Analysis II Zusammenfassung

Quelle: Einsiedler, Manfred, Peter Jossen, und Andreas Wieser. "Analysis I und II." (2017).

Eric Ceglie

10. Metrische Räume

Lemma 10.6 (Topologie)**.** *Sei X ein metrischer Raum. Dann gilt*

- *Der Durchschnitt endlich vieler offener Teilmengen von X ist offen.*
- *Die Vereinigung beliebig vieler offener Teilmengen von X ist offen.*
- *Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Teilmengen von X ist abgeschlossen.*
- *Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Teilmengen vom X ist abgeschlossen.*

! **Lemma 10.7** (Charakterisierung offener und abgeschlossener Mengen durch Konvergenz)**.** *Sei X ein metrischer Raum.*

- *Eine Teilmenge $O \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn für jede konvergente Folge in X mit Grenzwert in O fast alle Folgenglieder in O liegen.*
- *Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge $(x_n)_n$ in X mit $x_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auch der Grenzwert in A liegt.*

Bew: i) "$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{O} \subseteq X$ offen und $(x_n)_n$ Folge in X mit GW $x_0 \in \mathcal{O}$.

$\mathcal{O}$ offen $\Longrightarrow \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(x_0) \subseteq \mathcal{O}$

$\overset{(x_n)_n \text{ konv.}}{\Longrightarrow} \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: \quad x_n \in B_\varepsilon(x) \subseteq \mathcal{O}$.

"$\Leftarrow$": Kontraposition:

Sei $\mathcal{O} \subseteq X$ nicht offen, d.h. es ex. ein $x_0 \in \mathcal{O}$, s.d.

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad B_{1/n}(x_0) \not\subseteq \mathcal{O}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad B_{1/n}(x_0) \setminus \mathcal{O} \neq \emptyset$$

Wähle für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in B_{1/n} \setminus \mathcal{O}$.

Die Folge $(x_n)_n$ konv. gegen x_0 aber es gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad x_n \notin \mathcal{O}.$$

ii) "$\Rightarrow$": Sei $A \subseteq X$ abgs. und $(x_n)_n$ konv. Folge in X mit $\forall n \in \mathbb{N}: x_n \in A$.

$\Longrightarrow \mathcal{O} := X \setminus A$ offen $\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: x_n \notin \mathcal{O}$

$\overset{(i)}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n \to \infty} x_n \notin \mathcal{O}$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x \to \infty} x_n \in A$

"$\Leftarrow$": Kontraposition:

Agn. $A \subseteq X$ ist nicht abgs. Konstruiere eine Folge wie in (i) für $\underbrace{X \setminus A}_{\text{nicht offen}}$.

$\square$

Wichtige Übung 10.9. *Zeigen Sie, dass zwei äquivalente Normen auf einem Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ die gleiche Topologie und den gleichen Konvergenzbegriff induzieren.*

! **Lemma 10.11** (Relativ offene oder abgeschlossene Teilmengen)**.** *Sei X ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$ ein Teilraum. Eine Teilmenge von Y ist offen (bezüglich der induzierten Metrik) genau dann wenn sie die Form $O \cap Y$ hat, wobei $O \subseteq X$ eine offene Teilmenge in X ist. Ebenso ist eine Teilmenge von Y abgeschlossen genau dann wenn sie die Form $A \cap Y$ hat, wobei $A \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge ist.*

Bew "$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{O}_Y \subseteq Y$ offen in Y, d.h. $\forall y \in \mathcal{O}_Y\ \exists \varepsilon_y > 0: B^Y_{\varepsilon_y}(y) \subseteq \mathcal{O}_Y$.

Def. $\mathcal{O} := \bigcup_{y \in \mathcal{O}_Y} B^X_{\varepsilon_y}(y)$, dann ist $\mathcal{O}$ offen in X nzz: $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O} \cap Y$.

Für $y \in \mathcal{O}_Y$ gilt $y \in B^X_{\varepsilon_y}(y) \subseteq \mathcal{O}$.

Umgekehrt ex. für jedes $y \in \mathcal{O} \cap Y$ ein $y' \in \mathcal{O}_Y$ mit $y \in B^X_{\varepsilon_{y'}}(y')$.

Daraus folgt $y \in B^Y_{\varepsilon_{y'}}(y') \subseteq \mathcal{O}_Y$. Dies zeigt $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O} \cap Y$.

"$\Leftarrow$": Ist $\mathcal{O} \subseteq X$ offen, so ex. für alle $y \in \mathcal{O} \cap Y$ ein $\varepsilon > 0$ mit

$$B^X_\varepsilon(y) \subseteq \mathcal{O}.$$

Daraus folgt aber $B^Y_\varepsilon(y) = B^X_\varepsilon(y) \cap Y \subseteq \mathcal{O} \cap Y$,

womit $\mathcal{O} \cap Y$ offen ist.

$\square$

Lemma 10.13 (Supremum von abgeschlossenen und offenen Teilmengen in $\mathbb{R}$)**.** *Für eine abgeschlossene nicht-leere von oben beschränkte Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt $\sup A = \max A \in A$. Für eine offene nicht-leere von oben beschränkte Teilmenge $O \subseteq \mathbb{R}$ gilt $\sup O \notin O$. Dies gilt analog für von unten beschränkte Teilmengen und das Infimum.*

Definition 10.1 (Definition 5.10)**.** Ein **metrischer Raum** (X, d) ist eine Menge X gemeinsam mit einer Abbildung $\mathrm{d} : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die die **Metrik** auf X genannt wird und die folgenden drei Eigenschaften erfüllt:

- (Definitheit) Für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt $\mathrm{d}(x_1, x_2) = 0 \iff x_1 = x_2$.
- (Symmetrie) Für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt $\mathrm{d}(x_1, x_2) = \mathrm{d}(x_2, x_1)$.
- (Dreiecksungleichung) Für alle $x_1, x_2, x_3 \in X$ gilt $\mathrm{d}(x_1, x_3) \leq \mathrm{d}(x_1, x_2) + \mathrm{d}(x_2, x_3)$.

Definition 10.2. Eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) ist stetig, falls für alle $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\mathrm{d}_X(x, x_0) < \delta \implies \mathrm{d}_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

für alle $x \in X$.

