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Dann ist $A + B$ von oben beschränkt und es gilt*

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

Bew: Sei $s_A = \sup A$ und $s_B = \sup B$. Dann gilt

- $\forall a \in A\ \forall b \in B: \quad a \leq s_A \wedge b \leq s_B$

  $\implies a + b \leq s_A + s_b$.

  Aus $A + B := \{a + b \mid \forall a \in A \forall b \in B\}$ folgt $s_A + s_B$ ist obere Schranke.

- Sei $\varepsilon > 0$. $\exists a \in A\ \exists b \in B: \quad s_A - \frac{\varepsilon}{2} < a \wedge s_B - \frac{\varepsilon}{2} < b$

  $\implies s_A + s_B - \varepsilon < a + b$.

  Somit ist $s_A + s_B = \sup A + \sup B$ beste obere Schranke. $\square$

Satz 2.69 (Das Archimedische Prinzip)**.** *Es gelten folgende Aussagen:*

(i) Jede nicht-leere, von oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ hat ein Maximum.

(ii) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert genau ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x < n + 1$.

(iii) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Definition 2.49 (Offene und abgeschlossene Teilmengen)**.** Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ heisst **offen** (in $\mathbb{R}$), wenn für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit

$$\{y \in \mathbb{R} \mid |y - x| < \varepsilon\} = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U.$$

Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ heisst **abgeschlossen** (in $\mathbb{R}$), wenn ihr Komplement $\mathbb{R} \setminus A$ offen ist.

Definition 2.53 (Offene Bälle)**.** Der **offene Ball** mit Radius $r > 0$ um einen Punkt $z \in \mathbb{C}$ ist die Menge

$$B_r(z) = \{w \in \mathbb{C} \mid |z - w| < r\}.$$

Definition 2.55 (Offene und abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{C}$)**.** Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ heisst **offen** (in $\mathbb{C}$), wenn zu jedem Punkt in U ein offener Ball um diesen Punkt existiert, der in U enthalten ist. Formaler: Für alle $z \in U$ existiert ein Radius $r > 0$, so dass $B_r(z) \subseteq U$. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ heisst **abgeschlossen** (in $\mathbb{C}$), falls ihr Komplement $\mathbb{C} \setminus A$ offen ist.

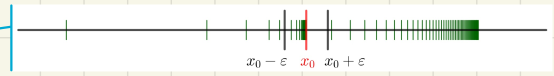
Definition 2.74 (Häufungspunkte von Mengen)**.** Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir sagen, dass x_0 ein **Häufungspunkt der Menge** A ist, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $a \in A$ gibt mit $0 < |a - x_0| < \varepsilon$.

Satz 2.76 (Existenz von Häufungspunkten)**.** *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine beschränkte unendliche Teilmenge. Dann existiert ein Häufungspunkt von A in $\mathbb{R}$.*

<u>Bew:</u> Wähle $m, M \in \mathbb{R}$ so, dass $A \subseteq [m, M]$.

Def. $X := \{x \in A \mid |A \cap (-\infty, x]| < \infty\}$.

Idee



Es gilt:
- $m \in X$, da $|(-\infty, m] \cap A| \leq 1$.
- $\forall x \in X: x < M$. Denn sei $x \geq M$, dann gilt $(-\infty, x) \cap A = A$ und $|A| = \infty$. $\Rightarrow x \notin X$.

$\Rightarrow$ X nichtleer und von oben beschränkt

$\Rightarrow$ sup existiert.

Sei $x_0 = \sup X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig.

Dann gilt $|(-\infty, x_0 + \varepsilon) \cap A| = \infty$, doch $|(-\infty, x_0 - \varepsilon) \cap A| < \infty$,

da ein $x \in X$ existiert mit $x_0 - \varepsilon < x$.

$\Rightarrow$ $|(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A| = \infty$

$\Rightarrow$ $\exists a \in A: \; 0 < |x_0 - a| < \varepsilon$. $\square$

Übung 2.77 (Alternative Charakterisierung von Häufungspunkten)**.** *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass x_0 genau dann ein Häufungspunkt der Menge A ist, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ der Durchschnitt von A mit der ε-Umgebung $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ unendlich viele Punkte enthält.*

Der Durchschnitt von ineinander geschachtelten, nicht-leeren Intervallen, das heisst, Intervallen $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots$ in $\mathbb{R}$, die kleiner werden, kann durchaus leer sein. Zum Beispiel gilt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [n, \infty) = \emptyset,$$
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$$

Satz 2.78 (Intervallschachtelungsprinzip)**.** *Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein nicht-leeres, abgeschlossenes, beschränktes Intervall $I_n = [a_n, b_n]$ gegeben, so dass für alle natürlichen Zahlen $m \leq n$ die Inklusion $I_m \supseteq I_n$ oder äquivalenterweise die Ungleichungen $a_m \leq a_n \leq b_n \leq b_m$ gelten. Dann ist der Durchschnitt*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \left[\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}, \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}\right]$$

nicht-leer.

<u>Bew:</u> Seien $\ell \leq m \leq n$ in $\mathbb{N}$.

Dann gilt $a_\ell \leq a_m \leq a_n \leq b_n \leq b_m \leq b_\ell$.

$\Rightarrow$ b_n ist obere Schranke von $\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$

$\Rightarrow$ $a := \sup\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\} \leq b_n$.

Analog folgt $a_n \leq \inf\{b_k \mid k \in \mathbb{N}\} =: b$.

$\Rightarrow$ Schnitt nichtleer, da

$$a, b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Zudem gilt $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$

$\Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_n \leq x \leq b_n$

$\Leftrightarrow$ $a \leq x \leq b$

$\Rightarrow$ $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a, b]$. $\square$

Korollar 2.82 (Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$)**.** *Die Teilmenge $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ (und daher auch $\mathbb{R}$) ist überabzählbar.*

3. Funktionen und reelle Zahlen

Des Weiteren gilt die Formel für die **Teleskopsumme**

$$\sum_{k=m}^{n}(a_{k+1}-a_k) = (\cancel{a_{m+1}} - a_m) + (a_{m+2} - \cancel{a_{m+1}}) + \ldots + (\cancel{a_n} - a_{n-1}) + (a_{n+1} - \cancel{a_n})$$
$$= a_{n+1} - a_m$$

Übung 3.3 (Abel-Summation)**.** *Seien $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$. Wir setzen $A_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$ für $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$. Zeigen Sie die Abel-Summationsformel*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

Verwenden Sie dazu die Gleichung $a_k = A_k - A_{k-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Wenden Sie des Weiteren die Abel-Summation auf die Summe $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$ an.

Lemma 3.5 (Bernoulli'sche Ungleichung)**.** *Für alle reellen Zahlen $a \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(1+a)^n \geq 1 + na$.* !

<u>Bew:</u> $n=1$: $(1+a)^1 \geq 1 + 1 \cdot a$. ✓

$n \mapsto n+1$:
$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1} &= (1+a)^n(1+a) \\ &\overset{\text{IV.}}{\geq} (1+na)(1+a) \\ &= 1 + (n+1)a + \overbrace{na^2}^{\geq 0} \\ &\geq 1 + (n+1)a. \quad \square\end{aligned}$$

Proposition 3.8 (Geometrische Summenformel)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $q \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{falls } q = 1 \\ \frac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{falls } q \neq 1 \end{cases}.$$

!

Proposition 3.15 (Wachstum von Polynomfunktionen und Eindeutigkeit der Koeffizienten)**.** *Sei $f(T) \in \mathbb{C}[T]$ ein nicht-konstantes Polynom. Dann gibt es zu jeder positiven reellen Zahl $M > 0$ eine reelle Zahl $R \geq 1$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$ auch $|f(z)| \geq M$ gilt. Insbesondere ist die Zuordnung, die jedem Polynom $f(T) \in \mathbb{C}[T]$ die zugehörige Polynomfunktion $z \in \mathbb{C} \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$ zuweist, bijektiv. Dies gilt analog ebenso für reelle Polynome $f(T) \in \mathbb{R}[T]$ und reelle Polynomfunktionen $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$.*

<u>Bew:</u> Sei $f(x) := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ mit $n = \deg(f) > 0$ und $a_n \neq 0$.

Sei $q(x) := a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$.

Wir schätzen $q(x)$ für $|x| \geq 1$ von oben ab:

$$\begin{aligned}|q(x)| &= |a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0| \\ &\leq |a_{n-1}x^{n-1}| + \ldots + |a_0| \\ &\leq \underbrace{(|a_{n-1}| + \ldots + |a_0|)}_{:= A}|x|^{n-1} = A|x|^{n-1}.\end{aligned}$$

Nun betrachten wir für $|x| \geq 1$

$$\begin{aligned}|f(x)| = |a_n x^n + q(x)| = |a_n x^n - (-q(x))| &\overset{\text{umgekehrte Dugl.}}{\geq} ||a_n x^n| - |-q(x)|| \\ &\geq |a_n x^n| - |q(x)| \geq |a_n x^n| - A|x^{n-1}| \\ &= (|a_n x| - A)|x|^{n-1} \geq \underline{|a_n||x| - A \overset{\text{soll}}{\geq} M}\end{aligned}$$

Sei nun $M > 0$ und $R = \max(1, \frac{M+A}{|a_n|})$. Dann gilt

$$|x| \geq R$$
$$\Longrightarrow \quad |a_n||x| - A \geq M$$
$$\Longrightarrow \quad |f(x)| \geq M. \quad \square$$

Wichtige Übung 3.17 (Division mit Rest)**.** *Zeigen Sie folgende Version von Division mit Rest: Falls d ein Polynom verschieden von Null ist, dann gibt es für jedes Polynom f zwei eindeutig bestimmte Polynome q, r mit $\deg(r) < \deg(d)$ und $f = q \cdot d + r$.*

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$ definieren wir den **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{k}$, als „n über k" ausgesprochen, durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

!

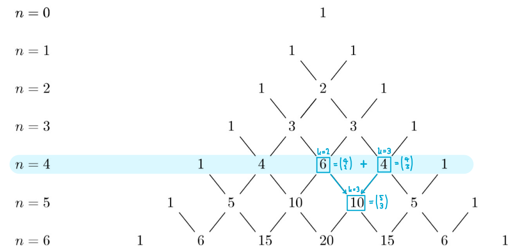
Proposition 3.26 (Additionseigenschaft der Binomialkoeffizienten)**.** *Für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n-1$ gilt $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}. \tag{3.3}$$

Insbesondere ist $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$. !

<u>Bew:</u>
$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k!)} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{(n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}. \quad \square\end{aligned}$$

Merkhilfe



Figur 3.2: Die Binomialkoeffizienten lassen sich auch bildlich im sogenannten **Pascal Dreieck** festhalten, wobei in der n-ten Zeile die Zahlen $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$ stehen und die diagonalen Striche die Additionsformel (3.3) in Proposition 3.26 andeuten.

Satz 3.28 (Binomischer Lehrsatz). *Für $w, z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$(w+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^{n-k} z^k.$$

Proposition 3.54 (Stetigkeit unter Addition und Multiplikation von Funktionen). *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Falls $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$ Funktionen sind, die bei einem Punkt $x_0 \in D$ stetig sind, dann sind auch $f_1 + f_2$, $f_1 \cdot f_2$ und $a f_1$ für $a \in \mathbb{R}$ stetig bei x_0. Insbesondere bildet die Menge der stetigen Funktionen*

$$C(D) = \{f \in \mathcal{F}(D) \mid f \text{ ist stetig}\}$$

einen Unterraum des Vektorraums $\mathcal{F}(D)$.

Bew: Agn. $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(D)$ sind bei x_0 stetig und $\varepsilon > 0$, dann existieren δ_1, δ_2 mit $|x - x_0| < \delta_i \implies |f_i(x) - f_i(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x \in D$ und $i \in \{1,2\}$. Wir setzen $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

Dann gilt $|x - x_0| < \delta$

$$\begin{aligned}
\implies \quad & |(f_1 + f_2)(x) - (f_1 + f_2)(x_0)| \\
&= |f_1(x) - f_1(x_0) + f_2(x) - f_2(x_0)| \\
&\leq |f_1(x) - f_1(x_0)| + |f_2(x) - f_2(x_0)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

$\implies f_1 + f_2$ ist bei x_0 stetig.

Wir betrachten nun

$$\begin{aligned}
|f_1(x) f_2(x) - f_1(x_0) f_2(x_0)| &= |f_1(x) f_2(x) - f_1(x_0) f_2(x) \\
&\quad + f_1(x_0) f_2(x) - f_1(x_0) f_2(x_0)| \\
&\leq |f_2(x)| |f_1(x) - f_1(x_0)| + |f_1(x_0)| |f_2(x) - f_2(x_0)|.
\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ bel. und $\delta_1, \delta_2 > 0$, so dass

$$|x - x_0| < \delta_1 \implies |f_1(x) - f_1(x_0)| < \frac{\varepsilon}{|f_2(x_0)| + 1}$$

nur um Div. durch 0 zu vermeiden

$$|x - x_0| < \delta_2 \implies |f_2(x) - f_2(x_0)| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{|f_1(x_0)| + 1}\right).$$

Setze $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, dann folgt aus $|x - x_0| < \delta$, dass

$$\begin{aligned}
|f_2(x)| &= |f_2(x) - f_2(x_0) + f_2(x_0)| \\
&\leq \underbrace{|f_2(x) - f_2(x_0)|}_{< 1} + |f_2(x_0)| < 1 + |f_2(x_0)|.
\end{aligned}$$

Damit gilt $$|f_2(x)| |f_1(x) - f_1(x_0)| < (1 + |f_2(x_0)|) \frac{\varepsilon}{|f_2(x_0)| + 1} = \varepsilon$$

und $$|f_1(x_0)| |f_2(x) - f_2(x_0)| < (|f_1(x_0)| + 1) \frac{\varepsilon}{|f_1(x_0)| + 1} = \varepsilon.$$

Insgesamt folgt $|f_1(x) f_2(x) - f_1(x_0) f_2(x_0)| < 2\varepsilon = \varepsilon'$.

$\implies f_1 f_2$ ist stetig bei x_0. $\square$

Proposition 3.56 (Stetigkeit unter Verknüpfung). *Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$ zwei Teilmengen und sei $x_0 \in D_1$. Angenommen $f : D_1 \to D_2$ ist eine bei x_0 stetige Funktion und $g : D_2 \to \mathbb{R}$ ist eine bei $f(x_0)$ stetige Funktion. Dann ist $g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$ bei x_0 stetig. Insbesondere ist die Verknüpfung von stetigen Funktionen wieder stetig.*

Bew: Sei $\varepsilon > 0$. Da g stetig ist, existiert ein $\eta > 0$, so dass für alle $y \in D_2$ gilt $|y - f(x_0)| < \eta \implies |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon$.

Da f stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D_1$ gilt

$$|x - x_0| < \delta \implies |\underbrace{f(x)}_{\in D_2} - f(x_0)| < \eta.$$

Daraus folgt für alle $x \in D_1$:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \eta \implies |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon.$$ $\square$

Vollständigkeit $\longrightarrow$ Sup

Satz 3.63 (Zwischenwertsatz). *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in I$. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ zwischen a und b, so dass $f(x) = c$ gilt.*

Bew: Sei OBdA $a < b$ und $f(a) \leq f(b)$. Sei $c \in (f(a), f(b))$.

Wir def $X = \{x \in [a,b] \mid f(x) \leq c\}$.

Es gilt:
- $a \in X$, da $f(a) \leq c$
- $\forall x \in X: x \leq b$, da $X \subseteq [a,b]$.

$\implies$ Es existiert $x_0 = \sup X$.

Es gilt $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in [a,b]: \; |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$ (1)

- Agn. $f(x_0) < c$. Sei $\varepsilon = c - f(x_0)$, δ wie in (1) und $x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap [a,b]$.
  Dann gilt wegen $x_0 = \sup X$: $\forall x' \in X: \; x' \leq x_0$.
  Doch zudem gilt wegen (1): $f(x) - f(x_0) < c - f(x_0) \iff f(x) < c$
  $\implies x \in X$ und $x > x_0$. $\lightning$
- Agn. $f(x_0) > c$. Sei $\varepsilon = f(x_0) - c$, δ wie in (1) und $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap [a,b]$
  Dann gilt: $f(x_0) - f(x) < f(x_0) - c$
  $\iff f(x) > c \implies x \notin X$.
  Doch aus $x_0 = \sup X$ folgt auch: $\exists x \in X: \; x_0 - \delta < x$. $\lightning$

$\implies f(x_0) = c$. $\square$

Definition 3.43 (Monotonieeigenschaften). Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist

- **monoton wachsend**, falls $\forall x, y \in D : x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$,
- **streng monoton wachsend**, falls $\forall x, y \in D : x < y \implies f(x) < f(y)$,
- **monoton fallend**, falls $\forall x, y \in D : x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$,
- **streng monoton fallend**, falls $\forall x, y \in D : x < y \implies f(x) > f(y)$,
- **monoton**, falls f monoton wachsend oder monoton fallend ist,
- **streng monoton**, falls f streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

Definition 3.49 (Stetigkeit). Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass f **stetig bei einem Punkt** $x_0 \in D$ ist, falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ die Implikation

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt. Die Funktion f ist **stetig**, falls sie bei jedem Punkt in D stetig ist. Formal ist Stetigkeit von f also durch

$$\forall x_0 \in D : \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

definiert.

Satz 3.69 (Umkehrsatz). *Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion. Dann ist $f(I) \subseteq \mathbb{R}$ wieder ein Intervall und die Abbildung $f : I \to f(I)$ hat eine stetige, streng monotone inverse Abbildung $f^{-1} : f(I) \to I$. Falls $I = [a, b]$ für reelle Zahlen $a < b$, dann gilt des Weiteren, dass $f(I)$ die Endpunkte $f(a)$ und $f(b)$ hat.*

!

Vollständigkeit $\longrightarrow$ Sup $\longrightarrow$ Zw.satz

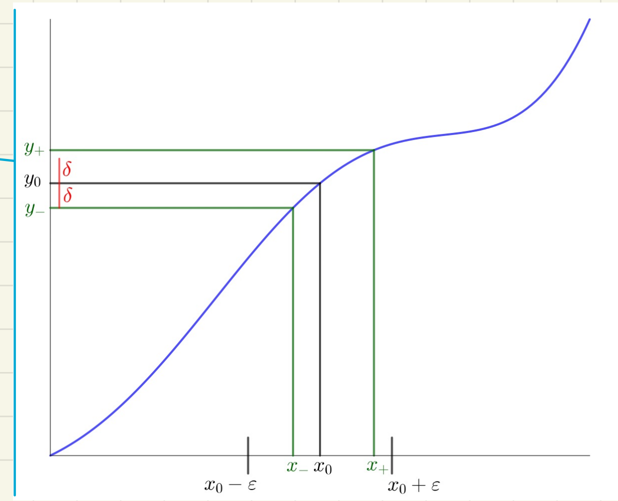
Bew: $f : I \longrightarrow f(I)$ ist per Annahme bijektiv.

Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass $f(I)$ ein Intervall ist.

Stetigkeit von f^{-1}:

Sei $y_0 \in f(I)$, $\varepsilon > 0$, $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Seien $x_+ = \min(x_0 + \varepsilon, b)$ und $y_+ = f(x_+)$.

Idee



Dann gilt für alle $y \in [y_0, y_+)$: $x_0 = f^{-1}(y_0) \leq f^{-1}(y) < f^{-1}(y_+) = x_+ \leq x_0 + \varepsilon$.

Zudem folgt aus $x_- = \max(x_0 - \varepsilon, a)$ und $y_- = f(x_-)$

für alle $y \in (y_-, y_0]$: $x_0 - \varepsilon \leq x_- = f^{-1}(y_-) < f^{-1}(y) \leq f^{-1}(y_0)$.

Falls $f(a) < y_0 < f(b)$, so def. wir $\delta = \min(y_+ - y_0, y_0 - y_-)$.

Dann gilt für alle $y \in f(I)$:

$$
\begin{aligned}
& y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta) && \Longrightarrow x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < \underset{f^{-1}(y_0)}{x_0} + \varepsilon \\
\Longleftrightarrow \; & y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta) && \Longrightarrow f^{-1}(y) \in (f^{-1}(y_0) - \varepsilon, f^{-1}(y_0) + \varepsilon) \\
\Longleftrightarrow \; & |y - y_0| < \delta && \Longrightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Falls $y_0 = f(a)$ wähle $\delta = y_+ - y_0$ (da hier $y_- = y_0$ ist).

Falls $y_0 = f(b)$ wähle $\delta = y_0 - y_-$ $\square$

Vollständigkeit $\longrightarrow$ Sup

Satz 3.74 (Beschränktheit). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ zwei reelle Zahlen mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann ist f beschränkt. Das heisst, es existiert ein $M \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in [a, b]$.*

!

Bew: Sei $X = \{t \in [a,b] \mid f|_{[a,t]} \text{ ist beschränkt}\}$.

Da $a \in X$ und $X \subseteq [a,b]$, existiert $s_0 = \sup X$. Da $s_0 \in [a,b]$, ist b eine obere Schranke.

Stetigkeit von f bei s_0 verwenden: Sei $\varepsilon > 0$, dann existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\forall x \in [a,b]: \quad |x - s_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(s_0)| < 1$$

Umgekehrte Δ-Ungl.: $\big||f(x)| - |f(s_0)|\big| \leq |f(x) - f(s_0)|$

$\Big\}$ $|f(x)| < |f(s_0)| + 1$.

Seien $t_0 = \max(a, s_0 - \delta)$ und $t_1 = \min(b, s_0 + \delta)$. ($t_0, t_1$ δ-nahe zu s_0)

Da $s_0 = \sup X$ ist, existiert ein $t \in X$ mit $t > s_0 - \delta$ Also ist $f|_{[a,t]}$ beschr.:

$$\exists M_0 > 0 \; \forall x \in [a,t]: \; |f(x)| \leq M_0.$$

Aus $t \geq t_0$ folgt $[a,t] \cup (t_0, t_1) = [a, t_1)$

und somit $[a,t] \cup (t_0, t_1) \cup \{t_1\} = [a, t_1]$.

Damit folgt insgesamt $|f(x)| \leq \max\{M_0, |f(s_0)| + 1, |f(t_1)|\}$ für alle $x \in [a, t_1]$.

Damit ist $f|_{[a,t_1]}$ beschr. und $t_1 \in X$. Also folgt $t_1 \leq s_0$.

Aber da $t_1 = \min(b, s_0 + \delta)$ war, folgt $t_1 = b$ Also ist $f|_{[a,b]}$ beschr. $\square$

Existenz Sup

Stetigkeit von Verknüpfungen

Korollar 3.76 (Annahme des Maximums und des Minimums). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ zwei reelle Zahlen mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f sowohl das Maximum als auch das Minimum an.*

!

Definition 3.78 (Gleichmässige Stetigkeit). Eine reellwertige Funktion f auf einer nicht-leeren Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ heisst **gleichmässig stetig**, falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in D$ gilt

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

!

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Wir nennen eine reellwertige Funktion f auf D ***Lipschitz-stetig****, falls ein $L \geq 0$ existiert mit $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in D$.*

Satz 3.82 (Heine, gleichmässige Stetigkeit). *Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall für $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann ist f gleichmässig stetig.*

Bew: Sei $\varepsilon > 0$. Wir def

$$X = \{t \in [a,b] \mid \exists \delta > 0 \; \forall x_1, x_2 \in [a,t]: |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\}$$

Es gilt $a \in X$ und $X \subseteq [a,b]$. Sei also $s_0 = \sup X$. Dann $\exists \delta_1 > 0$, so dass

$$\forall x \in [a,b]: \; |x - s_0| < \delta_1 \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(s_0)| < \varepsilon.$$

Für $x_1, x_2 \in (s_0 - \delta_1, s_0 + \delta_1) \cap [a,b]$ gilt damit

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(s_0)| + |f(s_0) - f(x_2)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \qquad (1)$$

Seien $t_0 = \max(a, s_0 - \frac{1}{2}\delta_1)$ und $t_1 = \min(b, s_0 + \frac{1}{2}\delta_1)$.

Da $s_0 = \sup X$ ist, gilt $t_0 \in X$ und damit $\exists \delta_0 > 0$

$$\forall x_1, x_2 \in [a, t_0]: \; |x_1 - x_2| < \delta_0 \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Sei $\delta = \min(\delta_0, \frac{1}{2}\delta_1)$ und seien $x_1, x_2 \in [a, t_1]$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$.

Bew: Agn. f ist stetig aber nicht glm. stetig, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x, y \in [a,b]: \; |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon. \qquad (1)$$

Sei ε wie oben und $\delta_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Seien $\underbrace{(x_n)_n}_{\text{beschränkt}}, (y_n)_n$ Folgen in $[a,b]$ (die wegen (1) existieren müssen)

mit $|x_n - y_n| < \delta_n \implies |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. (2)

Da $(x_n)_n$ beschränkt ist, existiert eine konv. Teilfolge $(x_{n_k})_k$ mit Grenzwert $x \in [a,b]$.

Wegen $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$ konv. $(y_{n_k})_k$ ebenfalls gegen x Da f stetig ist, konv.

damit $(f(x_{n_k}))_k$, $(f(y_{n_k}))_k$ beide gegen $f(x)$. Also existiert ein K, so dass für alle $k \geq K$ gilt

$$|f(x) - f(x_{n_k})| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |f(x) - f(y_{n_k})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Doch daraus folgt für alle $k \geq K$:

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq \underbrace{|f(x_{n_k}) - f(x)|}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{|f(x) - f(y_{n_k})|}_{< \varepsilon/2} < \varepsilon.$$

- Agn. OBdA $|x_1 - s_0| \leq \frac{1}{2}\delta_1$. Dann gilt

$$|x_2 - s_0| \leq |x_2 - x_1| + |x_1 - s_0| < \delta + \tfrac{1}{2}\delta_1 \leq \tfrac{1}{2}\delta_1 + \tfrac{1}{2}\delta_1 = \delta_1.$$

Damit folgt aus (1) $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

- Agn. $|x_1 - s_0|, |x_2 - s_0| > \frac{1}{2}\delta_1$. Aus $x_1, x_2 \in [a, t_1]$ folgt $x_1, x_2 \leq t_1 \leq s_0 + \frac{1}{2}\delta_1$ und somit auch $x_1, x_2 \leq s_0 - \frac{1}{2}\delta_1 \leq t_0$. Also gilt sogar $x_1, x_0 \in [a, t_0]$ und mit $|x_1 - x_2| < \delta \leq \delta_0$ folgt aus (2) ebenfalls

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Damit gilt $\forall x_1, x_2 \in [a, t_1]: |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Also gilt $t_1 \in X$. Doch aus $s_0 = \sup X$ folgt $t_1 \leq s_0$ und mit $t_1 = \min(b, s_0 + \frac{1}{2}\delta_1)$ folgt $t_1 = b$. Damit ist f glm. stetig. $\square$

Doch dies ist ein Widerspruch zu (2). Damit ist f glm. stetig. $\square$

4. Das Riemann-Integral

Lemma 4.7 (Linearität des Integrals von Treppenfunktionen)**.** *Die nicht-leere Menge*

$$\mathcal{TF}([a,b]) = \{f \in \mathcal{F}([a,b]) \mid f \textit{ ist eine Treppenfunktion}\}$$

der Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a,b]$ ist ein Unterraum des Vektorraums $\mathcal{F}([a,b])$ der reellwertigen Funktionen auf $[a,b]$. Des Weiteren ist die Abbildung $\int : \mathcal{TF}([a,b]) \to \mathbb{R}$ linear. Das heisst, für alle $f, g \in \mathcal{TF}([a,b])$ und $s \in \mathbb{R}$ ist $f+g \in \mathcal{TF}([a,b])$, $sf \in \mathcal{TF}([a,b])$ und es gilt

$$\int_a^b (f+g)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\,\mathrm{d}x + \int_a^b g\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_a^b (sf)\,\mathrm{d}x = s\int_a^b f\,\mathrm{d}x.$$

Bew: Seien Z_f, Z_g Zerlegungen und c_k, d_k entsprechende Konstanzwerte von f, g.
Betrachte die gemeinsame Verfeinerung $Z = Z_f \cup Z_g$.
Sei $k \in \mathbb{N}_{\leq n}$. Dann gilt $\forall x \in (x_{k-1}, x_k): f(x) = c_k \wedge g(x) = d_k$.
Daraus folgt $\forall x \in (x_{k-1}, x_k): f(x) + g(x) = c_k + d_k \wedge s \cdot f(x) = s \cdot c_k$.
Daraus folgt $f+g,\ s\cdot f \in \mathcal{TF}([a,b])$.
Zudem gilt

$$\int_a^b (f+g)\,dx = I(f+g, Z) = \sum_{k=1}^n (c_k + d_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^n c_k \Delta x_k + \sum_{k=1}^n d_k \Delta x_k = I(f, Z) + I(g, Z) = \int f\,dx + \int g\,dx.$$

Analog folgt $\int_a^b s\cdot f\,dx = s \cdot \int_a^b f\,dx$. $\square$

Lemma 4.8 (Monotonie des Integrals von Treppenfunktionen)**.** *Sind $f, g \in \mathcal{TF}([a,b])$ zwei Treppenfunktionen mit $f \leq g$. Dann gilt*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g\,\mathrm{d}x.$$

Insbesondere impliziert $f \in \mathcal{TF}([a,b])$ und $f \geq 0$, dass $\int_a^b f\,\mathrm{d}x \geq 0$.

!

Bew: Seien Z, c_k, d_k wie im obigen Beweis. Sei $k \in \mathbb{N}_{\leq n}$.
Aus $f \leq g$ folgt $\forall x \in (x_{k-1}, x_k): c_k \leq d_k$.
Daraus folgt

$$\int_a^b f\,dx = \sum_{k=1}^n c_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n d_k \Delta x_k = \int_a^b g\,dx.$$

$\square$

Definition 4.1 (Zerlegung)**.** Eine **Zerlegung** (oder **Unterteilung**) $\mathfrak{Z}$ von $[a,b]$ ist gegeben durch endlich viele Punkte

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

mit $n \in \mathbb{N}$. Die Punkte $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$ werden die Teilungspunkte der Zerlegung genannt. Wir schreiben $\mathfrak{Z} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$.

Formal gesehen ist eine Zerlegung also eine endliche Teilmenge unseres Intervalls $[a,b]$, die a und b enthält, gemeinsam mit einer Auflistung ihrer Elemente durch eine streng monotone Funktion $k \in \{0, \ldots, n\} \mapsto x_k$. (Die Aufzählung ist eindeutig durch die Teilmenge bestimmt, da wir die Forderung $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ stellen). Eine Zerlegung induziert auch eine spezielle Art von Partition, nämlich

$$\mathcal{P}(\mathfrak{Z}) = \{\{a\}, (x_0, x_1), \{x_1\}, \ldots, (x_{n-1}, x_n), \{b\}\},$$

die fortan implizit in den Diskussionen verwendet wird.

Definition 4.2 (Treppenfunktion)**.** Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist eine **Treppenfunktion** (abgekürzt $\mathcal{TF}$), falls es eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ gibt, so dass es für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ eine Zahl $c_k \in \mathbb{R}$ gibt mit

!

$$\forall x \in (x_{k-1}, x_k) : f(x) = c_k.$$

Eine Treppenfunktion soll also konstant sein auf den Intervallen in der Partition $\mathcal{P}(\mathfrak{Z})$. Die Intervalle (x_{k-1}, x_k) für $k \in \{1, \ldots, n\}$ heissen auch **Konstanzintervalle** der Treppenfunktion f und $\mathfrak{Z}$ heisst eine **Zerlegung in Konstanzintervalle** von f. Die Zahlen $c_1, \ldots, c_n$ nennen wir **Konstanzwerte** von f bezüglich $\mathfrak{Z}$.

Definition 4.4. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion und $\mathfrak{Z} = \{a = x_0 < \ldots < x_n = b\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ in Konstanzintervalle von f. Seien $c_1, \ldots, c_n$ die Konstanzwerte von f bezüglich $\mathfrak{Z}$. Dann definieren wir

$$I(f, \mathfrak{Z}) = \sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n c_k \Delta x_k,$$

wobei $\Delta x_k = (x_k - x_{k-1})$ für die Länge des k-ten Konstanzintervalls in der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ für $k = 1, \ldots, n$ steht.

Definition 4.6. Für eine Treppenfunktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definieren wir das **Integral der Treppenfunktion** f als

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\,\mathrm{d}x = I(f, \mathfrak{Z}),$$

wobei $\mathfrak{Z}$ eine Zerlegung in Konstanzintervalle von f ist.

f R-intbar $\overset{\text{per Def}}{\Longrightarrow}$ f beschränkt

Definition 4.10. Sei $f \in \mathcal{F}([a,b])$ beschränkt. Dann definieren wir die (nicht-leere) Menge der **Untersummen** durch

$$\mathcal{U}(f) = \left\{\int_a^b u\,\mathrm{d}x \mid u \in \mathcal{TF}([a,b]) \text{ und } u \leq f\right\}$$

und die (nicht-leere) Menge der **Obersummen** durch

$$\mathcal{O}(f) = \left\{\int_a^b o\,\mathrm{d}x \mid o \in \mathcal{TF}([a,b]) \text{ und } f \leq o\right\}.$$

Für $u, o \in \mathcal{TF}([a,b])$ mit $u \leq f \leq o$ gilt nach Lemma 4.8 auch

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b o\,\mathrm{d}x.$$

Proposition 4.12 (Charakterisierungen der Riemann-Integrierbarkeit)**.** *Sei $f \in \mathcal{F}([a,b])$ beschränkt. Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

(i) f ist Riemann-integrierbar.

(ii) Es existiert höchstens eine (oder auch genau eine) reelle Zahl I, die die Ungleichungen

$$\int_a^b u \, \mathrm{d}x \leq I \leq \int_a^b o \, \mathrm{d}x$$

für alle $u, o \in \mathcal{TF}([a,b])$ mit $u \leq f \leq o$ erfüllt.

(iii) Für alle $\varepsilon > 0$ existieren $u, o \in \mathcal{TF}([a,b])$ mit $u \leq f \leq o$, so dass $\int_a^b (o-u) \, \mathrm{d}x < \varepsilon$.

<u>Bew:</u> (i) $\Rightarrow$ (iii): Sei f R-intbar und $\inf \mathcal{O}(f) = \overline{I} = \underline{I} = \sup \mathcal{U}(f)$. Sei $\varepsilon > 0$.

Also existiert ein $\int o \, dx \in \mathcal{O}(f)$ mit $\int o \, dx < \overline{I} + \varepsilon$

und ein $\int u \, dx \in \mathcal{U}(f)$ mit $\int u \, dx > \underline{I} - \varepsilon$.

Daraus folgt $\int (o-u) \, dx = \overline{I} + \varepsilon - \underline{I} + \varepsilon = 2\varepsilon$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Seien $I_1, I_2 \in \mathbb{R}$ mit $\int u \, dx \leq I_1, I_2 \leq \int o \, dx$.

Dann folgt aus $I_1 \leq \int o \, dx$ und $\int u \, dx \leq I_2$

$$I_1 - I_2 \leq \int o \, dx - \int u \, dx < \varepsilon.$$

Analog folgt $I_2 - I_1 < \varepsilon$.

Daraus folgt $I_1 = I_2$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Allg. gilt $\int u \, dx \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq \int o \, dx$.

Aus 2 folgt $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$, womit f R-intbar ist. $\square$

Definition 4.11 (Riemann-Integrierbarkeit)**.** Für eine beschränkte Funktion $f \in \mathcal{F}([a,b])$ wird $\underline{I}(f) = \sup \mathcal{U}(f)$ das **untere Integral** von f und $\overline{I}(f) = \inf \mathcal{O}(f)$ das **obere Integral** von f genannt. Die Funktion f heisst **Riemann-integrierbar**, oder kurz **R-integrierbar**, falls $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$. In diesem Fall wird dieser gemeinsame Wert das **Riemann-Integral**

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}x = \underline{I}(f) = \overline{I}(f)$$

genannt. Des Weiteren definieren wir

$$\mathcal{R}([a,b]) = \big\{ f \in \mathcal{F}([a,b]) \mid f \text{ ist Riemann-integrierbar} \big\}.$$

Wir bezeichnen a als die **untere** und b als die **obere Integrationsgrenze** und die Funktion als den **Integrand** für das Integral $\int_a^b f \, \mathrm{d}x$.

Beispiel 4.17 (Eine nicht-Riemann-integrierbare Funktion)**.** *Wir betrachten wieder die sogenannte Dirichlet-Funktion, das heisst, die charakteristische Funktion*

$$f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} : [0,1] \to \{0,1\}, \ x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, ergeben sich für $u, o \in \mathcal{TF}([a,b])$ mit

$$u \leq f \leq o$$

für o Konst.werte $c_i \geq 1$ und für u $c_i \leq 0$.

Daraus folgt $\int_0^1 o \, dx \geq 1$ und $\int_0^1 u \, dx \leq 0$.

Somit ist f nicht R-intbar. Dies liegt vor allem auch daran, dass jede Zerlegung einer TF endlich sein muss.

Satz 4.19 (Linearität des Riemann-Integrals)**.** *Die Menge*

$$\mathcal{R}([a,b]) = \{ f \in \mathcal{F}([a,b]) \mid f \text{ ist Riemann-integrierbar} \}$$

der Riemann-integrierbaren Funktionen auf $[a,b]$ bildet einen Unterraum von $\mathcal{F}([a,b])$ und das Integral ist eine lineare Funktion auf $\mathcal{R}([a,b])$. Das heisst, für $f_1, f_2, f \in \mathcal{R}([a,b])$ und $s \in \mathbb{R}$ ist $f_1 + f_2, sf \in \mathcal{R}([a,b])$ und

$$\int_a^b (f_1 + f_2)(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x) \, \mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x) \, \mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b (sf)(x) \, \mathrm{d}x = s \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

<u>Bew:</u> Aus $s\,\mathcal{U}(f) \subseteq \mathcal{U}(sf)$ und $s\,\mathcal{O}(f) \subseteq \mathcal{O}(sf)$ folgt

$s\,\underline{I}(f) = s \cdot \sup \mathcal{U}(f) = \sup(s\,\mathcal{U}(f)) \leq \sup(\mathcal{U}(sf)) \ldots$

$\ldots \leq \underline{I}(sf) \leq \overline{I}(sf) \ldots$

$\ldots \leq \inf(\mathcal{O}(sf)) \leq \inf(s \cdot \mathcal{O}(f)) = s \cdot \inf(\mathcal{O}(f)) = s \cdot \overline{I}(f)$.