Definition 10.3 (Offene und abgeschlossene Teilmengen)**.** Sei X ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $O \subseteq X$ heisst **offen** (in X), falls es zu jedem Punkt in O einen offenen Ball um diesen Punkt gibt, der in O liegt. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heisst **abgeschlossen** (in X), falls ihr Komplement $X \setminus A$ offen ist.

Definition 10.8 (Normäquivalenz)**.** Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) und seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ zwei Normen auf V. Wir nennen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ **äquivalent**, falls Konstanten $c, C > 0$ existieren mit

$$c\|v\| \leq \|v\|' \leq C\|v\|$$

für alle $v \in V$.

Definition 10.14 (Inneres, Rand und Abschluss)**.** Sei X ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x \in Y$ heisst **innerer Punkt von** Y, falls es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq Y$ gibt. Die Menge aller inneren Punkte

$$Y^\circ = \{x \in Y \mid \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq Y\}$$

wird das **Innere** von Y genannt. Ein Punkt $x \in X$ ist ein **Randpunkt von** Y, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ beide Durchschnitte $B_\varepsilon(x) \cap Y$ und $B_\varepsilon(x) \cap (X \setminus Y)$ nichtleer sind. Die Menge der Randpunkte

$$\partial Y = \{x \in X \mid B_\varepsilon(x) \cap Y \neq \emptyset \neq B_\varepsilon(x) \cap (X \setminus Y) \text{ für alle } \varepsilon > 0\}$$

wird als der **Rand** von Y bezeichnet. Der **Abschluss** einer Menge wird durch $\overline{Y} = Y \cup \partial Y$ definiert.

Proposition 10.20 (Zusammenhang in den reellen Zahlen)**.** *Eine nicht-leere Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn X ein Intervall ist.*

Bew: "$\Rightarrow$": Kontrapos.: Agn. X ist kein Intervall und setze $a = \inf(X)$, $b = \sup(X)$.

X kein Intervall $\Rightarrow (a,b) \not\subseteq X$ und $a < b$, also ex. $y \in (a,b) \setminus X \neq \emptyset$.

$\Rightarrow O_1 := (-\infty, y) \cap X$, $O_2 := (y, \infty) \cap X \neq \emptyset$ und nach Lemma 10.11 sind $O_1, O_2 \subseteq X$ offen und es gilt per Konstruktion

$$X = O_1 \sqcup O_2$$

$\Rightarrow X$ nicht zsmh.

"$\Leftarrow$": Agn. X ist ein Intervall aber nicht zsmh, d.h. es ex. eine nicht-leere abgeschloffene echte Teilmenge $\emptyset \neq Y \subsetneq X$, also $X \setminus Y \neq \emptyset$.

Wähle $a \in Y$, $b \in X \setminus Y$ mit OBdA $a < b$. Da X ein Intervall ist, folgt $(a,b) \subseteq [a,b] \subseteq X$ und damit $Y \cap (a,b) \neq \emptyset$

Y offen in $X \Rightarrow \exists O \subseteq \mathbb{R}$ offen mit $Y = O \cap X$

$$\Rightarrow Y \cap (a,b) = O \cap X \cap (a,b) \overset{(a,b) \subseteq X}{=} O \cap (a,b)$$

$\Rightarrow Y \cap (a,b)$ offen in $\mathbb{R}$ (1).

Analog: Y abgs. in $X \Rightarrow Y \cap [a,b]$ abgs. in $\mathbb{R}$ (2)

Setze $s := \sup(Y \cap (a,b)) \underset{Y \text{ offen in } X \text{ und } [a,b] \subseteq X,\ b \notin Y}{=} \sup(Y \cap [a,b]) \in (a,b)$

$\overset{10.13}{\Rightarrow}$ $s \notin Y$ wegen (1) und $s \in Y$ wegen (2) $\lightning$

$\Rightarrow X$ ist zsmh. $\square$

Lemma 10.21 (Vereinigungen von zusammenhängenden Teilmengen)**.** *Sei X ein metrischer Raum und seien Y_1, Y_2 zwei zusammenhängende Teilräume. Falls der Schnitt $Y_1 \cap Y_2$ nicht-leer ist, dann ist die Vereingung $Y_1 \cup Y_2$ zusammenhängend.*

Bew: Sei $A \subseteq Y_1 \cup Y_2$ nicht-leer und abgeschloffen. Dann gilt OBdA $A \cap Y_1 \neq \emptyset$. Dann ist nach Lemma 10.11 $A \cap Y_1$ eine abgeschloffene Teilmenge von Y_1. Da Y_1 zsmh. ist, folgt $A \cap Y_1 = Y_1$, also $Y_1 \subseteq A$. Mit $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ folgt nun $A \cap Y_2 \neq \emptyset$ und damit analog $Y_2 \subseteq A$. Daraus folgt $Y_1 \cup Y_2 \subseteq A$ und damit $A = Y_1 \cup Y_2$. Damit ist $Y_1 \cup Y_2$ zsmh. $\square$

Proposition 10.24 (Charakterisierungen der Stetigkeit)**.** *Seien X, Y zwei metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(i) Die Funktion f ist stetig.

(ii) Für jedes $x \in X$ ist f bei x ε-δ-stetig.

(iii) Für jedes $x \in X$ ist f bei x folgenstetig.

(iv) Für jedes $x \in X$ und für jede Umgebung $U \subseteq Y$ von $f(x)$ ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x.

(v) Für jede offene Teilmenge $O \subseteq Y$ ist $f^{-1}(O)$ eine offene Teilmenge von X.

(vi) Für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq Y$ ist $f^{-1}(A)$ eine abgeschlossene Teilmenge von X.

Proposition 10.29 (Bilder zusammenhängender Mengen unter stetigen Abbildungen)**.** *Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Falls X zusammenhängend ist, dann ist das Bild $f(X)$ ein zusammenhängender Teilraum von Y.*

Bew: Widerspruchsbeweis mit Lemma 10.24. Benutze, dass f OBdA surjektiv ist.