Da f R-intbar ist gilt $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$ und in obiger Ungl gilt überall Gleichheit. Daraus folgt

$$\underline{I}(sf) = \overline{I}(sf) = \int sf \, dx = s \int f \, dx.$$

$\Longrightarrow sf \in \mathcal{R}([a,b])$.

Seien $f_1, f_2 \in \mathcal{R}([a,b])$, $u_1, u_2, o_1, o_2 \in \mathcal{TF}([a,b])$ mit

$$u_1 + u_2 \leq f_1 + f_2 \leq o_1 + o_2$$

dann gilt $\mathcal{U}(f_1) + \mathcal{U}(f_2) \subseteq \mathcal{U}(f_1 + f_2)$

und $\mathcal{O}(f_1) + \mathcal{O}(f_2) \subseteq \mathcal{O}(f_1 + f_2)$.

Mit $\sup(\mathcal{U}(f_1) + \mathcal{U}(f_2)) = \sup \mathcal{U}(f_1) + \sup \mathcal{U}(f_2)$

folgt $\underline{I}(f_1 + f_2) = \overline{I}(f_1 + f_2)$.

$\Longrightarrow f_1 + f_2 \in \mathcal{R}([a,b])$. $\square$

Satz 4.24 (Monotonie des Riemann-Integrals)**.** *Für zwei Funktionen $f_1, f_2 \in \mathcal{R}([a,b])$ gelten folgende Monotonie-Eigenschaften des Riemann-Integrals:*

(i) Falls $f_1 \geq 0$ ist, so gilt $\int_a^b f_1(x) \, \mathrm{d}x \geq 0$.

(ii) Falls $f_1 \leq f_2$ ist, so gilt $\int_a^b f_1(x) \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b f_2(x) \, \mathrm{d}x$.

*(iii) Die Funktion $|f_1|$ ist Riemann-integrierbar auf $[a,b]$ und es gilt die **Dreiecksungleichung***

$$\left| \int_a^b f_1(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f_1(x)| \, \mathrm{d}x.$$

<u>Bew:</u> (iii): Zeige, dass f^+ R-intbar ist.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren TF u, o mit $u \leq f \leq o$ und $\int (o-u) \, dx < \varepsilon$. Doch dann gilt auch

$$u^+ \leq f^+ \leq o^+ \text{ und } o^+ - u^+ \leq o - u.$$

← folgt aus Fallunterscheidung

Aus (ii) folgt damit

$$\int (o^+ - u^+) \, dx \leq \int (o-u) \, dx < \varepsilon.$$

Damit ist f^+ R-intbar. Damit sind aber auch $f^- = f^+ - f$ und $|f| = f^+ + f^-$ R-intbar.

Daraus folgt

$$\left| \int f \, dx \right| = \left| \int f^+ dx - \int f^- dx \right| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \underbrace{\left| \int f^+ dx \right|}_{\geq 0} + \underbrace{\left| \int f^- dx \right|}_{\geq 0}$$

$$= \int f^+ dx + \int f^- dx$$

$$= \int (f^+ + f^-) \, dx$$

$$= \int |f| \, dx. \qquad \square$$

Satz 4.26 (Additionseigenschaft bezüglich Intervallen). *Unter Verwendung obiger Notation gilt, dass $f \in \mathcal{F}([a,c])$ genau dann Riemann-integrierbar ist, wenn f_1 und f_2 Riemann-integrierbar sind. In diesem Fall ist*

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bew-Skizze:

Zuerst für TF beweisen ($\to$ direkte "Rechnung").

Daraus folgert man für $f_1 = f|_{[a,b]}$ und $f_2 = f|_{[b,c]}$, dass

$$U(f) = U(f_1) + U(f_2).$$

Additionseigenschaft von sup

$$\Longrightarrow \begin{cases} \underline{I}(f) = \underline{I}(f_1) + \underline{I}(f_2) \\ \overline{I}(f) = \overline{I}(f_1) + \overline{I}(f_2). \end{cases}$$

Nun bew. man die g.d.w. Aussage:

"$\Rightarrow$": Agn. f ist R-intbar. Dann folgt aus $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$ mit

$$\underline{I}(f) = \underline{I}(f_1) + \underline{I}(f_2) \leq \overline{I}(f_1) + \overline{I}(f_2) = \overline{I}(f)$$

dass f_1, f_2 R-intbar sind.

"$\Leftarrow$": Agn. f_1, f_2 sind R-intbar. Dann folgt aus obigem mittels $\underline{I}(f_1) + \underline{I}(f_2) = \overline{I}(f_1) + \overline{I}(f_2)$ direkt

$$\underline{I}(f) = \overline{I}(f).$$

Definition 4.29. Seien $a \leq b$ in $\mathbb{R}$ und sei $\mathcal{I} : (\alpha, \beta) \in [a,b]^2 \mapsto \mathcal{I}(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir nennen $\mathcal{I}$ eine **additive Intervallfunktion** auf $[a,b]$, falls

(i) Für alle $\alpha \in [a,b]$ gilt $\mathcal{I}(\alpha,\alpha) = 0$.

(ii) Für alle $\alpha, \beta \in [a,b]$ gilt $\mathcal{I}(\alpha,\beta) = -\mathcal{I}(\beta,\alpha)$.

(iii) Für alle $\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$ mit $\mathcal{I}(\alpha,\beta) + \mathcal{I}(\beta,\gamma) = \mathcal{I}(\alpha,\gamma)$.

Proposition 4.30. *Seien $a < b$ in $\mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion und $\mathcal{I}$ eine additive Intervallfunktion auf $[a,b]$. Angenommen es gilt*

$$(\beta - \alpha) \inf_{x \in [\alpha,\beta]} f(x) \leq \mathcal{I}(\alpha,\beta) \leq (\beta - \alpha) \sup_{x \in [\alpha,\beta]} f(x) \tag{4.12}$$

für alle $\alpha < \beta$ in $[a,b]$. Dann ist

$$\mathcal{I}(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$$

für alle $\alpha, \beta \in [a,b]$.

Arch. Prinzip
Sandwich für TF
Teleskopsumme

Satz 4.31 (Integrierbarkeit monotoner Funktionen). *Jede monotone Funktion in $\mathcal{F}([a,b])$ ist Riemann-integrierbar.* !

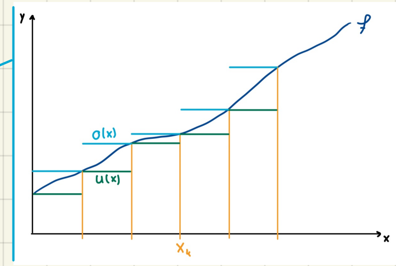
Bew: Sei $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ für $k \in \{0, \dots, n\}$.

Sei f OBdA monoton wachsend.

Seien $u(x) = \begin{cases} f(a) & \text{falls } x = a \\ f(x_{k-1}) & \text{falls } x \in (x_{k-1}, x_k] \text{ und } k \in \{1,\dots,n\}. \end{cases}$

und $o(x) = \begin{cases} f(b) & \text{falls } x = b \\ f(x_k) & \text{falls } x \in [x_{k-1}, x_k) \text{ und } k \in \{1,\dots,n\}. \end{cases}$

Idee



Da f monoton ist gilt damit $u \leq f \leq o$.

Daraus folgt

$$\int_a^b (o-u)\,dx = \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1}))\overbrace{(x_k - x_{k-1})}^{\frac{b-a}{n}}$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \varepsilon.$$

mit Arch. Prinzip geeignetes n wählen

$\Longrightarrow$ f R-intbar. $\square$

Satz 4.37 (Riemann-Integrierbarkeit von Polynomen). *Die Einschränkung einer reellen Polynomfunktion auf $[a,b]$ ist Riemann-integrierbar. Für alle Monome x^d mit $d \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\int_a^b x^d\,\mathrm{d}x = \frac{1}{d+1}\left(b^{d+1} - a^{d+1}\right).$$

Vollständigkeit
↓
sup
↓
Beschränktheit stetiger Fnk. auf komp. Intervall
stetig $\Rightarrow$ glm. stetig auf $[a,b]$
Sandwich für TF

Satz 4.42 (Stetige Funktionen und das Riemann-Integral). *Eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall $[a,b]$ mit $a < b$ ist Riemann-integrierbar.* !

Bew: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle x_1, x_2 (da f sogar glm. stetig ist)

$$|x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Sei Z eine Zerlegung von $[a,b]$, so dass

$$\Delta x_k = \frac{b-a}{n} < \delta \quad \text{(n hinreichend gross wählen)}$$

Seien nun $m_k = \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$, $M_k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$

für $k \in \{1,\dots,n\}$. Diese existieren, da stetige Funktionen auf kompakten Intervallen beschränkt sind.

Damit def wir nun $u(x) = \begin{cases} m_k & \text{für } x \in [x_{k-1}, x_k) \text{ und } k \in \{1,\dots,n\} \\ m_n & \text{für } x = b. \end{cases}$

und $o(x) = \begin{cases} M_k & \text{für } x \in [x_{k-1}, x_k) \text{ und } k \in \{1,\dots,n\} \\ M_n & \text{für } x = b. \end{cases}$

Damit gilt $u \leq f \leq o$ und $M_k - m_k \overset{\text{Stetigkeit anwenden}}{<} \varepsilon$.

Daraus folgt

$$\int_a^b (o-u)\,dx = \sum_{k=1}^n \overbrace{(M_k - m_k)}^{<\varepsilon}\Delta x_k < \varepsilon \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \varepsilon(b-a) =: \varepsilon'.$$

$\Longrightarrow$ f R-intbar. $\square$

stetig $\overset{\text{auf } [a,b]}{\Longrightarrow}$ R-intbar — geometrische Überlegungen!

Sandwich für TF — Sandwich für TF — stetige Fkt. "zusammenkleben

Proposition 4.44 (Sandwich-Kriterium mit stetigen Funktionen). *Eine Funktion $f \in \mathcal{F}([a,b])$ auf einem kompakten Intervall $[a,b]$ mit $a < b$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn für alle $\varepsilon > 0$ stetige Funktionen f_+, f_- existieren mit $f- \leq f \leq f_+$ und*

$$\int_a^b (f_+ - f_-)\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

!

Bew: "$\Leftarrow$": Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $f^- \leq f \leq f^+$ mit $\int (f^+ - f^-)dx < \varepsilon$.

f^+, f^- sind stetig auf $[a,b]$ und damit R-intbar.

Also existieren TF u, o mit $u \leq f^- \leq f \leq f^+ \leq o$, so dass

$$\int (o - f^+)dx < \varepsilon \quad \text{und} \quad \int (f^- - u)dx < \varepsilon.$$

Daraus folgt $\int (o-u)dx = \underbrace{\int (o - f^+)dx}_{<\varepsilon} + \underbrace{\int (f^+ - f^-)dx}_{<\varepsilon} + \underbrace{\int (f^- - u)dx}_{<\varepsilon} < 3\varepsilon =: \varepsilon'$

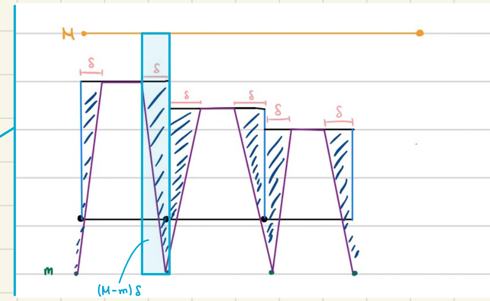
$\Longrightarrow f$ R-intbar.

"$\Longrightarrow$": Sei f R-intbar, $\varepsilon > 0$ und u, o TF mit $\int (o-u)dx < \varepsilon$.

Wir def

$$f_-(x) = \begin{cases} m + (c_k - m)\dfrac{x - x_{k-1}}{\delta} & \text{für } x \in [x_{k-1}, x_{k-1} + \delta] \\ c_k & \text{für } x \in [x_{k-1} + \delta, x_k - \delta] \\ m + (c_k - m)\dfrac{x_k - x}{\delta} & \text{für } x \in [x_k - \delta, x_k] \end{cases}$$

Idee



für $k \in \{1, \dots, n\}$, wobei $m = \min\limits_{x \in [a,b]} u(x)$ und $M = \max\limits_{x \in [a,b]} u(x)$.

Damit ist f_- stetig und es gilt

$$\int_a^b (u - f_-)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (u - f_-)dx \leq n \cdot 2(M-m) \cdot \delta.$$

Mit δ klein genug folgt $\int_a^b (u - f_-)dx < \varepsilon$.

Analog finden wir $f_+ \geq f$ mit $\int_a^b (f_+ - o)dx < \varepsilon$.

Insgesamt folgt damit für $\underset{}{\overset{\text{stetig}}{f_-}} \leq f \leq \overset{\text{stetig}}{f_+}$

$$\int_a^b (f_+ - f_-)dx < 3\varepsilon =: \varepsilon'. \qquad \square$$

5. Metrische Räume, Folgen und Stetigkeit

Definition 5.1 (Normen)**.** Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung $\|\cdot\| : v \in V \mapsto \|v\| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, die folgende drei Eigenschaften erfüllt.

- (Definitheit) Für alle $v \in V$ gilt $\|v\| = 0 \iff v = 0$.
- (Homogenität) Für alle $v \in V$ und alle $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$.
- (Dreiecksungleichung) Für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$.

__Beispiele:__

Sei $d \in \mathbb{N}$, $V = \mathbb{R}^d$ und $v \in V$.

k-te Komponente des Vektors v

- Maximumsnorm: $\|v\|_\infty = \max_{k=1,\dots,d} |v_k|$
- Einsnorm: $\|v\|_1 = \sum_{k=1}^{d} |v_k|$
- auch Zweinorm
  Euklidische Norm: $\|v\|_2 = \|v\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{d} |v_k|^2} = \sqrt{\langle v, v \rangle}$

__Def:__ (Inneres Produkt)
Für alle $v, w \in \mathbb{C}^d$ def. wir
$$\langle v, w \rangle = \sum_{k=1}^{d} v_k \overline{w_k}.$$

Sei $V = C([a,b])$ und $f \in V$.

- Supremumsnorm: $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$
- Einsnorm: $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx$

Übung 5.4 (Cauchy-Ungleichung mit einem ε)**.** *Sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$ die Abschätzung*

$$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq \tfrac{\varepsilon^2}{2} \|\mathbf{v}\|^2 + \tfrac{1}{2\varepsilon^2} \|\mathbf{w}\|^2$$

erfüllen und schliessen Sie daraus auf die Cauchy-Schwarz Ungleichung (5.1).

__Bew:__ Seien $v, w \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt für alle $k \in \{1, \dots, d\}$

$$0 \leq (v_k - w_k)^2$$
$$2 v_k w_k \leq v_k^2 + w_k^2.$$

Summiert man Obiges auf erhalten wir

$$2 \langle v, w \rangle \leq \|v\|^2 + \|w\|^2$$
$$\langle v, w \rangle \leq \tfrac{1}{2} \|v\|^2 + \tfrac{1}{2} \|w\|^2.$$

Ersetzen wir v durch εv und w durch $\pm \frac{1}{\varepsilon} w$, so gilt

$$\langle \varepsilon v, \pm \tfrac{1}{\varepsilon} w \rangle \overset{\text{über Def. von } \langle \cdot,\cdot \rangle}{=} \pm \langle v, w \rangle \leq \tfrac{1}{2} \|\varepsilon v\|^2 + \tfrac{1}{2} \|\tfrac{1}{\varepsilon} w\|^2$$
$$\implies |\langle v, w \rangle| \leq \tfrac{\varepsilon^2}{2} \|v\|^2 + \tfrac{1}{2\varepsilon^2} \|w\|^2. \qquad (1)$$

Falls $v = 0$ oder $w = 0$, so gilt $\langle v, w \rangle = 0$ und (5.1) folgt.
Sei also $v, w \neq 0$ und setze $\varepsilon = \sqrt{\frac{\|w\|}{\|v\|}}$.
Dann folgt aus (1) $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ und (5.1) folgt. $\square$

Proposition 5.3 (Cauchy-Schwarz Ungleichung)**.** *Sei $d \in \mathbb{N}$ und $V = \mathbb{C}^d$. Dann gilt für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ die Ungleichung*

$$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|. \tag{5.1}$$

Des Weiteren gilt Gleichheit in (5.1) *genau dann, wenn $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ linear abhängig sind (das heisst, wenn ein $\alpha \in \mathbb{C}$ existiert mit $\alpha \mathbf{v} = \mathbf{w}$ oder $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{w}$).*

Definition 5.10 (Metrik)**.** Ein **metrischer Raum** (X, d) ist eine Menge X gemeinsam mit einer Abbildung $\mathrm{d} : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die die **Metrik** auf X genannt wird und die folgenden drei Eigenschaften erfüllt:

- (Definitheit) Für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt $\mathrm{d}(x_1, x_2) = 0 \iff x_1 = x_2$.
- (Symmetrie) Für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt $\mathrm{d}(x_1, x_2) = \mathrm{d}(x_2, x_1)$.
- (Dreiecksungleichung) Für alle $x_1, x_2, x_3 \in X$ gilt $\mathrm{d}(x_1, x_3) \leq \mathrm{d}(x_1, x_2) + \mathrm{d}(x_2, x_3)$.

Lemma 5.11 (Eine Norm definiert eine Metrik)**.** *Sei V ein Vektorraum über*[1] $\mathbb{R}$ *und $\|\cdot\|$ eine Norm auf V. Dann definiert*

$$\mathrm{d}(v_1, v_2) = \mathrm{d}_{\|\cdot\|}(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\|$$

für $v_1, v_2 \in V$ eine Metrik d auf V, die man auch die von der Norm $\|\cdot\|$ ***induzierte Metrik*** *auf V nennt.*

__Bew:__ Seien $u, v, w \in V$. Dann gilt

i) $d(v, w) = 0 \iff \|v - w\| = 0 \iff v - w = 0 \iff v = w$.
ii) $d(v, w) = |-1| \cdot \|v - w\| = \|w - v\| = d(w, v)$.
iii) $d(u, w) = \|u - v + v - w\| \leq \|u - v\| + \|v - w\| = d(u, v) + d(v, w)$. $\square$

__Beispiele:__

(i) *(Diskrete Metriken) Sei X eine Menge und $\mathrm{d}_{\text{diskret}} : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert durch*

$$\mathrm{d}_{\text{diskret}}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_1 \neq x_2 \\ 0 & \text{falls } x_1 = x_2 \end{cases}$$

für $x_1, x_2 \in X$. Dann ist $(X, \mathrm{d}_{\text{diskret}})$ ein metrischer Raum.

(ii) *(Manhattanmetrik) Wir setzen $X = [0,1]^2$ und*

$$\mathrm{d}_{\text{NY}}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

für $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [0,1]^2$.