Zusammenhang der reellen Zahlen (10.20)

Übung 10.31. *Zeigen Sie folgende Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes: Sei X ein zusammenhängender metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Seien $a, b \in X$. Dann existiert für jedes $c \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $x \in X$ mit $f(x) = c$.*

Stetigkeit von Wegen

Zusammenhang von Intervallen

Lemma 10.33. *Jeder wegzusammenhängende metrische Raum ist zusammenhängend.*

Bew: Agn. $A \subsetneq X$ ist nicht-leer und abgeschloffen aber X ist wegzsmh., d.h. es ex ein Weg $\gamma : [0,1] \to X$ von $\gamma(0) \in A$ nach $\gamma(1) \in X \setminus A$.

$\overset{\text{Stetigkeit von } \gamma}{\Rightarrow}$ $\gamma^{-1}(A)$, $\gamma^{-1}(X \setminus A)$ nicht-leer und offen in $[0,1]$ mit

$$[0,1] = \gamma^{-1}(A) \sqcup \gamma^{-1}(X \setminus A).$$

Widerspruch, da Intervalle zsmh. sind. Also ist X zsmh. $\square$

Definition 10.16 (Häufungspunkte und Dichtheit)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein Punkt $x_0 \in X$ ist ein **Häufungspunkt einer Folge** $(x_n)_n$ in X, falls es eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) gibt mit $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0$. Ein Punkt $x_0 \in X$ ist ein **Häufungspunkt einer Teilmenge** $D \subseteq X$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ der Durchschnitt $D \cap (B_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\})$ nicht-leer ist. Eine Teilmenge $D \subseteq X$ heisst **dicht**, falls für jedes $x_0 \in X$ und jedes $\varepsilon > 0$ der Durchschnitt $D \cap B_\varepsilon(x_0)$ nicht-leer ist.

Definition 10.19 (Zusammenhang)**.** Sei X ein nicht-leerer metrischer Raum. Wir nennen X **zusammenhängend**, falls es keine zwei offene nicht-leere Teilmengen $O_1, O_2 \subseteq X$ gibt mit $X = O_1 \sqcup O_2$. Wir sagen, dass eine Teilmenge $G \subseteq X$ **abgeschloffen** ist, falls G zugleich offen und abgeschlossen ist.

Alternativ ausgedrückt ist ein metrischer Raum (X, d) genau dann zusammenhängend, wenn es ausser der leeren Menge und X keine weiteren abgeschloffenen Teilmengen von X gibt. Man beachte auch, dass der Begriff des Zusammenhangs nur von der Topologie und nicht von der Wahl der Metrik abhängt. Man sagt auch, dass Zusammenhang eine **topologische Eigenschaft** ist.

Definition 10.25. Sei X ein metrischer Raum, $D \subseteq X$ eine Teilmenge, $x_0 \in X$ ein Häufungspunkt von D und $f : D \to Y$ eine Abbildung in einen weiteren metrischen Raum Y. Dann ist $y_0 \in Y$ der **Grenzwert** von $f(x)$ für $x \to x_0$, geschrieben $y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D \cap B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} : f(x) \in B_\varepsilon(y_0).$$

Ist $x_0 \in D$, so ist wiederum f genau dann bei x_0 stetig, falls der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert und gleich $f(x_0)$ ist.

Definition 10.32 (Wege und Wegzusammenhang)**.** Sei X ein nicht-leerer metrischer Raum.

- Ein **Weg** in X ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to X$ auf einem nicht-leeren Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ mit **Startpunkt** $\gamma(a)$ und **Endpunkt** $\gamma(b)$. Dabei sagen wir auch, dass γ ein Weg von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ ist.
- Wir nennen X **wegzusammenhängend**, falls für je zwei Punkte $x, y \in X$ zwei reelle Zahlen $a < b$ und ein Weg $\gamma : [a, b] \to X$ von $x = \gamma(a)$ nach $y = \gamma(b)$ existiert.

Übung 10.34 (Zusammenhang v.s. Wegzusammenhang)**.** *Zeigen Sie, dass der Teilraum*

$$X = \{0\} \times [-1,1] \sqcup \{(t, \sin(\tfrac{1}{t})) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

Vgl. Serie 2 Agb. 5

! **Proposition 10.35.** *Sei $O \subseteq \mathbb{R}^d$ für $d \geq 1$ eine nicht-leere, offene Teilmenge. Dann ist O genau dann wegzusammenhängend, wenn O zusammenhängend ist.*

Vgl. Serie 2 Agb. 6

Definition 10.37 (Cauchy-Folgen und Vollständigkeit)**.** Sei X ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_n$ in X heisst **Cauchy-Folge**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $m, n \geq N$ die Abschätzung $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ gilt. Der metrische Raum heisst **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

Wir haben bereits gesehen, dass eine konvergente Folge insbesondere eine Cauchy-Folge ist (Übung 6.23) und dass eine Cauchy-Folge genau dann konvergiert, wenn sie eine konvergente Teilfolge besitzt (Übung 6.24).

Entgegen dem Konvergenzbegriff kann der Begriff von Cauchy-Folgen nicht ausschliesslich mit der Topologie charakterisiert werden.

Vollständigkeit ist also eine metrische (nicht nur topologische) Eigenschaft!

Proposition 10.39 (Vollständigkeit in endlich dimensionalen Vektorräumen)**.** *Sei $d \geq 1$. Jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ ist vollständig. Insbesondere ist $\mathbb{R}^d$ vollständig.*

Bew: Sei $(a_n)_n$ Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^d$ und $\pi_j(a_n) \in \mathbb{R}$ die j-te Komponente von a_n.
Es gilt für alle $j \in \{1, \dots, d\}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq n: \quad |\pi_j(a_n) - \pi_j(a_m)| \leq \|a_n - a_m\|_1 < \varepsilon,$$

womit $(\pi_j(a_n))_n$ eine Cauchy-Folge ist. Es folgt

$$\mathbb{R} \text{ vollst} \implies (\pi_j(a_n))_n \text{ konv.} \overset{j \text{ beliebig}}{\implies} (a_n)_n \text{ konv},$$

womit $\mathbb{R}^d$ vollst. ist.
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ abgs. und $(a_n)_n$ Cauchy-Folge in A. $(a_n)_n$ konv. in $\mathbb{R}^d$, da $\mathbb{R}^d$ vollst ist und hat GW in A, da A abgs ist (10.7).
Damit ist A vollst. □

Satz 10.41 (Banachscher Fixpunktsatz)**.** *Sei (X, d) ein nicht-leerer, vollständiger metrischer Raum. Sei $T : X \to X$ eine **Lipschitz-Kontraktion**, das heisst, eine Abbildung mit der Eigenschaft*

$$d(T(x_1), T(x_2)) \leq \lambda d(x_1, x_2)$$

*für alle $x_1, x_2 \in X$ und für eine fixe Lipschitz-Konstante $\lambda < 1$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $x_0 \in X$ mit $T(x_0) = x_0$ (ein **Fixpunkt** von T).*

Bew: · Eindeutigkeit:
! Agn. es ex. $x, y \in X$ mit $T(x) = x$ und $T(y) = x$. Dann gilt

$$0 \leq d(x,y) = d(T(x), T(y)) \leq \lambda \cdot d(x,y).$$

Mit $\lambda < 1$ folgt also $d(x,y) = 0$ und damit $x = y$.
· Existenz:
Sei $x_1 \in X$ beliebig und def $(x_n)_n$ rekursiv durch $x_{n+1} := T(x_n)$
Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ gross genug, dass $\frac{\lambda^{N-1}}{1-\lambda} d(x_1, x_2) < \varepsilon$ gilt.
Seien $n > m \geq N$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_{i=m}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) \\ &\leq \sum_{i=m}^{n-1} \lambda^{i-1} d(x_1, x_2) \\ &\leq \lambda^{m-1} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \overbrace{d(x_1, x_2)}^{\geq 0} \\ &= \frac{\lambda^{m-1}}{1-\lambda} d(x_1, x_2) < \varepsilon. \end{aligned}$$

folgt mit Induktion über n

geom. Reihe

Damit ist $(x_n)_n$ Cauchy und konv. in X, da X vollst. ist.
Damit folgt für $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} T(x_n) \overset{T \text{ stetig}}{=} T(\lim_{n\to\infty} x_n) = T(x_0),$$

womit x_0 Fixpunkt von T ist. □

Übung 10.42 (Notwendigkeit der Annahmen in Satz 10.41)**.**

- *Finden Sie einen nicht-vollständigen metrischen Raum X und eine Lipschitz-Kontraktion $T : X \to X$, die keinen Fixpunkt besitzt.*
- *Finden Sie einen vollständigen metrischen Raum (X, d) und eine Isometrie (das heisst, eine Abbildung $T : X \to X$ mit $d(T(x_1), T(x_2)) = d(x_1, x_2)$), die keinen Fixpunkt besitzt.*

Sei $X = (0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ ausgestattet mit der Standardmetrik $d = |\cdot|$ auf $\mathbb{R}$ und

$$f : X \to X,\ x \longmapsto x/2.$$

Beh: X ist nicht vollst. und f ist eine Lip.-Kontraktion ohne Fixpunkt.
Bew: Die Folge $(x_n)_n = (\frac{1}{n})_n$ ist Cauchy-Folge und es gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \notin X$. Dies zeigt, dass X nicht vollst. ist.
Seien $x_1, x_2 \in X$. Dann gilt $|f(x_1) - f(x_2)| = \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$, womit f eine Lip.-Kontraktion ist.
Zudem ist $x \in X$ Fixpunkt von f g.d.w.

$$f(x) = x \iff 2x = x \iff x = 0.$$

Da $0 \notin X$ gilt, hat f keinen Fixpunkt. □

Sei $X = [1, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ ausgestattet mit der Standardmetrik $d = |\cdot|$ auf $\mathbb{R}$ und

$$f : X \to X,\ x \longmapsto x + \tfrac{1}{x}.$$

Charakterisierung abgs. Mengen durch Konvergenz (10.7)

Lemma 10.47 (Notwendige Eigenschaften). *Eine folgenkompakte Teilmenge eines nichtleeren metrischen Raumes ist abgeschlossen und beschränkt.*

! **Satz 10.53** (Kompaktheit). *Sei X ein metrischer Raum. Dann sind folgende acht Eigenschaften äquivalent. Wenn diese erfüllt sind, so nennen wir X einen* ***kompakten metrischen Raum****.*

(1) Jede unendliche Teilmenge von X besitzt einen Häufungspunkt.

(2) X ist folgenkompakt (das heisst, jede Folge in X hat eine in X konvergente Teilfolge).

(3) Jede stetige, komplexwertige Funktion auf X ist beschränkt.

(4) Jede stetige, reellwertige Funktion auf X nimmt ein Maximum und ein Minimum an.

(5) Jede offene Überdeckung von X besitzt eine Lebesgue-Zahl und X ist total beschränkt.

(6) X ist überdeckungskompakt.

(7) X erfüllt das Schachtelungsprinzip.

(8) X ist total beschränkt und vollständig.

Proposition 10.54 (Lebesgue-Zahl). *Sei X ein folgenkompakter metrischer Raum. Dann hat jede offene Überdeckung eine Lebesgue-Zahl.*

<u>Bew:</u> Sei $\mathcal{O}$ offene Überdeckung von X und def. $\eta : X \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ durch

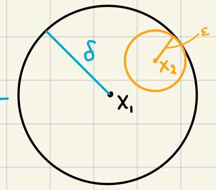
$$\eta(x) = \sup\{\delta \in (0,1] \mid \exists U \in \mathcal{O} : B_\delta(x) \subseteq U\}.$$

z.z. η ist L-stetig

Seien $x_1, x_2 \in X$ und $\delta < \eta(x_1)$. Falls $\varepsilon = \delta - \underbrace{d(x_1, x_2)}_{\geq 0} > 0$ ist, ex. nach Wahl von δ ein $U \in \mathcal{O}$ mit

$$B_\varepsilon(x_2) \subseteq B_\delta(x_1) \subseteq U,$$

somit ist $\eta(x_2) \overset{\text{per Def. von } \eta}{\geq} \varepsilon = \delta - d(x_1, x_2)$



Ist $\varepsilon \leq 0$, so gilt $\eta(x_2) > 0 \geq \varepsilon$.