(iii) (Metrik der französischen Eisenbahn) Wir setzen $X = \mathbb{C}$ und definieren die SNCF-Metrik $\mathrm{d}_{\mathrm{SNCF}}$ auf X durch

$$\mathrm{d}_{\mathrm{SNCF}}(z_1, z_2) = \begin{cases} |z_1 - z_2| & \text{falls } z_1, z_2 \text{ linear abhängig über } \mathbb{R} \text{ sind} \\ |z_1| + |z_2| & \text{falls } z_1, z_2 \text{ linear unabhängig über } \mathbb{R} \text{ sind} \end{cases}$$

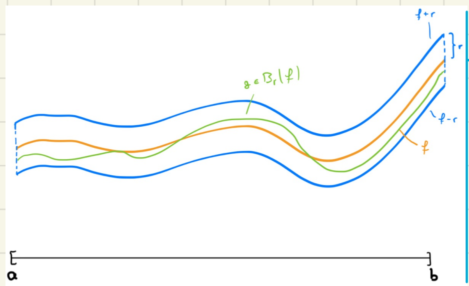
für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Der Grund für den Namen dieser Metrik (siehe Übung 5.13) ist, dass eine Bahnreise von einer französischen Stadt bei z_1 zu einer anderen bei z_2 meist über den Ursprung $z = 0$ (auch Paris genannt) führt, ausser wenn z_1 und z_2 auf derselben – von Paris ausgehenden geraden Strecke liegen. Gewissermassen besteht $\mathbb{C}$ in dieser Metrik also aus unendlich vielen Halbgeraden, die sich nur im Ursprung treffen.

Definition 5.16 (Offene Bälle)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für ein $r > 0$ und einen Punkt $x_0 \in X$ nennt man

$$B_r(x_0) = \{x \in X \mid \mathrm{d}(x, x_0) < r\}$$

den **offenen Ball** mit Radius r um x_0. Wir sagen, dass eine Teilmenge $O \subseteq X$ **offen** ist, falls es zu jedem $x_0 \in O$ ein $r > 0$ mit $B_r(x_0) \subseteq O$ gibt.

Bsp: Offener (oder auch Schlauch) r-Ball um $f \in C([a,b])$ bzg. $\|\cdot\|_\infty$



Wichtige Übung 5.14 (Umgekehrte Dreiecksungleichung)**.** *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass für alle $x_1, x_2, y \in X$ gilt*

$$|\mathrm{d}(x_1, y) - \mathrm{d}(x_2, y)| \leq \mathrm{d}(x_1, x_2).$$

Lemma 5.22. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Jede konvergente Folge in X besitzt einen eindeutigen Grenzwert.*

Bew-Skizze:

Bew durch Widerspruch. Agn. $A_1 \neq A_2$. Setze $\varepsilon = \frac{1}{2} d(A_1, A_2) > 0$.

Wende Def. von Konvergenz an und erhalte Widerspruch.

Definition 5.21 (Konvergenz)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(a_n)_n$ eine Folge in X. Wir sagen, dass $(a_n)_n$ gegen einen Punkt $A \in X$ **konvergiert** oder **strebt**, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\mathrm{d}(a_n, A) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. In diesem Fall nennen wir den Punkt A einen **Grenzwert** der Folge. Weiter ist eine Folge in X **konvergent**, falls sie einen Grenzwert besitzt, und **divergent**, falls sie keinen Grenzwert besitzt.

Konvergenz in (X, d) $\iff$ $\exists A \in X: \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: \quad d(a_n, A) < \varepsilon$.

Lemma 5.24 (Beschränktheit)**.** *Jede konvergente Folge in einem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ ist beschränkt.*

Beispiel 5.34 (Geometrische Folgen)**.** *Sei $q \in \mathbb{C}$. Die Folge $n \in \mathbb{N} \mapsto q^n \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir als **geometrische Folge** zum Skalierungsfaktor q. Wir untersuchen nun diese geometrische Folge auf Konvergenz.*

(i) Für $q = 1$ ist $q^n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} q^n = 1$.

(ii) Für $q = -1$ wissen wir bereits, dass die Folge $n \in \mathbb{N} \mapsto (-1)^n$ divergiert (also keinen Grenzwert hat).

(iii) Allgemeiner gilt, dass für $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| = 1$ und $q \neq 1$ die Folge $(q^n)_n$ divergiert.

(iv) Für $|q| > 1$ ist $(q^n)_n$ unbeschränkt und daher divergent.

(v) Für $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Definition 5.38 (Teilfolge)**.** Wenn $(a_n)_n$ eine Folge in einer Menge X ist und $(n_k)_k : k \in \mathbb{N} \mapsto n_k \in \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Folge ist, dann wird $(a_{n_k})_k$ eine **Teilfolge** von $(a_n)_n$ genannt.

Proposition 5.42 (Häufungspunkte einer Folge)**.** *Sei $(a_n)_n$ eine Folge in einem metrischen Raum (X, d). Ein Punkt $A \in X$ heisst **Häufungspunkt** von $(a_n)_n$, falls die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind.*

(a) Es gibt eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$, so dass $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

(b) Für alle $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \geq N$ mit $\mathrm{d}(a_n, A) < \varepsilon$.

$A \in X$ ist HP $\iff$ $\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N: \quad d(a_n, A) < \varepsilon$.

Bew: (a) $\Rightarrow$ (b): Agn. $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Sei $\varepsilon > 0$, dann existiert ein $K \in \mathbb{N}$, s.d.

$\forall k \geq K: \ d(a_{n_k}, A) < \varepsilon$.

Sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig und setze $k = \max(K, N)$.

Dann gilt $n = n_k \geq k \geq N$ und $d(a_n, A) < \varepsilon$.

A ist somit ein HP von $(a_n)_n$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Sei A HP von $(a_n)_n$. Wir konstruieren per Rekursion eine passende Teilfolge.

1. Schritt: Sei $\varepsilon_1 = 1$ und $N_1 = 1$. Dann existiert ein $n_1 \geq 1$ mit $d(a_{n_1}, A) < 1$.

2. Schritt: Sei $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ und $N_2 = n_1 + 1$. Dann existiert ein $n_2 > n_1$ mit $d(a_{n_2}, A) < \frac{1}{2}$.

3. Schritt: Agn wir haben schon $n_1, n_2, \dots, n_k$ mit $d(a_{n_\ell}, A) < \frac{1}{\ell}$ für $\ell \in \{1, \dots, k\}$.

Sei $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$ und $N = n_k + 1$. Dann existiert ein $n_{k+1} > n_k$ mit

$$d(a_{n_{k+1}}, A) < \frac{1}{k+1}.$$

Daraus folgt $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$, denn für $\varepsilon > 0$ finden gibt es ein $K \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{K} < \varepsilon$ und aus der Konstruktion folgt für alle $k \geq K$, dass

$$d(a_{n_k}, A) < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon. \qquad \square$$

Lemma 5.39 (Konvergenz von Teilfolgen)**.** *Sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge in einem metrischen Raum (X, d). Jede Teilfolge $(a_{n_k})_k$ von $(a_n)_n$ konvergiert und hat denselben Grenzwert $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n$.*

Proposition 5.44. *Sei $d \in \mathbb{N}$, sei $(\mathbf{v}_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{C}^d$, und sei $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^d$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) Die Folge $(\mathbf{v}_n)_n$ konvergiert gegen $\mathbf{v}$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$.

(ii) Die Folge $(\mathbf{v}_n)_n$ konvergiert gegen $\mathbf{v}$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$.

(iii) Die Folge $(\mathbf{v}_n)_n$ konvergiert gegen $\mathbf{v}$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_2$.

(iv) Für alle $j = 1, \dots, d$ konvergiert die Folge der Komponenten $(\pi_j(\mathbf{v}_n))_n$ gegen $\pi_j(\mathbf{v})$.

Insbesondere gilt diese Äquivalenz auch für eine Folge in $\mathbb{R}^d$.

Bew: Es gelten allg. folgende Ungleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned} \|v\|_\infty &\leq \|v\|_1 \leq d \cdot \|v\|_\infty \\ \|v\|_\infty &\leq \|v\|_2 \leq \sqrt{d} \cdot \|v\|_\infty \end{aligned}} \quad \text{direkte Rechnung}$$

Da sich diese 3 Normen nur durch eine Konstante d "unterscheiden", folgt daraus direkt Äquivalenz der ersten 3 Aussagen.

Für (iv) benutze (i) und betrachte immer das Maximum über alle Komponenten. $\square$

Proposition 5.50 (Charakterisierungen der Stetigkeit). *Seien X, Y zwei metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(i) Die Funktion f ist stetig.

(ii) Für jedes $x \in X$ ist f bei x ε-δ-stetig.

(iii) Für jedes $x \in X$ ist f bei x folgenstetig.

(iv) Für jedes $x \in X$ und für jede Umgebung $U \subseteq Y$ von $f(x)$ ist $\overbrace{f^{-1}(U)}^{\text{Urbild (nicht Umkehrfkt.!)}}$ eine Umgebung von x.

<u>Bew:</u> (ii) $\Rightarrow$ (iii): Agn f ist bei x_0 ε-δ-Stetig. Sei $(x_n)_n$ Folge in X mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, s.d.

$$\forall x \in X: \quad x \in B_\delta(x_0) \implies f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0)) \quad (1)$$

Da $(x_n)_n$ gegen x_0 konv. existiert ein $N \in \mathbb{N}$, s.d.

$$\forall n \geq N: \quad x_n \in B_\delta(x_0) \overset{(1)}{\implies} f(x_n) \in B_\varepsilon(f(x_0)).$$

Da ε beliebig war folgt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Bew über Kontraposition

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Agn f ist bei x_0 nicht ε-δ-Stetig. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, s.d.

$$\forall \delta > 0 \; \exists x \in B_\delta(x_0): \quad f(x) \notin B_\varepsilon(f(x_0)).$$

Wähle nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $\delta = \frac{1}{n}$ ein $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x_0)$, dann konv. $(x_n)_n$ gegen x_0 und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(x_n) \notin B_\varepsilon(f(x_0))$.

Damit konv $(f(x_n))_n$ nicht gegen $f(x_0)$ und f ist nicht folgenstetig.

(i) $\Rightarrow$ (iv): Agn f stetig, $x \in X$ und $U \subseteq Y$ eine Umgebung von $f(x)$, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0: \quad B_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq U.$$

Da f stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq U.$$

$$\implies B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U).$$

Also ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Agn f erfüllt (iv) und sei $x \in X$. Sei $\varepsilon > 0$, dann ist $B_\varepsilon(f(x))$ eine Umgebung von $f(x)$ aus (iv) folgt dammit, dass $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ eine Umgebung von x ist, d.h. es existiert ein $\delta > 0$ mit

$$B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$$

$$\implies f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)).$$

Also ist f ε-δ-stetig. $\square$

Intuitiv Merken! Egal wie man auf der x-Achse gegen x_0 geht, nähert man sich immer demselben Grenzwert.

Definition 5.48 (Stetigkeit bei einem Punkt). Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ zwei metrische Räume und sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Wir sagen, dass f **bei** $x_0 \in X$ **ε-δ-stetig** ist, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in B_\delta(x_0)$ auch $f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0))$ gilt.

Wir sagen, dass f **bei** $x_0 \in X$ **folgenstetig** ist, falls für jede konvergente Folge $(x_n)_n$ in X mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ die Folge $(f(x_n))_n$ konvergiert und Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ hat.

Definition 2.44 (Umgebungen eines Punktes). Sei $x \in \mathbb{R}$. Ein Menge, die ein offenes Intervall enthält, in dem x liegt, wird auch eine **Umgebung** von x genannt. Für ein $\delta > 0$ wird das offene Intervall $(x - \delta, x + \delta)$ die **δ-Umgebung** von x genannt.

Definition 5.25 (Umgebungen). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine **Umgebung** von $x_0 \in X$ ist eine Teilmenge $U \subseteq X$, die eine ε-Umgebung von x_0 für ein $\varepsilon > 0$ enthält.

Definition 5.52. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann heisst f **gleichmässig stetig**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $d_X(x_1, x_2) < \delta$ auch $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ gilt. Des Weiteren heisst f **Lipschitz-stetig**, falls es eine sogenannte **Lipschitz-Konstante** $L \geq 0$ gibt mit

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L d_X(x_1, x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in X$.

Lipschitz-stetig $\implies$ glm. stetig $\implies$ stetig.

Proposition 5.53 (Stetige Funktionen). *Seien X, Y, Z metrische Räume.*

(i) Falls $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetig sind, dann ist auch $g \circ f : X \to Z$ stetig.

(ii) Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}^d$ ist genau dann stetig, wenn die Komponenten

$$f_j = \pi_j \circ f : X \to \mathbb{C}$$

für $j = 1, \ldots, d$ stetig sind, wobei $\pi_j : (z_1, \ldots, z_d)^t \in \mathbb{C}^d \mapsto z_j \in \mathbb{C}$ für $j \in \{1, \ldots, d\}$ die Projektion auf die j-te Koordinate bezeichnet.

(iii) Die Addition $+ : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ ist stetig.

(iv) Die Multiplikation $\cdot : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ ist stetig.

(v) Die Kehrwertfunktion $(\ )^{-1} : z \in \mathbb{C}^\times \mapsto z^{-1} \in \mathbb{C}$ ist stetig.

<u>Bew:</u> (i): Sei $(x_n)_n$ Folge in X mit Grenzwert x_0, dann konv. die Folge $(f(x_n))_n$ in Y gegen $f(x_0)$, da f stetig ist. Doch da g stetig ist, konv. die Folge $(g(f(x_n)))_n$ in Z gegen $g(f(x_0))$. Damit ist $g \circ f$ auch stetig.

(ii): Bemerke: Die Projektion $\pi_j : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ ist wegen $|\pi_j(v-w)| \leq \|v - w\|_\infty$ Lipschitz-stetig (bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ mit $L = 1$).

Damit folgt aus (i), dass $\pi_j \circ f$ für jedes $j \in \{1, \ldots, d\}$ stetig ist, wenn f stetig ist.

Sei nun umgekehrt $\pi_j \circ f$ für jedes $j \in \{1, \ldots, d\}$ stetig und $(x_n)_n$ konv. in X mit Grenzwert x.

Dann konv. $(\pi_j(f(x_n)))_n$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ gegen $\pi_j(f(x))$. Doch aus komponentenweiser Konv. folgt Konv. des Vektors $(f(x_n))_n$ gegen $f(x)$. Damit ist f stetig.

(iii): Seien $(v, w), (v', w') \in \mathbb{C}^2$. Dann gilt

$$|(v+w) - (v'+w')| \leq |v - v'| + |w - w'| \leq 2 \|(v,w) - (v',w')\|_2.$$

Damit ist $+$ Lipschitz-stetig.

(iv): Seien $(v, w), (v_0, w_0) \in \mathbb{C}^2$ mit $\|(v,w) - (v_0, w_0)\|_2 \overset{(1)}{<} 1$. Betrachte

$$|vw - v_0 w_0| \leq |vw - v_0 w| + |v_0 w - v_0 w_0| = |w|\,|v - v_0| + |v_0|\,|w - w_0|.$$

Zudem gilt $|w| \leq |w - w_0| + |w_0| \overset{(1)}{<} 1 + |w_0|$

Sei $\varepsilon > 0$ und $\|(v,w) - (v_0, w_0)\|_2 < \delta$.

Dann folgt $|vw - v_0 w_0| \leq (1 + |w_0|) \cdot \overbrace{|v - v_0|}^{<\delta} + |v_0| \cdot \overbrace{|w - w_0|}^{<\delta} < (1 + |w_0|)\delta + |v_0|\delta = (1 + |w_0| + |v_0|)\delta \overset{\text{soll}}{=} \varepsilon.$

Setze also $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{1 + |w_0| + |v_0|}\right)$. Damit ist $\cdot$ stetig.

(v): Seien $v, v_0 \in \mathbb{C}^\times$ mit $|v - v_0| < \frac{|v_0|}{2} \overset{\text{geometrisch überlegen (oder umgekehrte } \Delta\text{-Ungl.)}}{\implies} |v| > \frac{|v_0|}{2} \implies \frac{1}{|v|} < \frac{2}{|v_0|}$

Betrachte $\left|\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right| = \left|\frac{v_0 - v}{v v_0}\right| < \frac{2}{|v_0|^2} |v_0 - v| < \frac{2}{|v_0|^2} \delta \overset{\text{soll}}{=} \varepsilon$

Sei also für $\varepsilon > 0$ beliebig $\delta = \min\left(\frac{|v_0|}{2}, \frac{\varepsilon |v_0|^2}{2}\right)$.

Damit folgt Stetigkeit von $(\cdot)^{-1}$. $\square$

6. Grenzwerte reeller Folgen und Funktionen

Proposition 6.1 (Grenzwerte und Ungleichungen). *Seien $(a_n)_n, (b_n)_n$ reelle Folgen mit Grenzwerten $a = \lim_{n\to\infty} a_n, b = \lim_{n\to\infty} b_n$.*

(i) Falls $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt auch $a \leq b$.

(ii) Falls $a < b$, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $a_n < b_n$ für alle $n \geq N$.

__Bew:__ (ii): Sei $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq N: \quad \begin{Bmatrix} |a_n - a| < \varepsilon \\ |b_n - b| < \varepsilon \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \\ b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon \end{Bmatrix}$$

Daraus folgt mit $a + \varepsilon = \frac{a+b}{2} = b - \varepsilon$, dass $a_n < \frac{a+b}{2} < b_n$.

(i): Folgt direkt aus (ii) $\square$

Lemma 6.2 (Sandwich). *Es seien $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$ drei reelle Folgen, so dass $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Angenommen $(a_n)_n$ und $(c_n)_n$ sind konvergent und $A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$. Dann ist auch die Folge $(b_n)_n$ konvergent und $A = \lim_{n\to\infty} b_n$.*

Satz 6.5 (Konvergenz von monotonen Folgen). *Eine monotone reelle Folge $(a_n)_n$ konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist. Falls die Folge $(a_n)_n$ monoton wachsend ist, gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Falls die Folge $(a_n)_n$ monoton fallend ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

__Bew:__ Sei $(a_n)_n$ OBdA monoton wachsend und $a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Dann existirt für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$a_N > a - \varepsilon \iff \overbrace{a - a_N}^{\geq 0} < \varepsilon$$

Für alle $n \geq N$ folgt mit Monotonie $(a_n \geq a_N)$ nun

$$a - a_n \leq a - a_N < \varepsilon \overset{a - a_n \geq 0}{\Longrightarrow} |a - a_n| < \varepsilon. \quad \square$$

Satz 6.11 (Eigenschaften des Limes superior). *Für eine reelle, beschränkte Folge $(a_n)_n$ erfüllt der Limes superior $\limsup_{n\to\infty} a_n$ die folgenden Eigenschaften:* Sei $a = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

- *Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es nur endlich viele Folgenglieder a_n mit $a_n > \limsup_{n\to\infty} a_n + \varepsilon$.* $\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n \geq N: \quad a_n < a + \varepsilon.$
- *Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es unendlich viele Folgenglieder a_n mit $a_n \geq \limsup_{n\to\infty} a_n - \varepsilon$.* $\iff \forall \varepsilon > 0 \; \forall N \; \exists n \geq N: \quad a_n > a - \varepsilon.$

Korollar 6.14 (Charakterisierung der Konvergenz). *Für eine reelle, beschränkte Folge $(a_n)_n$ gilt $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ genau dann wenn $(a_n)_n$ konvergent ist.*

Satz 6.15 (Konvergenz von Teilfolgen). *Für jede konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_k$ einer beschränkten, reellen Folge $(a_n)_n$ gilt*

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \in [\liminf_{n\to\infty} a_n, \limsup_{n\to\infty} a_n].$$

Des Weiteren existiert eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_k$ mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \limsup_{n\to\infty} a_n$ und eine konvergente Teilfolge $(a_{m_k})_k$ mit $\lim_{k\to\infty} a_{m_k} = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

__Bew:__ Agn. $(a_{n_k})_k$ konv. gegen a. Sei $S = \limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $a_n < S + \varepsilon$. Für $k \geq N$ gilt dann $n_k \geq k \geq N$ und damit auch $a_{n_k} < S + \varepsilon$.