Nehmen wir das sup aller $\delta < \eta(x_1)$, so erhalten wir also

$$\eta(x_2) \geq \eta(x_1) - d(x_1, x_2),$$

also

$$d(x_1, x_2) \geq \eta(x_1) - \eta(x_2).$$

Mit analogem Argument erhalten wir nun

$$d(x_1, x_2) \geq |\eta(x_1) - \eta(x_2)|,$$

womit η L-Stetig ist. Nach 10.53 nimmt η ein Min. an.

Jedes $0 < r < \min(\eta(X))$ ist nun eine Lesbegue-Zahl für $\mathcal{O}$, denn $\forall x \in X : \; r < \eta(x) \implies \exists U \in \mathcal{O} : B_r(x) \subseteq U$. $\square$

<u>Beh:</u> X ist vollst. und $\forall x, y \in X$ mit $x \neq y$ gilt $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, aber f hat keinen Fixpunkt

<u>Bew:</u> Abgs. Intervalle sind vollst. bzgl. $|\cdot|$.

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit OBdA $y < x$ Dann gilt

$$\left|x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{x^2+1}{x} - \frac{y^2+1}{y}\right|$$
$$= \left|\frac{x^2y + y - xy^2 - x}{xy}\right|$$
$$= \underbrace{\left|\frac{(xy-1)}{xy}\right|}_{<1 \text{ für } x,y \in [1,\infty)} \cdot |(x-y)| < |x-y|.$$

Zudem ist $x \in X$ ein Fixpunkt von f g.d.w.

$$x + \frac{1}{x} = x \iff \frac{1}{x} = 0,$$

doch $\forall x \in X$ gilt $\frac{1}{x} \neq 0$. Also hat f keinen Fixpunkt. $\square$

<u>Bew:</u> Sei $K \subseteq X$ folgenkompakt.

- Sei $(x_n)_n$ konv. Folge in K mit GW x_0 in X. Da K folgenkompakt ist, ex. konv. Teilfolge mit GW in K, d.h $x_0 \in K$. Mit 10.7 folgt nun, dass K abgs. ist.
- Sei $x_0 \in K$ beliebig und ang. K ist unbeschrankt, d.h es ex. eine Folge $(x_n)_n$ in K s.d. $\forall n \in \mathbb{N}: d(x_0, x_n) \geq n$ Doch da K folgenkompakt ist, muss $(x_n)_n$ einen HP in K haben $\rightsquigarrow$ Widerspruch. $\square$

<u>Bew:</u> $(1) \Longrightarrow (2)$: Sei $(x_n)_n$ Folge in X und $D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Gilt $|D| < \infty$, so hat $(x_n)_n$ eine konst, also auch konv. Teilfolge.

Gilt $|D| = \infty$, so hat $(x_n)_n$ nach (1) einen HP $x_0 \in X$.

Seien $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $\delta > 0$ klein genug, s.d.

$$B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \subseteq B_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_1, \dots, x_N\}.$$

Da x_0 HP von D ist, gilt $D \cap (B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$, d.h. es ex. ein $n \geq N$ mit $x_n \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$. Dies zeigt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall N \in \mathbb{N} \; \exists n \geq N : \; x_n \in B_\varepsilon(x_0).$$

Also ex. eine konv. Teilfolge von $(x_n)_n$.

$(2) \Longrightarrow (3)$: Sei $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig.

Agn. $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists x_n \in X : \; |f(x_n)| > n$ Nach (2) hat $(x_n)_n$ eine konv. Tf. $(x_{n_k})_k$ mit GW $x_0 \in X$. Da f stetig ist, gilt

$$f(x_0) = f(\lim_{k \to \infty} x_{n_k}) = \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}),$$

d.h. die Folge $(f(x_{n_k}))_k$ ist konv. und beschränkt $\rightsquigarrow$ Widerspruch.

$(3) \Longrightarrow (4)$: Sei $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und $M = \sup(f(X))$. Agn. f nimmt kein Maximum an, d.h. $\forall x \in X : f(x) < M$. Dann ist

$$g : X \longrightarrow \mathbb{C}, \; x \longmapsto \frac{1}{M - f(x)}$$

wohldef., stetig und damit nach (3) beschränkt, d.h. es ex. ein $S > 0$ mit $g(x) \leq S$, also $f(x) \leq M - \frac{1}{S}$ für alle $x \in X$, was ein Widerspruch zur def von M als sup ist.

$(4) \Longrightarrow (1)$: Siehe Skript.

$(2) \Longrightarrow (5)$: Nach 10.54 besitzt jede offene Überdeckung eine Lesbegue-Zahl.

Sei $\varepsilon > 0$. Agn. X lässt sich nicht durch endl. viele ε-Bälle überdecken. Sei $x_1 \in X$ bel. und wähle rekursiv

$$\forall n \geq 2 : \; x_n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_\varepsilon(x_i) \neq \emptyset$$

Wir erhalten eine Folge $(x_n)_n$ mit

$$d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$$

für alle $n \neq m$. Somit besitzt $(x_n)_n$ keine konv Tf.

$\rightsquigarrow$ Widerspruch zu (2).

Definition 10.46 (Folgenkompaktheit und Beschränktheit). Sei X ein metrischer Raum. Wir sagen, dass X **folgenkompakt** ist, falls jede Folge in X eine konvergente Teilfolge (mit Grenzwert in X) besitzt. Ein Teilraum $K \subseteq X$ ist folgenkompakt, falls er als eigenständiger metrischer Raum folgenkompakt ist. Eine Teilmenge $B \subseteq X$ ist **beschränkt**, falls es ein Punkt $x_0 \in X$ und einen Radius $R > 0$ gibt, so dass B im Ball $B_R(x_0)$ enthalten ist.

Da die Definition der Folgenkonvergenz nur von der Topologie (der Familie der offenen Teilmengen) abhängt, ist Folgenkompaktheit ein topologischer Begriff. Ganz im Gegensatz dazu ist Beschränktheit stark von der Wahl der Metrik abhängig. Betrachtet man beispielsweise $\mathbb{R}$ mit den Metriken d und d', wobei d die Euklidsche Metrik ist und d' die durch $\mathrm{d}'(x,y) = \min\{\mathrm{d}(x,y), 1\}$ für $x, y \in \mathbb{R}$ definierte Metrik ist, so sieht man, dass $\mathbb{R}$ bezüglich d' beschränkt ist. Allerdings ist die durch d' gegebene Topologie die Standardtopologie (die durch d gegebene Topologie) auf $\mathbb{R}$. (Wieso?)