Daraus folgt nun $\quad a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \leq S + \varepsilon$

und damit $\quad a \leq S.$

Analog folgt $\quad a \geq I.$

Die Existenz einer Teilfolge, die gegen S strebt ist äquivalent zur Aussage „S ist ein HP von $(a_n)_n$".

Sei also $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \geq N_0: \quad a_n < S + \varepsilon.$$

Sei nun $N \in \mathbb{N}$ beliebig und $N_1 = \max(N, N_0)$. Dann existiert ein $n \geq N_1 \geq N$ mit $\quad a_n > S - \varepsilon.$

Damit haben wir für beliebige $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$ gefunden mit $\quad |S - a_n| < \varepsilon.$ (genau die Def. von HP) $\square$

Definition 6.8 (Limes superior). Für eine beschränkte reelle Folge $(a_n)_n$ ist der **Limes superior** definiert durch

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \Big(\sup_{k\geq n} a_k\Big) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sup_{k\geq n} a_k\Big).$$

Definition 6.9 (Limes inferior). Für eine beschränkte, reelle Folge $(a_n)_n$ ist der **Limes inferior** definiert durch

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \Big(\inf_{k\geq n} a_k\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\inf_{k\geq n} a_k\Big).$$

Definition 6.19 (Uneigentliche Grenzwerte). Eine reelle Folge $(a_n)_n$ **divergiert gegen** ∞, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a_n \geq \varepsilon^{-1}$ gilt für alle $n \geq N$. In diesem Fall schreiben wir $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Genauso sagen wir, dass $(a_n)_n$ **gegen** $-\infty$ **divergiert**, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a_n \leq -\varepsilon^{-1}$ für alle $n \geq N$. In letzterem Fall schreiben wir $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. In beiden Fällen spricht man auch von **uneigentlicher Konvergenz** und **uneigentlichen Grenzwerten**.

Definition 6.22 (Cauchy-Folge). Eine Folge $(a_n)_n$ in einem metrischen Raum (X, d) ist eine Cauchy-Folge, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\mathrm{d}(a_m, a_n) < \varepsilon$$

für alle $m, n \geq N$.

Satz 6.26 (Cauchy-Kriterium für Folgen)**.** *Eine reelle Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

<u>Bew:</u> "$\Rightarrow$": Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq N: \quad |a_n - a| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Insbesondere gilt $\forall n, m \geq N$: $|a_n - a_m| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{|a - a_m|}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon$.

"$\Leftarrow$": Sei $(a_n)_n$ eine Cauchy-Folge. Sei $\varepsilon = 1$ und $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\forall n, m \geq N: \quad |a_n - a_m| < 1 \implies |a_n| < |a_m| + 1.$$

Setze $m = N$. Dann gilt $\forall n \geq N$: $|a_n| < |a_N| + 1$. Damit ist $(a_n)_n$ beschränkt.

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig und $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$.

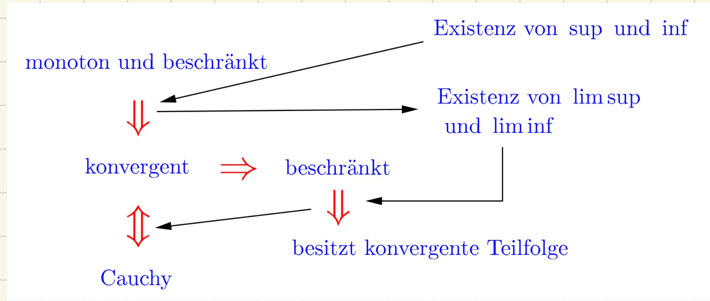
Setze $m = N$. Dann gilt für alle $n \geq N$: $a_N - \varepsilon < a_n < a_N + \varepsilon$.

Daraus folgt $a_N - \varepsilon \leq \inf\{a_k \mid k \geq n\} \leq a_n \leq \sup\{a_k \mid k \geq n\} \leq a_N + \varepsilon$

für alle $n \geq N$. Im Grenzwert ergibt sich dann

$$a_N - \varepsilon \leq \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} \leq a_N + \varepsilon.$$

Daraus folgt $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$, womit $(a_n)_n$ konvergiert. $\square$



Lemma 6.39 (Grenzwerte und Stetigkeit)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D und f eine reellwertige Funktion auf D. Dann ist f genau dann stetig bei x_0, wenn $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Lemma 6.40 (Grenzwerte mittels Folgen)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D. Dann gilt $A = \lim_{x\to x_0} f(x)$ genau dann, wenn für jede Folge $(a_n)_n$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ auch $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = A$ gilt.*

Proposition 6.41 (Grenzwerte und Verknüpfung mit stetigen Funktionen)**.** *Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$, x_0 ein Häufungspunkt von D, $f : D \to E$ eine Funktion, $y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x) \in E$, und $g : E \to \mathbb{R}$ eine bei y_0 stetige Funktion. Dann gilt $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$.*

<u>Bew:</u> Sei $\varepsilon > 0$. Da g bei y_0 stetig ist, existiert ein $\eta > 0$ mit

$$|y - y_0| < \eta \implies |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } y \in E.$$

Da $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ gilt, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - y_0| < \eta \qquad \text{für alle } x \in D.$$

Zusammen folgt für alle $x \in D$

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |g(f(x)) - g(y_0)| < \varepsilon.$$

Daraus folgt $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$. $\square$

Wir werden jetzt Grenzwerte von Folgen und insbesondere Satz 6.5 anwenden, um die Exponentialfunktion zu definieren und einige ihrer Eigenschaften zu beweisen[2]. Die **Exponentialfunktion** $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist definiert durch

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > 0 \tag{6.3}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Des Weiteren ist die **Eulersche Zahl** definiert als

$$\mathrm{e} = \exp(1) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in [2, 3].$$

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D. Wir erinnern daran, dass Letzteres genau dann der Fall ist, wenn

$$D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset \tag{6.7}$$

für alle $\delta > 0$, oder äquivalent, wenn es eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$ gibt, die gegen x_0 strebt.

Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist $A = \lim_{x\to x_0} f(x)$ **der Grenzwert von** $f(x)$ **für** $x \to x_0$, oder auch **der Grenzwert bei** x_0, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Angenommen $D \subseteq \mathbb{R}$ ist eine Teilmenge und $x_0 \in \mathbb{R}$ hat die Eigenschaft $D \cap (x_0, x_0 + \delta) \neq \emptyset$ für alle $\delta > 0$. Intuitiv hat der Punkt x_0 also die Eigenschaft, dass ihm D von rechts beliebig nahe kommt, was also eine stärkere Forderung ist als (6.7). Einen solchen Punkt x_0 wollen wir einen **rechtsseitigen Häufungspunkt** von D nennen. Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist $A = \lim_{x\searrow x_0} f(x)$ (alternativ $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ oder auch $\lim_{x\to x_0,\ x>x_0} f(x)$) der **rechtsseitige Grenzwert von** $f(x)$ **bei** x_0, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D \cap (x_0, x_0 + \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Falls x_0 die Eigenschaft $D \cap (x_0 - \delta, x_0) \neq \emptyset$ für alle $\delta > 0$ hat (x_0 ist ein **linksseitiger Häufungspunkt**), können wir ebenso den **linksseitigen Grenzwert** $\lim_{x\nearrow x_0} f(x)$ (alternativ $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ oder auch $\lim_{x\to x_0,\ x<x_0} f(x)$) definieren.

Falls x_0 ein links- und rechtsseitiger Häufungspunkt ist, dann existiert der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ genau dann, wenn die links- und rechtseitigen Grenzwerte von $f(x)$ bei x_0 existiert und $\lim_{x\nearrow x_0} f(x) = \lim_{x\searrow x_0} f(x)$ erfüllt ist.

Satz 6.47 (Riemann-Integral über Riemann-Summen)**.** *Sei f eine Riemann-integrierbare reellwertige Funktion auf $[a, b]$. Dann ist $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ der Grenzwert der Riemann-Summen $R(f, \mathfrak{Z}, z)$, wenn die Maschenweite $|\mathfrak{Z}|$ der Zerlegung gegen Null geht. Formal geschrieben gilt also*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ \forall \mathfrak{Z}\ \forall \mathbf{z} : |\mathfrak{Z}| < \delta \implies \left| R(f, \mathfrak{Z}, \mathbf{z}) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon,$$

wobei $\mathfrak{Z}$ über die Zerlegungen von $[a, b]$ läuft und $\mathbf{z}$ über die erlaubten Wahlen von Zwischenpunkten der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ (wie in Definition 6.46) läuft.

<u>Bew:</u> Idee: Zuerst für stetige Funktionen beweisen und dann Sandwich-Lemma anwenden.

Sei f stetig auf $[a,b]$. Dann ist f glm. stetig, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in [a,b] : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, $\delta > 0$ wie oben, $\mathfrak{Z}$ eine Zerlegung mit $|\mathfrak{Z}| < \delta$ und z erlaubte Zwischenpunkte. Betrachte

$$\begin{aligned} \left|R(f, \mathfrak{Z}, z) - \int_a^b f(x)dx\right| &= \left|\sum_{k=1}^n f(z_k)(x_k - x_{k-1}) - \int_a^b f(x)dx\right| \\ &= \left|\sum_{k=1}^n \Big(\overbrace{f(z_k)(x_k - x_{k-1})}^{= \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(z_k)dx} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx\Big)\right| \\ &= \left|\sum_{k=1}^n \Big(\int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(z_k) - f(x))\,dx\Big)\right| \\ &\overset{\text{2 Mal }\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_{k=1}^n \Big(\int_{x_{k-1}}^{x_k} \overbrace{|f(z_k) - f(x)|}^{< \varepsilon}\,dx\Big) \overset{\text{Teleskopsumme}}{<} \varepsilon(b-a), \end{aligned}$$

da aufgrund der Maschenweite für alle $x \in [x_{k-1}, x_k]$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $|x - z_k| < \delta$ (da auch $z_k \in [x_{k-1}, x_k]$).

Damit ist der Satz für stetige Funktionen bewiesen.

Sei nun f bloss R-intbar und $\varepsilon > 0$. Dann existieren stetige Funktionen $f_- \leq f \leq f_+$ mit $\int (f_+ - f_-)dx < \varepsilon$. Wir wenden obiges an und erhalten

$$\left|R(f_+, \mathfrak{Z}, z) - \int_a^b f_+ dx\right| < \varepsilon.$$

Daraus folgt $\quad R(f, \mathfrak{Z}, z) \leq R(f_+, \mathfrak{Z}, z) < \int_a^b f_+ dx + \varepsilon \leq \int_a^b f dx + 2\varepsilon.$

Analog folgt $\quad R(f, \mathfrak{Z}, z) > \int_a^b f dx - 2\varepsilon.$ $\square$

Definition 6.46 (Riemann-Summen)**.** Für eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ von $[a, b]$ definieren wir die **Maschenweite der Zerlegung** $\mathfrak{Z}$ als $|\mathfrak{Z}| = \max_{k=1,\ldots,n}(x_k - x_{k-1})$. Weiters bezeichnen wir $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in [a, b]^n$ als eine **erlaubte Wahl von Zwischenpunkten** der Zerlegung $\mathfrak{Z}$, falls $z_k \in [x_{k-1}, x_k]$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$. Für eine reellwertige Funktion f auf $[a, b]$, eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von $[a, b]$ und eine erlaubte Wahl von Zwischenpunkten $\mathbf{z}$ definieren wir die **Riemann-Summe** durch

$$R(f, \mathfrak{Z}, \mathbf{z}) = \sum_{k=1}^n f(z_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ein Häufungspunkt (also mit $\dot{U}_\delta(x_0) \cap D \neq \emptyset$ für alle $\delta > 0$). Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wir schreiben

$$f(x) = O(g(x)) \text{ für } x \to x_0,$$

falls ein $\delta > 0$ und eine Konstante $M > 0$ existieren, so dass $|f(x)| \leq M|g(x)|$ für alle $x \in D \cap \dot{U}_\delta(x_0)$. In anderen Worten, f ist „**Gross-O**" von g für $x \to x_0$, falls in einer punktierten Umgebung von x_0 die Funktion f durch eine Konstante mal $|g|$ beschränkt werden kann. Obwohl dies für obige Defintion nicht notwendig ist, werden wir eigentlich immer vorraussetzen, dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ oder zumindest für alle $x \in \dot{U}_{\delta_0}(x_0)$ für ein $\delta_0 > 0$. In diesem Fall ist f genau dann Gross-O von g, wenn $\frac{f}{g}$ in einer δ-Umgebung von x_0 beschränkt ist. Nochmals in anderen Worten ist $f = O(g)$ gleichbedeutend damit, dass f nicht viel grösser als g ist wenn x in der Nähe von x_0 liegt. Zum Beispiel gilt

- $\frac{x}{x+1} = O(1)$ für $x \to \infty$,
- für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 = O(x)$ für $x \to x_0$, und insbesondere auch
- $x^2 = O(x)$ für $x \to 0$, aber
- x^2 ist nicht gleich $O(x)$ für $x \to \infty$ da $\frac{x^2}{x} = x$ in keiner Umgebung von ∞ beschränkt ist.

Wenn f nicht nur durch g beschränkt ist, sondern asymptotisch gegenüber g vernachlässigbar ist, dann sagen wir, dass f „**Klein-o**" von g ist für $x \to x_0$. Genauer formuliert: Wir schreiben

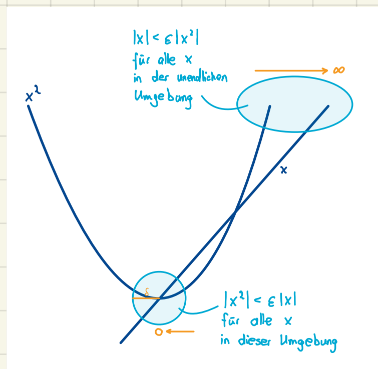
$$f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \to x_0,$$

falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$ für alle $x \in D \cap \dot{U}_\delta(x_0)$. Wie zuvor wollen wir meist $g(x) \neq 0$ auf D annehmen. In diesem Fall gilt $f(x) = o(g(x))$ für $x \to x_0$ genau dann, wenn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Man beachte, dass, falls die eigentlichen Grenzwerte $\lim_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0} g(x)$ existieren und nicht Null sind, sicherlich $f(x) = O(g(x))$ für $x \to x_0$ erfüllt ist, aber die stärkere Aussage $f(x) = o(g(x))$ für $x \to x_0$ falsch ist. Beide Notationen sind also vor allem dann interessant, wenn die Grenzwerte entweder null oder unendlich sind. Zum Beispiel gilt

- $x = o(x^2)$ für $x \to \infty$ (aber nicht umgekehrt) und
- $x^2 = o(x)$ für $x \to 0$ (aber nicht umgekehrt).



7. Reihen, Funktionenfolgen und Potenzreihen

Definition 7.1 (Reihen)**.** Sei $(a_k)_k$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen. Wir wollen die **(unendliche) Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ betrachten, wobei a_k für $k \in \mathbb{N}$ das **k-te Glied** oder der **k-te Summand** der Reihe genannt wird. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die n-te **Partialsumme** der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ durch $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ gegeben. Wir nennen die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **konvergent**, falls der Grenzwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n$$

in $\mathbb{C}$ existiert, wobei wir diesen dann als **Wert der Reihe** bezeichnen. Ansonsten nennen wir die Reihe **divergent**.

Proposition 7.2 (Nullfolgen)**.** *Falls die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann ist die Folge $(a_n)_n$ eine* ***Nullfolge****, das heisst $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Bew: Nach Annahme konv. s_n. Daraus folgt
$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_{n+1} - s_n) = S - S = 0.$ $\square$

Beispiel 7.3 (Geometrische Reihe)**.** *Die* ***geometrische Reihe*** *$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ zu $q \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ ist. In diesem Fall ist*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

In der Tat impliziert Konvergenz der Reihe mittels Proposition 7.2, dass $|q| < 1$. Umgekehrt gilt für $|q| < 1$ auf Grund der geometrischen Summenformel in Proposition 3.8 und der Konvergenz der geometrischen Folge in Beispiel 5.34, dass

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to \frac{1}{1-q}$$

für $n \to \infty$.

Beispiel 7.4 (Harmonische Reihe)**.** *Die Umkehrung von Proposition 7.2 gilt nicht. Beispielsweise ist die* ***harmonische Reihe*** *$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent.*

Wir beweisen die Divergenz mit einer konkreten Abschätzung. Sei $n = 2^\ell$, dann erfüllt die Partialsumme der harmonischen Reihe für n die Abschätzung

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2^\ell} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{2^{\ell-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^\ell} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{=\frac{1}{2}} + \frac{1}{16} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^\ell} + \cdots + \frac{1}{2^\ell}}_{=\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\ell}{2}.\end{aligned}$$

Da $\ell \in \mathbb{N}$ beliebig war, erkennen wir, dass die Partialsummen nicht beschränkt sind, und daher ist die harmonische Reihe divergent.

Lemma 7.6 (Linearität)**.** *Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen und $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann sind die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$, $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k)$ konvergent und es gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Lemma 7.8 (Indexverschiebung für Reihen)**.** *Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ ist die Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} a_k = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\ell+N-1}$ genau dann konvergent, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent ist. In diesem Fall gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k.$$

Insbesondere zeigt Lemma 7.8, dass das Konvergenzverhalten einer Reihe sich nicht ändert, wenn endlich viele Glieder der Reihe weggelassen, hinzugefügt oder geändert werden. Wir werden diese zentrale Eigenschaft oft und deswegen mitunter auch implizit verwenden.

Lemma 7.9 (Zusammenfassen von *benachbarten* Gliedern)**.** *Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe und $(n_k)_k$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Definiere $A_1 = a_1 + \cdots + a_{n_1}$ und $A_k = a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}$ für $k \geq 2$. Dann gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

$$\sum_{k=1}^{K} A_k = (a_1 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}) + \ldots + (a_{n_{K-1}+1} + \ldots + a_{n_K}) = \sum_{n=1}^{n_K} a_n$$

Proposition 7.11 (Monotone Partialsummen). *Für eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit nicht-negativen Gliedern $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ bilden die Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ eine monoton wachsende Folge. Falls diese Folge der Partialsummen beschränkt ist, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Ansonsten gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = \infty.$$

Korollar 7.12 (Vergleichssatz). *Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ zwei Reihen mit der Eigenschaft $0 \leq a_k \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ und insbesondere gelten die Implikationen*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent } \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent } \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}.$$

Diese beiden Implikationen treffen auch dann zu, wenn $0 \leq a_n \leq b_n$ nur für alle hinreichend grossen $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Anwendung

Beispiel 7.14 (Reihe der Kehrwerte der Quadratzahlen). *Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent. Tatsächlich gilt $a_k = \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = b_k$ für $k \geq 2$ und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ist konvergent, da deren n-te Partialsumme unter Auflösen einer Teleskopsumme (siehe Abschnitt 3.1.1) durch*

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

gegeben ist.