Definition 10.48 (Überdeckungskompaktheit). Sei X ein metrischer Raum.

- Eine **offene Überdeckung** $\mathcal{O}$ von X ist eine Kollektion offener Teilmengen von X, für die $X = \bigcup_{O \in \mathcal{O}} O$ gilt. Eine (**endliche**) **Teilüberdeckung** einer offenen Überdeckung $\mathcal{O}$ ist eine (endliche) Teilmenge $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$, welche selbst eine offene Überdeckung bildet.
- Der Raum X ist **überdeckungskompakt**, falls für jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung existiert.
- Wir sagen, dass X das **Schachtelungsprinzip** erfüllt, falls für jede Kollektion $\mathcal{A}$ abgeschlossener Teilmengen von X mit $A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ (auch **endliche Schnitteigenschaft** genannt) auch $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$ gilt.

Definition 10.51 (Lebesgue-Zahl). Sei X ein metrischer Raum und $\mathcal{O}$ eine offene Überdeckung von X. Wir sagen, dass eine Zahl $r > 0$ eine **Lebesgue-Zahl** für $\mathcal{O}$ ist, falls es für jedes $x \in X$ eine offene Menge $O \in \mathcal{O}$ gibt mit $B_r(x) \subseteq O$.

Definition 10.52 (Total beschränkt). Sei X ein metrischer Raum. Wir sagen, dass X **total beschränkt** ist, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in X$ gibt mit $X = \bigcup_{j=1}^n B_\varepsilon(x_j)$.

$(5) \Longrightarrow (6)$: Sei $\mathcal{O}$ offene Überdeckung von X und $r > 0$ eine Lesbegue-Zahl nach (5). Da X total beschr. ist, ex.

$$x_1, \dots, x_n \in X \quad \text{mit} \quad X = \bigcup_{i=1}^n B_r(x_i).$$

Per. Def. von r ex. für alle x_i ein $U_i \in \mathcal{O}$ mit

$$B_r(x_i) \subseteq U_i,$$

also gilt

$$X = \bigcup_{i=1}^n U_i.$$

$(6) \cancel{\Longrightarrow} (7)$: Zeige Kontraposition vom endl. Schachtelungsprinzip.

Sei $\mathcal{A}$ eine Menge abgs. Teilmengen von X mit

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \emptyset.$$

$$\Longrightarrow \mathcal{O} := \{X \setminus A \mid A \in \mathcal{A}\} \text{ offene Überdeckung von } X.$$

Nach (6) ex. $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{O}$ der Form $U_i = X \setminus A_i$ mit

$$X = \bigcup_{i=1}^n U_i,$$

d.h. $\bigcap_{i=1}^n A_i = \emptyset$.

$(7) \Longrightarrow (8)$: Sei $\varepsilon > 0$. Für $\mathcal{A} := \{X \setminus B_\varepsilon(x) \mid x \in X\}$ gilt $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \emptyset$,

also $\quad (7) \Longrightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in X : \bigcap_{i=1}^n (X \setminus B_\varepsilon(x_i)) = \emptyset$,

d.h. $\quad X = \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$, also total beschr.

Sei $(x_n)_n$ Cauchy-Folge in X. Agn. $(x_n)_n$ konv. nicht, d.h $(x_n)_n$ besitzt auch keine konv. Tf.

$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \; D_n := \{x_k \mid k \geq n\}$ ist abgs., da $X \setminus D_n$ offen ist.

$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \; \bigcap_{k=1}^n D_k = D_n \neq \emptyset$

$\overset{(7)}{\Longrightarrow} \quad \bigcap_{k=1}^\infty D_k \neq \emptyset \quad \rightsquigarrow$ Widerspruch.

$(8) \Longrightarrow (1)$: Siehe Skript. $\square$

Satz 6.15 (Konvergenz von Teilfolgen). *Für jede konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_k$ einer beschränkten, reellen Folge $(a_n)_n$ gilt*

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \in [\liminf_{n\to\infty} a_n, \limsup_{n\to\infty} a_n].$$

Des Weiteren existiert eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_k$ mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \limsup_{n\to\infty} a_n$ und eine konvergente Teilfolge $(a_{m_k})_k$ mit $\lim_{k\to\infty} a_{m_k} = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

<u>Bew:</u> Siehe Analysis I.

Notwendige Eigenschaft für Folgenkompaktheit (10.47)

Charakterisierung abgs. Mengen durch Konvergenz (10.7)

Satz 10.57 (Heine-Borel). *Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^d$ für $d \geq 1$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Insbesondere besitzt jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^d$ eine konvergente Teilfolge.*

<u>Bew:</u> "$\Rightarrow$": Folgt direkt aus 10.47.

! "$\Leftarrow$": Sei $(x_n)_n$ Folge in K, also beschr. per Annahme, d.h.

$\forall j \in \{1,\dots,d\}$ ist $(\pi_j(x_n))_n$ auch beschr.

Nach Satz 6.15 existiert

- eine Teilfolge $(n_1(k))_k$ von $(n)_n$, s.d. $(\pi_1(x_{n_1(k)}))_k$ konv.
- eine Teilfolge $(n_2(k))_k$ von $(n_1(k))_k$, s.d. $(\pi_2(x_{n_2(k)}))_k$ konv.

$\vdots$

- eine Teilfolge $(n_d(k))_k$ von $(n_{d-1}(k))_k$, s.d. $(\pi_d(x_{n_d(k)}))_k$ konv.

Für $(n_k)_k := (n_d(k))_k$ gilt nun

$\forall j \in \{1,\dots,d\}$: $(\pi_j(x_{n_k}))_k$ konv.

und somit konv. auch $(x_{n_k})_k$.

Da K abgs. ist, liegt der GW nach 10.7 auch in K.

Damit ist K folgenkompakt. $\square$

Satz 10.59 (Kompaktes Bild). *Seien X, Y metrische Räume und sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Falls X kompakt ist, so ist auch $f(X)$ kompakt.*

<u>Bew:</u> Sei $\mathcal{O}$ offene Überdeckung von $f(X)$. Da f stetig ist, ist $\{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{O}\}$ offene Überdeckung von X. Nun folgt

X kompakt $\Longrightarrow \exists U_1,\dots,U_n \in \mathcal{O}$: $X = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_i)$

$\Longrightarrow f(X) = \bigcup_{i=1}^n U_i$

$\Longrightarrow \{U_1,\dots,U_n\}$ endl. Überdeckung von $f(X)$

$\Longrightarrow f(X)$ kompakt $\square$

Definition 10.62 (Operatornorm). Die **Operatornorm** einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ ist durch

$$\|A\|_{\mathrm{op}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1} \|Ax\|_2$$

definiert.

Lemma 10.63 (Eigenschaften der Operatornorm). *Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann definiert $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ in der Tat eine (wohldefinierte) Norm auf $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ und erfüllt*

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_{\mathrm{op}}\|x\|_2 \tag{10.2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$. Des Weiteren gilt für $k \in \mathbb{N}$, $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ und $B \in \mathrm{Mat}_{n,k}(\mathbb{R})$

$$\|AB\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\|_{\mathrm{op}}\|B\|_{\mathrm{op}}. \tag{10.3}$$

Proposition 10.64. *Seien X, Y zwei metrische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Funktion. Falls X kompakt ist, so ist f gleichmässig stetig.*

<u>Bew:</u> Sei $\varepsilon > 0$. Da f stetig ist, gilt

! $\forall x \in X\ \exists \eta_x > 0$: $f(B_{\eta_x}(x)) \overset{(1)}{\subseteq} B_{\varepsilon/2}(f(x))$.

Zudem ist $\mathcal{O} := \{B_{\eta_x}(x) \mid x \in X\}$ offene Überdeckung von X.

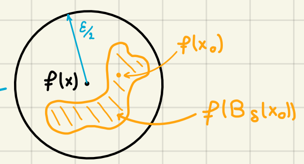
Da X kompakt ist, ex. also eine Lesbegue-Zahl $\delta > 0$ für $\mathcal{O}$,

d.h. $\forall x_0 \in X\ \exists x \in X$: $B_\delta(x_0) \subseteq B_{\eta_x}(x)$

Also gilt $f(B_\delta(x_0)) \subseteq f(B_{\eta_x}(x))$

$\overset{(1)}{\subseteq} B_{\varepsilon/2}(f(x))$

$\subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$. $\square$



Definition 10.65. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, reellwertige Funktion auf einem metrischen Raum X. Für $x \in X$ ist die **Oszillation** oder **Schwankung** von f bei x durch

$$\omega(f, x) = \lim_{\delta\searrow 0} \omega(f, x, \delta)$$

definiert, wobei für $\delta > 0$

$$\omega(f, x, \delta) = \sup f(B_\delta(x)) - \inf f(B_\delta(x)).$$

Es gilt $\omega(f,x) = 0$ g.d.w. f stetig in x ist.

$\longrightarrow \omega(f,x)$ "misst" die Unstetigkeit bei x.

Proposition 10.66 (Gleichmässig kleine Oszillation). *Sei X eine kompakter metrischer Raum und sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Angenommen es gibt $\eta \geq 0$, so dass $\omega(f, x) \leq \eta$ für alle $x \in X$. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in X$*

$$\omega(f, x, \delta) < \eta + \varepsilon$$

gilt.

<u>Bew:</u> Gleiche Idee wie im Bew. von 10.64.

Für $\eta = 0$ folgt mit dieser Prop. genau die Aussage aus 10.64!

Lemma 10.71 (Vektorraum der stetigen Funktionen). *Sei X ein metrischer Raum. Dann ist für jedes $d \geq 1$ die Menge*

$$C(X, \mathbb{R}^d) = \left\{ f : X \to \mathbb{R}^d \mid f \text{ ist stetig} \right\}$$

mit den (punktweisen) Verknüpfungen

$$f + g : x \in X \mapsto f(x) + g(x),$$
$$\lambda f : x \in X \mapsto \lambda f(x)$$

für f, g in $C(X, \mathbb{R}^d)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Vektorraum.

Proposition 10.73 (Vollständigkeit des Raumes der stetigen Funktionen). *Sei K ein kompakter metrischer Raum. Dann definiert*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in K} \|f(x)\|_2 = \max_{x\in K} \|f(x)\|_2$$

eine Norm auf $C(K, \mathbb{R}^d)$, die sogenannte ***Supremumsnorm****, und $C(K,\mathbb{R}^d)$ ist bezüglich dieser Norm vollständig. Des Weiteren konvergiert $f_n \in C(K)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ gegen $f \in C(K)$ genau dann, wenn f_n gleichmässig gegen f konvergiert, das heisst wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ und alle $x \in X$ die Abschätzung $\|f_n(x) - f(x)\|_2 < \varepsilon$ gilt.*

Bew: (der Vollständigkeit)

Sei $(f_n)_n$ CF bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

$\Rightarrow \forall x\in K\ \forall n,m \in \mathbb{N}: \quad \|f_n(x) - f_m(x)\|_2 \leq \|f_n - f_m\|_\infty$

$\Rightarrow \forall x \in K$ ist $(f_n(x))_n$ CF in $\mathbb{R}^d$.