Verallgemeinerung der Beweistechnik für Divergenz der harmonischen Reihe (Zusammenfassen in Blöcke von 2er Potenzen)

Proposition 7.16 (Verdichtung). *Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit nicht-negativen, monoton abnehmenden Gliedern $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq 0$ ist genau dann konvergent, wenn $\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}}_{\text{verdichtete Summe}}$ konvergent ist.*

__Bew:__ Aus der Monotonie ergeben sich folgende Beobachtungen:

$$a_2 \leq a_2 \leq a_1$$
$$2a_4 \leq a_3 + a_4 \leq 2a_2$$
$$2^2 a_{2^3} \leq \underbrace{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}_{\text{Potenzblöcke.}} \leq 2^2 a_{2^2}$$

Allg. gilt: $2^n a_{2^{n+1}} \leq a_{2^n+1} + \ldots + a_{2^{n+1}} \leq 2^n a_{2^n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Daraus folgt mit aufsummieren

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2^{k-1} a_{2^k} \leq \sum_{\ell=2}^{2^{n+1}} a_\ell \leq \sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k}.$$

Mit $n \to \infty$ folgt die Proposition. $\square$

(p-Summen)
__Bsp:__ Sei $p \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty$ g.d.w. $p > 1$

Falls $p \leq 0$, so ist $\frac{1}{n^p}$ keine Nullfolge und die Reihe divergiert.

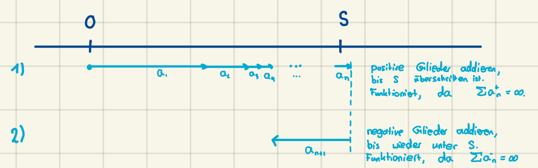
Sei also $p > 0$. Dann ist $\left(\frac{1}{n^p}\right)_n$ monoton fallend $\rightsquigarrow$ Verdichtung anwenden.

Es folgt
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} < \infty$$
$$\iff \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2^p}\right)^n < \infty \quad \text{(geometrische Reihe)}$$
$$\iff q = \frac{2}{2^p} < 1 \iff 2 < 2^p \iff p > 1.$$

Wir sagen, dass eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit komplexen Summanden **absolut konvergiert**, falls die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist **bedingt konvergent**, falls sie konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.

Satz 7.21 (Riemannscher Umordnungssatz). *Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine bedingt konvergente Reihe mit reellen Gliedern. Dann gibt es zu jedem $A \in \mathbb{R}$ eine bijektive Funktion (eine Umordnung) $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ bedingt konvergiert und $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = A$ ist. Weiters gibt es eine Umordnung der Reihe, die divergiert.*

__Bew.-Idee:__ $\sum a_n$ bedingt konv. $\implies \sum |a_n| = \underbrace{\sum a_n^+}_{\text{positive Glieder}} = \underbrace{\sum a_n^-}_{\text{negative Glieder}} = \infty.$



3) Schritte 1,2 bis ins ∞ wiederholen.

Intuitiv Merken!

Proposition 7.25 (Leibniz-Kriterium). *Gegeben sei eine monoton fallende Folge $(a_n)_n$ positiver Zahlen, die gegen Null konvergiert. Dann konvergiert die zugehörige alternierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ und es gilt, dass*

$$\left|\sum_{k=1}^{\ell}(-1)^{k+1}a_k - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k\right| \leq a_{\ell+1}. \tag{7.1}$$

für alle $\ell \in \mathbb{N}$. Weiters ist

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \leq \sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k+1}a_k$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

__Bew:__ Bemerke für die Partialsummen, dass

$(s_1, s_3, s_5, \ldots) = (s_{2n-1})_n$ monoton fallend

und $(s_2, s_4, s_6, \ldots) = (s_{2n})_n$ monoton wachsend

ist. Zudem gilt $s_{2n+1} = s_{2n} + \overbrace{a_{2n+1}}^{\geq 0} \geq \overbrace{s_{2n}}^{\text{mon. wachsend}} \geq s_2$

und analog $s_{2n} = s_{2n-1} - a_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_1$.

Damit konv. $(s_{2n-1})_n$ und $(s_{2n})_n$. Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty}(s_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty}(s_{2n} + \underbrace{a_{2n+1}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0}) = \lim_{n\to\infty}(s_{2n}) = S.$$

Daraus folgt $s_{2n} \leq S \leq s_{2n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Bew. als Merkhilfe

Satz 7.26 (Cauchy-Kriterium). *Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für $n \geq m \geq N$*

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$

erfüllt ist.

__Bew:__ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv. $\iff (s_n)_n$ konv.

$\iff (s_n)_n$ ist Cauchy-Folge

$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n,m \geq N: \overbrace{|s_n - s_m|}^{<\varepsilon} = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon.$ $\square$

Cauchy-Kriterium für Reihen

Δ-Ungl.

Proposition 7.28 (Absolute Konvergenz). *Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist auch konvergent und es gilt die verallgemeinerte Dreiecksungleichung*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Korollar 7.29 (Majorantenkriterium von Weierstrass). *Sei $(a_n)_n$ eine komplexe und $(b_n)_n$ eine reelle Folge mit $|a_n| \leq b_n$ für alle hinreichend grossen $n \in \mathbb{N}$. Falls $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und daher auch konvergent.*

!

Korollar 7.30 (Cauchy-Wurzelkriterium). *Sei $(a_n)_n$ eine Folge komplexer Zahlen und*

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\,.$$

Dann gilt

$$\alpha < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist absolut konvergent,}$$

$$\alpha > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist divergent und } (a_n)_n \text{ ist keine Nullfolge.}$$

Bew: Agn $\alpha > 1$: Dann es für $\varepsilon = \alpha - 1 > 0$ und für jedes $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} > \alpha - \varepsilon = 1$

$$\overset{(\cdot)^n}{\iff} |a_n| > 1.$$

$$\implies (a_n)_n \text{ ist keine Nullfolge und } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ div.}$$

1. Eigenschaft vom limsup verwenden

Agn $\alpha < 1$: Dann gibt es für $\varepsilon = \frac{1-\alpha}{2} > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq N: \quad \sqrt[n]{|a_n|} < \alpha + \varepsilon = \frac{1+\alpha}{2} = q < 1$$

$$\overset{(\cdot)^n}{\iff} |a_n| < q^n$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} q^n}_{\text{geometrische Reihe}} < \infty$$

2. Eigenschaft vom limsup verwenden

□

geometrische Reihe

Korollar 7.32 (D'Alemberts Quotientenkriterium). *Sei $(a_n)_n$ eine Folge komplexer Zahlen mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass*

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

existiert. Dann gilt

$$\alpha < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist absolut konvergent.}$$

$$\alpha > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist divergent und } (a_n)_n \text{ konvergiert nicht gegen Null.}$$

Cauchy-Kriterium für Reihen

verallgemeinerte Δ-Ungl.

Satz 7.35 (Umordnen absolut konvergenter Reihen). *Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe mit komplexen Gliedern. Sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ ebenso absolut konvergent und es gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}. \tag{7.2}$$

abs. konv. Reihen sind kommutativ!

Bew: Sei $\varepsilon > 0$. Wegen dem Cauchy-Kriterium existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

für alle $n \geq m \geq N$: $\left|\sum_{k=m}^{\infty} a_k\right| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_{k=m}^{\infty} |a_k| \underset{(1)}{\leq} \varepsilon.$ ("nur die Glieder $a_1, a_2, \dots, a_N$ spielen eine Rolle")

Wir definieren $M = \max\{\varphi^{-1}(k) \mid k \leq N\}$. (Glieder, die eine Rolle spielen werden wir sich in der Differenz wegstreichen. Dann können wir wieder Cauchy anwenden)

Sei $n \geq M$. Betrachte:

$$\left|\sum_{\ell=1}^{n} a_{\varphi(\ell)} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| = \left|\sum_{\ell=1}^{n} a_{\varphi(\ell)} - \sum_{k=1}^{N} a_k - \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k\right|$$

$$\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \left|\sum_{\ell=1}^{n} a_{\varphi(\ell)} - \sum_{k=1}^{N} a_k\right| + \left|\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k\right|$$

diese Ganze Summe ist hier sicher enthalten ⇝ Glieder wegstreichen

$$= \left|\sum_{\substack{\ell \leq n \\ \varphi(\ell) > N}} a_{\varphi(\ell)}\right| + \left|\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k\right|$$

$$\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_{\substack{\ell \leq n \\ \varphi(\ell) > N}} |a_{\varphi(\ell)}| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \overset{\text{folgt aus (1)}}{<} 2\varepsilon.$$

Daraus folgt $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. □

Umordnungssatz

Satz 7.36 (Produktsatz)**.** *Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zwei absolut konvergente Reihen und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Dann ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)_1} b_{\varphi(n)_2}$$

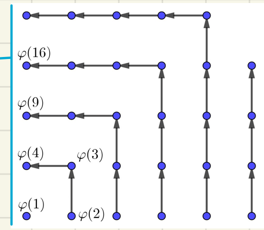
eine absolut konvergente Reihe, wobei $\varphi(n) = (\varphi(n)_1, \varphi(n)_2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiters gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)_1} b_{\varphi(n)_2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right). \tag{7.3}$$

Informell ausgedrückt kann man schreiben

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) a_m = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_m b_n.$$

<u>Bew:</u> Sei $\varphi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^2$ wie im Bild.



Damit können wir die Partialsumme bis n^2 betrachten und es gilt

$$s_n := \sum_{k=1}^{n^2} |a_{\varphi(k)_1}||b_{\varphi(k)_2}| = \left(\sum_{\ell=1}^{n} |a_\ell|\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n} |b_\ell|\right)$$

$$\leq \underbrace{\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} |a_\ell|\right)\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} |b_\ell|\right)}_{:=M}.$$

Damit ist $(s_n)_n$ monoton wachsend und durch M von oben beschränkt und damit konv. $(s_n)_n$ und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{\varphi(k)_1}||b_{\varphi(k)_2}| = \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} |a_\ell|\right)\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} |b_\ell|\right).$$

Ist nun $\psi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^2$ beliebig, so ist $\varphi^{-1} \circ \psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ auch bij. und wir können den Umordnungssatz anwenden. $\square$

Korollar 7.37 (Cauchy-Produkt)**.** *Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen mit komplexen Gliedern sind, dann gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right),$$

wobei die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right)$ absolut konvergent ist.

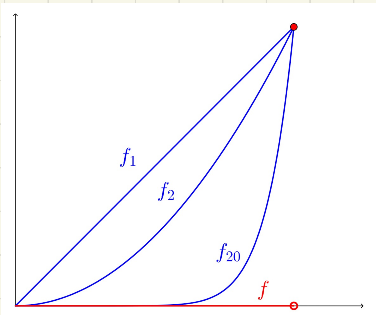
Definition 7.40 (Funktionenfolgen und punktweise Konvergenz)**.** Eine reellwertige (oder komplexwertige) **Funktionenfolge** auf einer Menge X ist eine Folge $(f_n)_n$ von Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$ (oder $f_n : X \to \mathbb{C}$). Wir sagen, dass eine Funktionenfolge $(f_n)_n$ **punktweise** gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ (oder $f : X \to \mathbb{C}$) **konvergiert**, falls $f_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$ und alle $x \in X$. Wir bezeichnen die Funktion f als den **punktweisen Grenzwert** (oder auch **Grenzfunktion** oder **Limes**) der Funktionenfolge $(f_n)_n$. In Prädikatenlogik ist punktweise Konvergenz durch

!

$$\forall x \in X\ \underbrace{\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}_{\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)}$$

gegeben.

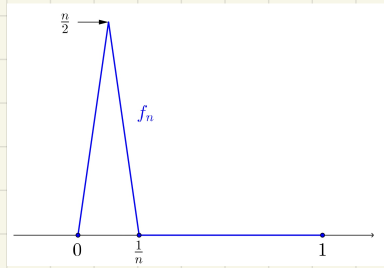
punktweise konv. ist eine eher schwache Eigenschaft



Beispiel 7.42 (Punktweise konvergent)**.** *Sei $X = [0,1]$ und $f_n : x \in [0,1] \to x^n \in \mathbb{R}$. Dann konvergieren die stetigen Funktionen f_n punktweise gegen die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch*

$$f(x) = \mathbb{1}_{\{1\}}(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

für $x \in [0,1]$, die nicht mehr stetig ist.



Beispiel 7.43 (Punktweise konvergent)**.** *Sei wiederum $X = [0,1]$ und definiere $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch*

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{für } x \in \left[0, \frac{1}{2n}\right] \\ n^2\left(\frac{1}{n} - x\right) & \text{für } x \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{für } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

für $x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist f_n stetig (und somit auch Riemann-integrierbar) und konvergiert punktweise gegen die stetige Funktion $f : x \in [0,1] \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Es gilt jedoch für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \neq 0 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Also ist der Grenzwert der Integrale nicht gleich dem Integral der Limesfunktion, obwohl alle Funktionen stetig sind und die Limesfunktion stetig ist.

Beispiel 7.44 (Punktweise konvergent)**.** *Sei wieder $X = [0,1]$ und $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_1, q_2, \ldots\}$ eine Abzählung. Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die charakteristische Funktion*

$$f_n = \mathbb{1}_{\{q_1,\ldots,q_n\}}$$

der ersten n rationalen Zahlen $\{q_1, \ldots, q_n\}$ in $[0,1]$ Riemann-integrierbar mit $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Die Limesfunktion der Folge $(f_n)_n$ ist aber die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$, die nach Beispiel 4.17 nicht Riemann-integrierbar ist.

Definition 7.45 (Gleichmässige Konvergenz)**.** Sei $(f_n)_n$ eine komplexwertige Funktionenfolge auf einer Menge X und f eine weitere komplexwertige Funktion auf X. Wir sagen, f_n **strebt gleichmässig** gegen f für $n \to \infty$, oder dass f der **gleichmässige Grenzwert** der Funktionenfolge $(f_n)_n$ ist, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ und alle $x \in X$ die Abschätzung

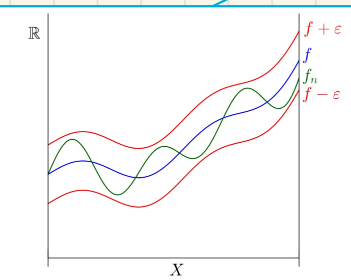
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

gilt. In Prädikatenlogik ist gleichmässige Konvergenz durch

!

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : \underbrace{\forall x \in X : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}_{\|f_n - f\|_\infty < \infty}$$

gegeben.



Figur 7.3: Die Funktionenfolge f_n konvergiert also gleichmässig gegen f, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Graphen von f_n für alle hinreichend grossen n im „ε-Schlauch" rund um f (also in dem Bereich zwischen den Graphen von $f - \varepsilon$ und $f + \varepsilon$ liegen.

Satz 7.48 (Gleichmässige Konvergenz und Stetigkeit)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f_n : D \to \mathbb{C}$ eine Funktionenfolge stetiger Funktionen. Falls $(f_n)_n$ gleichmässig gegen $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert, dann ist f ebenso stetig.*

Bew: Sei $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

für alle $x \in D$: $\quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$

Zudem existiert ein $\delta > 0$, so dass

für alle $x \in D$: $\quad |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon.$

Daraus folgt $\quad |f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$

$\quad < 3\varepsilon.$ $\square$

Satz 7.49 (Gleichmässige Konvergenz und Riemann-Integrierbarkeit)**.** *Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge Riemann-integrierbarer Funktionen. Falls $(f_n)_n$ gleichmässig gegen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert, dann ist f Riemann-integrierbar und*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, \mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}x = \int_a^b f \, \mathrm{d}x. \tag{7.4}$$

Bew: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein N, so dass

$\forall n \geq N: \quad f_n - \varepsilon \leq f \leq f_n + \varepsilon.$

Zudem existieren TF u, o mit $u \leq f_n \leq o$ und $\int (o - u) dx < \varepsilon$.

Damit gilt $\quad u' = u - \varepsilon \leq f_n - \varepsilon < f \leq f_n + \varepsilon \leq o + \varepsilon = o'$

und $\quad \int_a^b (o' - u') \, dx = \int_a^b (o - u - 2\varepsilon) dx < \varepsilon + 2\varepsilon(b - a) = \varepsilon(2b - 2a + 1).$

Damit ist f R-intbar.

Zudem gilt $\quad \left| \int_a^b f_n dx - \int_a^b f dx \right| = \left| \int_a^b (f_n - f) dx \right| < \left| \int_a^b \varepsilon \, dx \right| = \varepsilon(b - a).$

Daraus folgt $\quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dx = \int_a^b f dx.$ $\square$

Definition 7.54 (Potenzreihe)**.** Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $a_n \in \mathbb{C}$. Dann ist der formale Ausdruck

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{7.5}$$

eine **Potenzreihe** in der Variable z.

Definition 7.55. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Wir definieren den **Konvergenzradius** durch

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

wobei wir $\frac{1}{+\infty} = 0$ setzen und hier (aber auch nur hier) die Vereinbarung $\frac{1}{0} = +\infty$ treffen.

Wurzelkriterium

Satz 7.56 (Über den Konvergenzradius)**.** *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe und R ihr Konvergenzradius. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$ absolut und divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$. Weiters konvergiert die Funktionenfolge $\sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ gleichmässig gegen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ auf jeder Kreisscheibe der Form $B_S(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < S\}$ für jedes $S \in (0, R)$. Insbesondere definiert die Potenzreihe die stetige Abbildung*

$$z \in B_R(0) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}.$$

Bew: Wir benutzen das Wurzelkriterium und berechnen also für $|z| < R$.

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\, |z| = |z| \underbrace{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}_{\frac{1}{R}} = |z| \frac{1}{R} < 1.$$

Daher ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ für $z \in B_R(0)$ abs. konv. Für $|z| > R$ folgt analog divergenz.

Sei nun $S \in (0, R)$, dann folgt aus obigem

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| S^k < \infty.$$

Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=N}^{\infty} |a_k| S^k < \varepsilon$

Für alle $z \in B_S(0)$ gilt damit

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k z^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| |z|^k$$
$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| S^k$$
$$\leq \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| S^k < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$. Damit konv. die stetige Funktionenfolge $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ auf $B_S(0)$ glm gegen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, womit $z \in B_S(0) \longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ auch stetig ist.

Insbesonde folgt damit Stetigkeit von $z \in B_R(0) \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, da es zu jedem $z \in B_R(0)$ ein $S < R$ mit $z \in B_S(0)$ gibt. $\square$

Lemma 7.60 (Konvergenzradius via Quotientenkriterium)**.** *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Konvergenzradius R ist gegeben durch*

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Proposition 7.62 (Summen und Produkte)**.** *Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ zwei Potenzreihen mit Konvergenzradius R_a respektive R_b. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \min\{R_a, R_b\}$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$$
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right) z^n.$$

Insbesondere ist der Konvergenzradius der Potenzreihen auf der rechten Seite mindestens $\min\{R_a, R_b\}$.

Satz 7.65 (Abelscher Grenzwertsatz)**.** *Unter obigen Annahmen ist auch $\bar{f}$ stetig. Das heisst,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \bar{f}(R) = \lim_{x \nearrow R} \bar{f}(x) = \lim_{x \nearrow R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Eine analoge Aussage gilt, falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ konvergiert.

Wir haben in Abschnitt 6.3 die reelle Exponentiabbildung gesehen und ihre wichtigsten Eigenschaften gezeigt. Insbesondere haben wir verifiziert, dass

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k\prod_{\ell=0}^{k-1}\left(1-\frac{\ell}{n}\right).$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir zeigen nun, dass wir die Exponentialabbildung alternativ durch die Potenzreihe

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k \tag{7.7}$$

mit unendlichem Konvergenzradius definieren können und dadurch auf die gesamte komplexe Ebene fortsetzen können.

Satz 7.68 (Komplexe Exponentialabbildung). *Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir*

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k,$$

womit eine stetige Erweiterung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der reellen Exponentialabbildung definiert wird. Des Weiteren gilt für alle $z, w \in \mathbb{C}$ die Additionsformel

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w) \tag{7.9}$$

und die Formel

$$|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z)) \tag{7.10}$$

für den Absolutbetrag. Insbesondere gilt $|\exp(\mathrm{i}y)| = 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

!

$\forall n \in \mathbb{N}$: $x^n = o(\exp(x))$ für $x \longrightarrow \infty$.
$\exp(x) = o(|x|^{-n})$ für $x \longrightarrow -\infty$.

Bew: $0 \leq \frac{x^n}{\exp(x)} \leq \frac{x^n}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0.$

$\frac{\exp(x)}{|x|^{-n}} = \frac{|-x|^n}{\exp(-x)} \xrightarrow{x\to-\infty} 0.$ $\square$

$\log_a(y) = \frac{\log(y)}{\log(a)}$

Bew: $x = \log_a(y) \iff a^x = y \quad \| \log(\cdot)$
$x \cdot \log(a) = \log(y)$
$x = \frac{\log(y)}{\log(a)} = \log_a(y).$ $\square$

Bew: Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\exp(z)\exp(w) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}w^k\right)\\ &\overset{\text{Cauchy-Produkt}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}z^k\frac{1}{(n-k)!}w^{n-k}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k w^{n-k}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+w)^n = \exp(z+w). \quad \square\end{aligned}$$

Wir definieren die **Sinusfunktion** bei $z \in \mathbb{C}$ durch

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} \tag{7.11}$$

und die **Kosinusfunktion** bei $z \in \mathbb{C}$ durch

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}. \tag{7.12}$$

!

Wir sagen, dass eine Funktion f auf $\mathbb{C}$ **gerade** ist, wenn $f(-z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und **ungerade** ist, wenn $f(-z) = -f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. (Diese Begriffe werden analog für Funktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ oder Intervallen der Form $[-a, a]$ für $a > 0$ verwendet.)

Satz 7.72 (Sinus- und Kosinusfunktionen). *Die Potenzreihe (7.11) definiert die ungerade stetige Sinusfunktion $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und die Potenzreihe (7.12) definiert die gerade stetige Kosinusfunktion $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Die Einschränkungen dieser Funktionen auf $\mathbb{R}$ sind reellwertig und werden ebenso also Sinusfunktion und Kosinusfunktion bezeichnet. Des Weiteren bestehen für alle $z \in \mathbb{C}$ die Beziehungen*

$$\exp(\mathrm{i}z) = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z)$$
$$\sin(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$$
$$\cos(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

zu der Exponentialfunktion und es gelten die trigonometrischen Additionsformeln

$$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w) \tag{7.13}$$
$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) \tag{7.14}$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

!

Bew: $\exp(iz) = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \ldots$

Umordnen erlaubt, da abs. konv.

$$= \underbrace{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots}_{\cos z} + i\underbrace{\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right)}_{\sin z}$$
$$= \cos z + i \sin z.$$

cos gerade
sin ungerade

$$e^{iz} + e^{-iz} = \cos z + \cancel{i\sin z} + \cos z - \cancel{i\sin z} = 2\cos z.$$
$$e^{iz} - e^{-iz} = \cancel{\cos z} + i\sin z - \cancel{\cos z} + i\sin z = 2i\sin z. \quad \square$$

Wir definieren die **Tangensfunktion** tan durch

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\cos(z) \neq 0$, was nach Übung 7.76 gerade alle $z \in \mathbb{C} \setminus (\pi\mathbb{Z} + \frac{\pi}{2})$ sind. Analog ist die **Cotangensfunktion** cot durch

$$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\sin(z) \neq 0$ (oder äquivalent alle $z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$ nach Übung 7.76) definiert.

Satz 7.85 (Integration von Potenzreihen). *Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und Konvergenzradius R. Dann definiert $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}$ eine Potenzreihe mit demselben Konvergenzradius R und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

für alle $a, b \in (-R, R)$.

Bew: Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}z^{n+1} < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}z^n < \infty.$$

Also gilt für den Konv. Radius

$$R' = \left(\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|c_n|}{n+1}}\right)^{-1} = \left(\limsup_{n\to\infty}\overbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}}^{\to 1}\sqrt[n]{|c_n|}\right)^{-1}$$
$$= \left(\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}\right)^{-1} = R.$$

Seien nun $a < b$ in $(-R, R)$ und $f_N = \sum_{n=0}^{N} c_n z^n$ für $N \in \mathbb{N}$.

Dann konv. $(f_N)_N$ glm. gegen f (früheres Korollar).

Daraus folgt $\int_a^b f_N\,dz = \sum_{n=0}^{N} c_n \int_a^b z^n\,dz = \sum_{n=0}^{N}\frac{c_n}{n+1}b^{n+1} - \sum_{n=0}^{N}\frac{c_n}{n+1}a^{n+1}$

und $\lim_{N\to\infty}\int_a^b f_N\,dz = \int_a^b \lim_{N\to\infty} f_N\,dz = \int_a^b f\,dz = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}b^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}a^{n+1}$

$= F(b) - F(a).$ $\square$

In Analogie zu den Winkelfunktionen sind manchmal auch folgende Funktionen, die in engem Zusammenhang mit der Hyperbel $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$ stehen, nützlich. Wir definieren den **Sinus Hyperbolicus** durch

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}z^{2k+1}$$

!

für alle $z \in \mathbb{C}$, den **Kosinus Hyperbolicus** durch

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}z^{2k}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ und den **Tangens Hyperbolicus** durch

$$\tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

Merke: "Nicht alternierende Version von sin/cos."

Die Funktionen sinh und tanh sind ungerade und cosh ist gerade. Es gelten die Additionsformeln

$$\sinh(z+w) = \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w),$$
$$\cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$ und weiters

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1,$$
$$\cosh(z) + \sinh(z) = e^z$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

8. Differentialrechnung

Definition 8.1 (Differenzierbarkeit)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$ ein Häufungspunkt von D. Wir sagen, dass f bei a **differenzierbar** ist, falls der Grenzwert

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{8.1}$$

existiert. In diesem Fall nennen wir $f'(a)$ die **Ableitung** von f bei a. Falls f bei jedem Häufungspunkt von D in D differenzierbar ist, dann sagen wir auch, dass f (auf D) **differenzierbar** ist und nennen die Funktion $a \mapsto f'(a)$ definiert auf den Häufungspunkten von D in D die **Ableitung** von f.

Falls $a \in D$ ein rechtsseitiger Häufungspunkt von D ist, dann ist f bei a **rechtsseitig differenzierbar**, wenn die **rechtsseitige Ableitung**

$$f'_+(a) = \lim_{x \searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existiert. **Linksseitige Differenzierbarkeit** und die **linksseitige Ableitung** $f'_-(a)$ werden analog über die Bewegung $x \nearrow a$ definiert.

Wir nennen $\triangle x = x - a = h$ im Zusammenhang mit der Definition in (8.1) auch das **Inkrement des Arguments** oder der **unabhängigen Variablen** x, $\triangle f = f(x) - f(a) = f(a+h) - f(a)$ das **Inkrement der Funktion** und $\frac{\triangle f}{\triangle x}$ den **Differenzenquotienten**. Die Ableitung von f bei a, welche in dieser Formulierung der Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{\triangle f}{\triangle x}$ für $\triangle x \to 0$ ist, schreibt man auch als $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) = f'(a)$ und nennt dies den **Differentialquotienten** (in der Leibniz-Notation). Weiters nennt man $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ auch die **Ableitung nach** x, was vor allem dann nützlich ist, wenn f auch von weiteren Parametern abhängen darf.

Eine weitere Schreibweise der Definition in (8.1) ist in der Landau-Notation (siehe Abschnitt 6.6)

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + o(1) \qquad \Longleftrightarrow \quad \overbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)}^{\xrightarrow{x \to a} 0} = o(1) \text{ für } x \to a$$

für $x \to a$ oder äquivalenterweise

$$f(x) = \overbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}^{\text{Tangente}} + o(x-a) \tag{8.2}$$

für $x \to a$. Hierbei wird die Funktion $x \mapsto f'(a)(x-a)$ das **Differential** von f bei a genannt und die Gerade $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$ die **affine** oder **lineare Approximation** von f bei a oder die **Tangente** von f bei a, siehe auch Figur 8.1. Wir erinnern daran, dass wir in (8.2) $o(x-a)$ als Platzhalter einer Funktion (welcher?) interpretieren, die für $x \to a$ schneller abfällt als $x - a$. Insbesondere ist wegen (8.2)

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) + \lim_{x \to a} \big(f'(a)(x-a) + o(x-a)\big) = f(a)$$

und f ist bei a stetig, wenn f bei a differenzierbar ist.

<u>Bew:</u> f bei a diffbar $\Longleftrightarrow f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a) + 0 + \lim_{x \to a} \underbrace{\frac{o(x-a)}{x-a}}_{\substack{\to 0 \\ \text{per Def.}}} \underbrace{x-a}_{\to 0} = f(a). \qquad \square$$

<u>Bsp:</u> Sei $f(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} h^{-1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} h^k - a^n$$
$$= \lim_{h \to 0} h^{-1} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} h^k = \lim_{h \to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} h^{k-1}$$

$h=0$ im stetigen Polynom einsetzen

$$= n a^{n-1}$$

Proposition 8.5 (Summen und Produkte differenzierbarer Funktionen)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $a \in D$ ein Häufungspunkt von D. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ bei a differenzierbar. Dann sind $f + g$ und $f \cdot g$ bei a differenzierbar und es gilt*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

<u>Bew:</u>
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x - a}$$
$$= \lim_{x \to a} \left(g(x) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right)$$
$$= g(a)f'(a) + f(a)g'(a). \qquad \square$$

Satz 8.8 (Kettenregel)**.** *Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen und sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt. Sei $f : D \to E$ eine bei x_0 differenzierbare Funktion, so dass $y_0 = f(x_0)$ ein Häufungspunkt von E ist, und sei $g : E \to \mathbb{R}$ eine bei y_0 differenzierbare Funktion. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0).$$

<u>Bew:</u> Nach Def. gilt

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a) \qquad \text{für } x \to a$$

oder auch $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon_f(x)(x-a)$ (1)

für
$$\varepsilon_f(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a) + f'(a)(x-a)}{x - a} & \text{für } x \neq a \\ 0 & \text{für } x = a \end{cases}$$

womit $\lim_{x \to a} \varepsilon_f(x) = 0$ und damit ist ε_f bei a stetig.

Analoges folgen wir für

$$g(y) = g(f(a)) + g'(f(a))(y - f(a)) + \varepsilon_g(y)(y - f(a)). \quad (2)$$

Nun setzen wir (1) in (2) ein und erhalten

$$g(f(x)) = g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + \varepsilon_g(f(x))(f(x) - f(a))$$
$$= g(f(a)) + g'(f(a))(f'(a)(x-a) + \varepsilon_f(x)(x-a))$$
$$+ \varepsilon_g(f(x))(f'(a)(x-a) + \varepsilon_f(x)(x-a))$$
$$= g(f(a)) + g'(f(a))f'(a)(x-a)$$
$$+ \underbrace{[g'(f(a))\varepsilon_f(x) + \varepsilon_g(f(x))f'(a) + \varepsilon_f(x)](x-a)}_{\text{Fehlerterm}}.$$

Daraus folgt

$$\lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \lim_{x \to a} \Big(g'(f(a))f'(a)$$
$$+ g'(f(a)) \underbrace{\varepsilon_f(x)}_{\to 0} + \underbrace{\varepsilon_g(f(x))}_{\substack{\varepsilon_f \,\&\, f \text{ stetig bei } a \\ = \varepsilon_g(f(a)) = 0}} f'(a) + \underbrace{\varepsilon_f(x)}_{\to 0} \Big)$$
$$= g'(f(a))f'(a). \qquad \square$$

Korollar 8.11 (Quotientenregel)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $a \in D$ ein Häufungspunkt und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ bei a differenzierbar. Falls $g(a) \neq 0$ ist, dann ist auch $\frac{f}{g}$ bei a differenzierbar und es gilt*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

<u>Bew:</u>
$$(f \cdot g^{-1})' = f'g^{-1} - f g^{-2} \cdot g'$$
$$= f'g g^{-2} - f g' g^{-2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}. \qquad \square$$

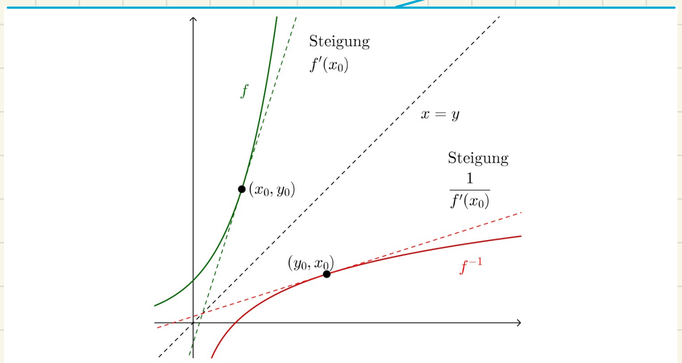
Satz 8.14 (Differenzierbarkeit der inversen Funktion)**.** *Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen und sei $f : D \to E$ eine stetige, bijektive Abbildung, deren inverse Abbildung $f^{-1} : E \to D$ ebenfalls stetig ist. Falls f in dem Häufungspunkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist und $f'(x_0) \neq 0$ gilt, dann ist f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es gilt*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

<u>Bew:</u> Sei $y_n \in E \setminus \{y_0\}$ eine Folge mit $y_n \xrightarrow{n \to \infty} y_0$ und $x_n = f^{-1}(y_n)$ eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$. Dann gilt $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x_0$, da f^{-1} nach dem Umkehrsatz stetig ist.
Zudem folgt aus der Charakterisierung der Konvergenz einer Funktion mittels folgen, dass

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(f(x_0))}{y_n - f(x_0)}$$
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{x_n - x_0}{y_n - f(x_0)}$$
$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{y_n - f(x_0)}{x_n - x_0} \right)^{-1}$$
$$= (f'(x_0))^{-1}. \qquad \square$$

Grenzwerte mittels Folgen
Umkehrsatz



Figur 8.2: Eine intuitive Darstellung von Satz 8.14. Spiegelt man den Graphen von f und die Tangente beim Punkt (x_0, y_0) um die Gerade $x = y$ in $\mathbb{R}^2$, so erhält man den Graphen von f^{-1} und, das ist die Behauptung, die Tangente bei (y_0, x_0). Eine kurze Rechnung zeigt, dass die Spiegelung einer Gerade mit Steigung m um $x = y$ Steigung $\frac{1}{m}$ hat.

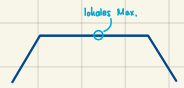
Proposition 8.17 (Notwendige Bedingung für Extremum). *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und f eine reellwertige Funktion auf D. Angenommen f ist in einem lokalen Extremum $x_0 \in D$ differenzierbar und x_0 ist sowohl ein rechtsseitiger als auch ein linksseitiger Häufungspunkt von D. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.*

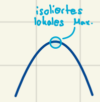
Bew: Sei f bei x_0 diffbar mit lokalem Max. bei x_0.

Dann gilt $f_+'(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{\overbrace{f(x) - f(a)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - a}_{>0}} \leq 0$

und analog $f_-'(x_0) \geq 0$.

Da f bei x_0 diffbar ist, folgt $f'(x_0) = f_-'(x_0) = f_+'(x_0) = 0$





Definition 8.16 (Lokale Extremwerte). Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $x_0 \in D$. Wir sagen, dass eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 ein **lokales Maximum** hat, falls es eine Umgebung U von x_0 in D gibt, auf der f durch $f(x_0)$ beschränkt ist. Genauer formuliert heisst dies, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt $f(x) \leq f(x_0)$. Falls es sogar ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(x) < f(x_0)$ für alle $x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ gilt, dann hat f in x_0 ein **isoliertes lokales Maximum**. Der Wert $f(x_0)$ wird auch ein **lokaler Maximalwert** von f genannt. Ein **lokales Minimum**, ein **isoliertes lokales Minimum** und ein **lokaler Minimalwert** von f sind analog definiert.

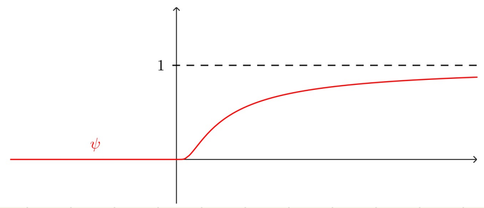
Des Weiteren nennen wir x_0 ein **lokales Extremum** von f und $f(x_0)$ einen **lokalen Extremwert** von f, falls f ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum in x_0 hat.

Vollständigkeit
↓
Sup
↓
Beschränktheit stetiger Flt.
— Existenz Sup
— Stetigkeit von Verknüpfungen
↓
Extremwertsatz
Notwendige Bedingung für Extremum

Beispiel 8.23 (Glattes Abklingen). *Die Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ist glatt und demnach auch beliebig oft stetig differenzierbar, siehe das folgende Bild.



Induktiv kann man nun höhere Differenzierbarkeit und höhere Ableitungen definieren. Formal definieren wir also die Ableitungen

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f', \quad f^{(2)} = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = f'', \quad \ldots \quad , \quad f^{(n+1)} = \frac{\mathrm{d}^{(n+1)} f}{\mathrm{d}x^{n+1}} = (f^{(n)})'$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $f^{(n)}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (auf ganz D) existiert, heisst f ***n*-mal differenzierbar**. Falls die ***n*-te Ableitung** $f^{(n)}$ zusätzlich stetig ist, heisst f ***n*-mal stetig differenzierbar**.

Wir sagen, dass f **glatt** oder **beliebig oft differenzierbar** ist, falls f für jedes $n \in \mathbb{N}$ n-mal differenzierbar ist. Ist f glatt, so sind insbesondere alle Ableitungen von f stetig (f ist also beliebig oft stetig differenzierbar). Die Menge der glatten Funktionen auf D bezeichnen wir mit $C^\infty(D)$.

Satz 8.28 (Rolle). *Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar ist. Falls $f(a) = f(b)$ gilt, so existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

!

Bew: Nach dem Extremwertsatz existieren x_{max}, x_{min} mit

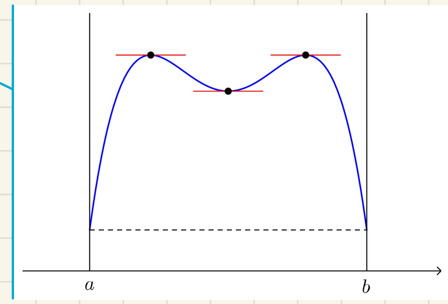
$f(x_{max}) = \max(f[a,b])$, $f(x_{min}) = \min(f[a,b])$.

Falls $x_{max} \in (a, b)$ (rechts- und linksseitiger HP von D),

so folgt aus der notwendigen Bedingung für Extrema, dass

$f'(x_{max}) = 0$.

Falls x_{max}, x_{min} Endpunkte sind, so muss f konst. sein und es gilt überall $f' = 0$. □



Theorem 8.29 (Mittelwertsatz). *Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar ist. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

!

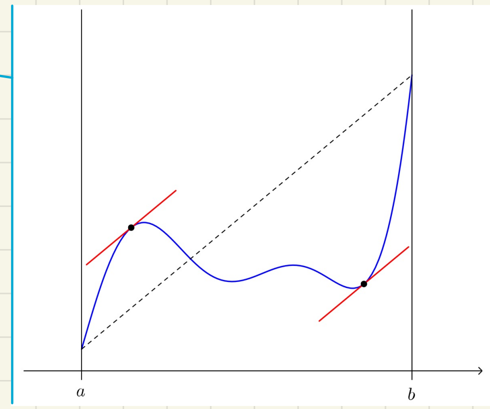
Bew: Sei $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Hilfsfkt. mit

$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.

Dann gilt $F(a) = F(b) = f(a)$ und nach dem Satz von Rolle existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $F'(\xi) = 0$, also

$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$

$\implies f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. □



Korollar 8.33 (Kriterium für Konstanz). *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit Endpunkten $a < b$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist f genau dann konstant, wenn f differenzierbar ist und $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$ gilt.*

Bew: "$\Leftarrow$": Agn. $f' = 0$. Seien $x_1 < x_2$ in I beliebig, dann existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit

$f(x_2) - f(x_1) = \overbrace{f'(\xi)}^{0}(x_2 - x_1) = 0$.

$\implies f(x_2) = f(x_1)$. □

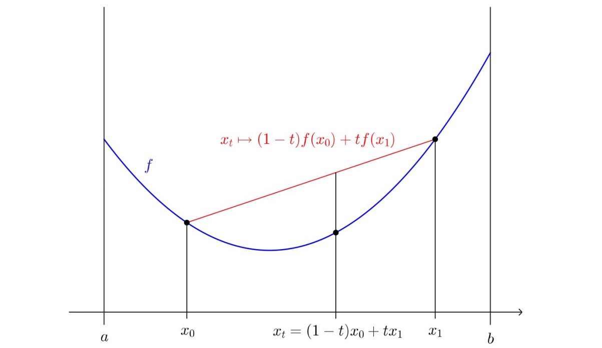
Korollar 8.35 (Kriterium für Monotonie). *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-leeres Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gilt*

$$(\forall x \in I : f'(x) \geq 0) \implies f \text{ ist monoton wachsend}$$
$$(\forall x \in I : f'(x) > 0) \implies f \text{ ist streng monoton wachsend}$$
$$(\forall x \in I : f'(x) \leq 0) \implies f \text{ ist monoton fallend}$$
$$(\forall x \in I : f'(x) < 0) \implies f \text{ ist streng monoton fallend.}$$

Korollar 8.37 (Hinreichende Kriterien für lokale Extrema). *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit Endpunkten $a < b$ und $x_0 \in I$ kein Endpunkt von I. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und zumindest auf $I \setminus \{x_0\}$ stetig differenzierbar.*

- *Angenommen der linke Endpunkt a liegt in I.*
  - *Falls $f'(a) > 0$ erfüllt ist, dann hat f in a ein isoliertes lokales Minimum.*
  - *Falls $f'(a) < 0$ erfüllt ist, dann hat f in a ein isoliertes lokales Maximum.*
- *Beim Punkt x_0 gelten folgende Kriterien.*
  - *Falls ein $\delta > 0$ existiert, so dass $f'(x) > 0$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ (oder $f'(x) < 0$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$), dann ist x_0 kein lokales Extremum von f.*
  - *Falls ein $\delta > 0$ existiert, so dass $f'(x) > 0$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ und $f'(x) < 0$ für alle $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, dann nimmt f in x_0 ein isoliertes lokales Maximum an.*
  - *Falls ein $\delta > 0$ existiert, so dass $f'(x) < 0$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ und $f'(x) > 0$ für alle $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, dann nimmt f in x_0 ein isoliertes lokales Minimum an.*
  - *Falls f auf ganz I zweimal stetig differenzierbar ist und $f'(x_0) = 0$ sowie $f''(x_0) < 0$ gilt, dann nimmt f in x_0 ein isoliertes lokales Maximum an.*
  - *Falls f auf ganz I zweimal stetig differenzierbar ist und $f'(x_0) = 0$ sowie $f''(x_0) > 0$ gilt, dann nimmt f in x_0 ein isoliertes lokales Minimum an.*

intuitiv Merken!



Figur 8.3: Anschaulich formuliert ist eine Funktion konvex x_0 , wenn ihr Graph jeweils unterhalb der Strecke zwischen zwei Punkten auf dem Graphen bleibt. Wie wir in Kürze sehen werden, kann man die konvexen Funktionen als solche sehen, deren Graphen aufwärts gekrümmt sind, wie ebenfalls in diesem Bild ersichtlich ist.

Definition 8.38 (Konvexität und Konkavität). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heisst f **konvex**, falls

$$f\big((1-t)x_0 + tx_1\big) \le (1-t)f(x_0) + tf(x_1) \tag{8.6}$$

für alle $x_0, x_1 \in I$ und für alle $t \in [0,1]$. Wir sagen, dass f **streng konvex** ist, falls in (8.6) eine strikte Ungleichung gilt, wenn immer $x_0 \neq x_1$ und $t \in (0,1)$ (in diesem Falls ist $(1-t)x_0 + tx_1$ echt zwischen x_0 und x_1). Eine Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ heisst (**streng**) **konkav**, wenn $f = -g$ (streng) konvex ist.

Wichtige Charakterisierung für Konvexität

Lemma 8.39 (Konvexität via Steigung von Sekanten). *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion f ist genau dann konvex, wenn für alle $x, x_0, x_1 \in I$ gilt*

$$x_0 < x < x_1 \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Des Weiteren ist f genau dann streng konvex, wenn

$$x_0 < x < x_1 \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

gilt.

In Worten ausgedrückt besagt das Lemma insbesondere, dass für eine konvexe Funktion die Steigung der Sekanten zwischen Punkten $x_0 < x$ kleiner (gleich) ist als die Steigung der Sekanten zwischen $x < x_1$. Veranschaulichen Sie sich dies an Figur 8.3.

Intuitiv merken!

Bew: Seien $x_0 < x_1$ in I und $x = (1-t)x_0 + tx_1$ für $t \in (0,1)$.

Dann gilt
$$\boxed{\begin{aligned} x - x_0 &= t(x_1 - x_0) \\ x_1 - x &= (1-t)(x_1 - x_0). \end{aligned}}$$

Daraus folgt
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \qquad \| \cdot t(1-t)(x_1 - x_0) \ge 0$$

$$\begin{aligned}
&\iff (1-t)(f(x) - f(x_0)) \le t f(x_1) - t f(x) \qquad \| + t f(x) \\
&\iff f(x) - f(x_0) + t f(x_0) \le t f(x_1) \\
&\iff f(x) \le (1-t) f(x_0) + t f(x_1) \\
&\iff \underbrace{f((1-t)x_0 + tx_1) \le (1-t) f(x_0) + t f(x_1).}_{\text{Konvexität}} \qquad \square
\end{aligned}$$

MW-Satz

Proposition 8.40 (Kriterium für Konvexität). *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit Endpunkten $a < b$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist f genau dann (streng) konvex, wenn f' (streng) monoton wachsend ist.*

Korollar 8.42 (Konvexität und die zweite Ableitung). *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit Endpunkten $a < b$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Falls $f''(x) \ge 0$ für alle $x \in I$, dann ist f konvex. Falls $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$, dann ist f streng konvex.*

Lemma 8.44 (Jensensche Ungleichung). *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Seien $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ und $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0,1]$ mit $\sum_{k=1}^n t_k = 1$. Dann gilt*

$$f\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^n t_k f(x_k). \tag{8.7}$$

Bsp: Sei $f(x) = -\log x$ konvex. Dann gilt für $x_1, \ldots, x_n > 0$ mit $t_k = \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned}
f\left(\tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right) &\le \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k) \\
-\log\left(\tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right) &\le -\tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n \log(x_k) \qquad \| \cdot (-1) \\
\log\left(\tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right) &\ge \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n \log(x_k) \qquad \| \exp(\cdot) \\
\tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k &\ge \exp\left(\tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n \log(x_k)\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^n \log(x_k)\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}} \\
\tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k &\ge \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k}.
\end{aligned}$$

Dies beweist gerade die Ungl. zw. arithmetischem und geometrischem Mittel!

Rolle

Satz 8.48 (Erweiterter Mittelwertsatz)**.** *Seien f und g stetige Funktionen auf einem Intervall $[a, b]$ mit $a < b$, so dass f und g auf (a, b) differenzierbar sind. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit*

schreibe das

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a)). \tag{8.8}$$

Falls zusätzlich $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ gilt, dann gilt $g(a) \neq g(b)$ und

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

merke das

Bew: Sei $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Hilfsfkt. mit

$$F(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a)).$$

Dann gilt $F(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = F(b)$.

Nach dem Satz von Rolle existiert also ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$F'(\xi) = f'(\xi)(g(b) - g(a)) - g'(\xi)(f(b) - f(a)) = 0. \quad \square$$

Satz 8.49 (Regel von de l'Hôpital)**.** *Seien $a < b$ in $\overline{\mathbb{R}}$ und seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen mit $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Angenommen der Grenzwert $\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert in $\overline{\mathbb{R}}$ und eine der beiden folgenden Bedingungen ist erfüllt:*

- *(„$\frac{0}{0}$") $\lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} g(x) = 0$*
- *(„$\frac{\infty}{\infty}$") $\lim_{x \searrow a} g(x) = +\infty$ (oder $\lim_{x \searrow a} g(x) = -\infty$).*

Dann existiert auch der Grenzwert $\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Analoge Aussagen gelten für die Bewegungen $x \nearrow b$ oder $x \to x_0 \in (a, b)$. Im letzten Fall erlauben wir $g(x_0) = 0$ oder auch $g'(x_0) = 0$, solange $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$.

Bew: Setze f, g auf $[a,b)$ stetig fort mit $f(a) = g(a) = 0$.

Sei $L = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ und U_ε eine ε-Umgebung von L für $\varepsilon > 0$.

Dann existiert wegen dem Grenzwert ein $\delta > 0$ mit

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \in U_\varepsilon \quad \text{für alle } x \in (a, a+\delta).$$

Nach dem allg. MW-Satz ein $\xi \in (a, x)$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - \overbrace{f(a)}^{0}}{g(x) - \underbrace{g(a)}_{0}} = \frac{f(x)}{g(x)} \in U_\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war folgt $\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$. $\square$

MW-Satz

Korollar

Lemma 8.59 (Integrationskonstante)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $F, F_1 : I \to \mathbb{R}$ Stammfunktionen von f. Dann gibt es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit $F_1 = F + C$. In anderen Worten, alle Lösungen von $y' = f$ sind gegeben durch die Formel $y = F(x) + C$, wenn wir die Konstante $C \in \mathbb{R}$ variieren.*

Lemma 8.60 (Homogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Die Lösungen $y : I \to \mathbb{R}$ der homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung $y' + f(x)y = 0$ sind genau die Vielfachen der Funktion $x \in I \mapsto \exp(-F(x))$.*

Bew: "$\Leftarrow$": Sei $y(x) = A\exp(-F(x))$. Dann gilt

$$y' + f(x)y = A\exp(-F(x))(-f(x)) + f(x) \cdot A\exp(-F(x)) = 0.$$

"$\Rightarrow$": Sei $y(x)$ eine Lösung. Wir berechnen

$$(y(x)\exp(F(x)))' = \underbrace{y'}_{= -f(x)y}\exp(F(x)) + y\exp(F(x))f(x) = 0.$$

Also folgt aus dem MW-Satz, dass

$$y(x)\exp(F(x)) = A \iff y(x) = A\exp(-F(x))$$

für eine Konstante $A \in \mathbb{R}$. $\square$

Der nächst einfache Typ einer Differentialgleichung besteht aus den **linearen Differentialgleichungen erster Ordnung**, welche von der Form

$$y' + f(x)y = g(x) \tag{8.13}$$

für zwei gegebene Funktionen f, g besteht. In der Gleichung $y' + f(x)y = g(x)$ wird die Funktion g auch die **Störfunktion** genannt. Falls die Störfunktion Null ist, nennen wir (8.13) **homogen** und sonst **inhomogen**.

9. Die Ableitung und das Riemann-Integral

Definition 9.1. Sei $[a,b]$ ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$ und sei $f \in R([a,b])$ eine auf $[a,b]$ Riemann-integrierbare Funktion. Die Funktion

$$x \in [a,b] \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

nennt sich das **Integral mit veränderlicher oberer Grenze** oder **das partikuläre Integral** von f.

Theorem 9.2 (Ableitung des Integrals)**.** *Sei $[a,b]$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten $a<b$ und sei $f \in R([a,b])$ eine auf $[a,b]$ Riemann-integrierbare Funktion. Falls f bei $x_0 \in [a,b]$ stetig ist, so ist $F : x \in [a,b] \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ bei x_0 differenzierbar und $F'(x_0) = f(x_0)$.*

!

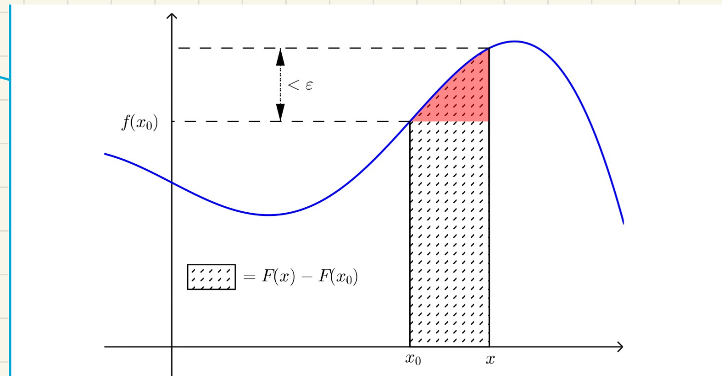
Bew: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\forall t \in [a,b]: \ |t - x_0| < \delta \implies |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Sei nun $x \in [a,b]$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| &\overset{\text{Def. einsetzen}}{=} \left|\frac{1}{x-x_0}\left(\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right) - f(x_0)\right| \\
&= \left|\frac{1}{x-x_0}\left(\int_{x_0}^x f(t)\,dt - (x-x_0)f(x_0)\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{x-x_0}\left(\int_{x_0}^x f(t)\,dt - \int_{x_0}^x f(x_0)\,dt\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\,dt\right| \\
&= \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\,dt\right| \\
&\leq \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x \overbrace{|f(t) - f(x_0)|}^{<\varepsilon}\,dt\right| \\
&< \frac{1}{|x-x_0|}\,|(x-x_0)\varepsilon| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Daraus folgt $F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$. $\square$



Figur 9.1: Illustration zum Beweis von Theorem 9.2. Der Wert $F(x) - F(x_0)$ lässt sich schreiben als $f(x_0)(x-x_0)$ plus die Fläche in Rot, die kleiner ist als $\varepsilon(x-x_0)$. Somit ist $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$, bis auf einen Fehler kleiner als ε, durch $f(x_0)$ gegeben.

Korollar 9.3 (Ableitung des Integrals)**.** *Sei $[a,b]$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten $a<b$ und sei $f \in C([a,b])$ stetig. Dann ist $x \in [a,b] \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ eine Stammfunktion von f und jede Stammfunktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ von f hat die Form*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C \tag{9.1}$$

für alle $x \in [a,b]$ und eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

Korollar 9.4 (Berechnung des Integrals)**.** *Sei $[a,b]$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten $a<b$ und sei $f \in C([a,b])$ stetig. Falls $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist, dann gilt*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Wir werden auch öfter die Abkürzung $\left[F(x)\right]_a^b = \left[F(x)\right]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$ verwenden.

Korollar 9.5 (Integral der Ableitung)**.** *Sei $[a,b]$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten $a<b$ und sei $F \in C^1([a,b])$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t$$

für alle $x \in [a,b]$.

Korollar 9.11 (Differentiation von Potenzreihen)**.** *Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist $f : (-R,R) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

für alle $x \in (-R,R)$, wobei die Potenzreihe rechts ebenfalls Konvergenzradius R hat.

Sei also $f : (a,b) \to \mathbb{C}$ eine n-mal differenzierbare Funktion auf einem offenen, nicht-leeren (möglicherweise unbeschränkten) Intervall $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$. Die **$n$-te Taylor-Approximation** von f um einen Punkt $x_0 \in (a,b)$ ist das Polynom

$$P^f_{x_0,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

!

Die Koeffizienten wurden dabei so gewählt, dass $P^f_{x_0,n}(x_0) = f(x_0)$ und allgemeiner

$$(P^f_{x_0,n})^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$$

für $k \in \{0, \ldots, n\}$ gilt (wieso?). Die vielleicht naive Hoffnung ist hierbei, dass die Taylor-Approximation, wie der Name sagt, die Funktion f approximiert. Falls f glatt ist, dann ist die **Taylorreihe** von f um $x_0 \in (a,b)$ definiert als die Potenzreihe

$$T^f_{x_0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Theorem 9.46 (Taylor-Approximation)**.** *Sei $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes, nicht-leeres Intervall und sei $f : (a,b) \to \mathbb{C}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Sei $x_0 \in (a,b)$. Dann gilt für alle $x \in (a,b)$*

$$f(x) = P^f_{x_0,n}(x) + R^f_{x_0,n}(x),$$

*wobei $P^f_{x_0,n}$ die n-te Taylor-Approximation ist und wir den Fehlerterm $R^f_{x_0,n}$ durch das sogenannte **Integral-Restglied***

$$x \in (a,b) \mapsto R^f_{x_0,n}(x) = \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t$$

darstellen können. Dies gilt auch für Funktionen auf $[x_0,b)$ und Punkte $x \in [x_0,b)$ (beziehungsweise $(a,x_0]$ und $x \in (a,x_0]$).

Bew: Induktion über n

$n=0$: Aus dem Fundamentalsatz der Diff.- und Integralrechnung folgt

$$P^f_{x_0,0}(x) + R^f_{x_0,0}(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)\,dt = f(x).$$

$n-1 \mapsto n$: Wir berechnen zuerst

$$\begin{aligned}
&\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \overbrace{\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt}^{R^f_{x_0,n}(x)} \\
&\overset{\text{partiell integrieren}}{=} \cancel{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n} + \cancel{\left[f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\right]_{t=x_0}^{t=x}} + \int_{x_0}^x f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt \\
&= R^f_{x_0,n-1}(x)
\end{aligned}$$

einsetzen

Daraus folgt nun mit der Ind. Voraussetzung

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R^f_{x_0,n-1}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R^f_{x_0,n}(x) \\
&= \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{P^f_{x_0,n}(x)} + R^f_{x_0,n}(x)
\end{aligned}$$

$\square$