$\mathbb{R}^d$ ist vollst. bzgl. $\|\cdot\|_2$

$\Rightarrow \forall x \in K: f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, d.h. (f_n) konv. Punktweise gegen eine Funktion $f: K \longrightarrow \mathbb{R}$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. ein $N \in \mathbb{N}$ s.d.

$$\forall n,m \geq N\ \forall x \in X: \quad \|f_n(x) - f_m(x)\|_2 < \varepsilon.$$

Mit $m \longrightarrow \infty$ folgt

$$\forall n \geq N\ \forall x\in X: \quad \|f_n(x) - f(x)\|_2 < \varepsilon,$$

also $\quad \forall n \geq N: \quad \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$,

somit $(f_n)_n$ glm. gegen f konv. $\quad$ nzz: f ist stetig

Es gilt $\|f_N - f\| < \varepsilon$. Da f_N stetig ist, folgt

$\forall x_0 \in X\ \exists \delta > 0\ \forall x \in B_\delta(x_0): \quad \|f_N(x) - f_N(x_0)\|_2 < \varepsilon$

$\Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_2 \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \|f(x) - f_N(x)\|_2 + \|f_N(x) - f_N(x_0)\|_2 + \|f_N(x_0) - f(x_0)\|_2$

$< 3\varepsilon.$

Damit ist $C(K,\mathbb{R}^d)$ vollst. bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. $\square$

Übung (Challenge – Satz von Arzelà-Ascoli). *Der Satz von Heine-Borel beschreibt die kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ für $d \geq 1$. In dieser Übung möchten wir die kompakten Teilmengen in einer weiteren Situation beschreiben. Sei K ein kompakter metrischer Raum und sei $\mathcal{F} \subseteq C(K)$ eine Familie stetiger Funktionen, wobei wir $C(K)$ mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ ausstatten.*

Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ genau dann kompakt ist, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

- *$\mathcal{F}$ ist abgeschlossen.*
- *$\mathcal{F}$ ist beschränkt.*
- *$\mathcal{F}$ ist gleichstetig. Das heisst, es gibt für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $f \in \mathcal{F}$ und für alle $x, y \in K$ gilt $\mathrm{d}(x,y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Bew-Skizze:

"$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{F}$ kompakt. $\mathcal{F}$ ist dann nach 10.47 abgs. und beschr.

$\mathcal{F}$ total beschr $\Rightarrow \exists f_1,\dots,f_n\ \forall f \in \mathcal{F}: \min_{j\in\{1,\dots,n\}} (\|f - f_j\|_\infty) < \varepsilon.$ $\quad$ $\mathcal{F}$ mit endl. vielen ε-Bällen bedecken

Da K kompakt ist, sind alle $f \in \mathcal{F}$ glm stetig, also ex. ein $\delta > 0$ s.d.

$$\forall j \in \{1,\dots,n\}\ \forall x,y \in K: \quad d(x,y) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_j(x) - f_j(y)| < \varepsilon.$$

Daraus folgt

$$\forall f \in \mathcal{F}\ \forall x,y \in K: \quad d(x,y) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |f(x) - f_j(x)| + |f_j(x) - f_j(y)| + |f_j(y) - f(y)|$$

$$< 3\varepsilon$$

"$\Leftarrow$": Sei $\mathcal{F}$ abgs., beschr. und gleichstetig und $(f_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{F}$.

1) K total beschr. $\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ex. endl. viele Bälle mit Radius $\frac{1}{n}$, die K überdecken

$\Rightarrow$ abzählbare Vereinigung über alle n und den dazugehörigen (endl. vielen) Zentren gibt eine abzählbare dichte Teilmenge $D = \{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ von K.

2) $\mathcal{F}$ beschr. $\Rightarrow \forall x \in D: \underbrace{(f_n(x))_n}_{\in\mathbb{R}}$ beschr. $\Rightarrow (f_n(x))_n$ hat konv. Tf.

Wähle nun sukzessive

- eine Teilfolge $(n_{1,k})_k$ von $(n)_n$, s.d. $(f_{n_{1,k}}(x_1))_k$ konv.
- eine Teilfolge $(n_{2,k})_k$ von $(n_{1,k})_k$ s.d. $(f_{n_{2,k}}(x_2))_k$ konv.
- eine Teilfolge $(n_{3,k})_k$ von $(n_{2,k})_k$ s.d. $(f_{n_{3,k}}(x_3))_k$ konv.

$\vdots$

Diagonalfolge

$$\begin{array}{cccc} n_{1,1} & n_{1,2} & n_{1,3} & \cdots \\ n_{2,1} & n_{2,2} & n_{2,3} & \cdots \\ n_{3,1} & n_{3,2} & n_{3,3} & \cdots \\ \vdots & & & \end{array}$$

!

Sei dann $(n_k)_k := (n_{k,k})_k$ die Diagonalfolge.

$\Rightarrow \forall x \in D$ konv. $(f_{n_k}(x))_k$ gegen ein $\tilde{f}(x) \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ dies def. eine Funktion $\tilde{f}: D \longrightarrow \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \tilde{f}$ ist glm. stetig, da $\mathcal{F}$ gleichstetig ist und $\tilde{f}$ lässt sich eindeutig zu einer stetigen Funktion $f: K \longrightarrow \mathbb{R}$ erweitern, da D dicht in K liegt.

Zudem konv. $(f_{n_k})_k$ glm. gegen f $\Rightarrow (f_{n_k})_k$ konv. bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ gegen f

Da $\mathcal{F}$ abgs. ist, gilt also $f \in \mathcal{F}$. Dies zeigt, dass $\mathcal{F}$ folgenkompakt ist. $\square$

11. Mehrdimensionale Differentialrechnung

Proposition 11.6 (Matrixdarstellung des totalen Differentials)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ bei $x_0 \in U$ differenzierbar. Dann existiert für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ die Ableitung von f entlang v und es gilt*

$$\partial_v f(x_0) = \mathrm{D}_{x_0} f(v).$$

Insbesondere ist die totale Ableitung $\mathrm{D}_{x_0} f$ eindeutig durch die partiellen Ableitungen bestimmt und es gilt

$$\mathrm{D}_{x_0} f = (\partial_1 f(x_0), \ldots, \partial_n f(x_0)) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R}),$$

*wobei letzteres auch die **Jacobi-Matrix** von f bei x_0 genannt wird.*

<u>Bew:</u> Allg. gilt $f(x_0+h) - f(x_0) \overset{*}{=} D_{x_0}f(h) + o(\|h\|)$ für $h \longrightarrow 0$.
Sei $v \in \mathbb{R}^n$ und setze $h = sv$ für $s \longrightarrow 0$.
Dann gilt

$$\partial_v f(x_0) \overset{\text{Def.}}{=} \lim_{s\to 0} \frac{f(x_0+sv) - f(x_0)}{s}$$

$$\overset{*}{=} \lim_{s\to 0} \frac{D_{x_0}f(sv) + o(s)}{s}$$

$D_{x_0}f$ linear

$$= \lim_{s\to 0} \big(D_{x_0}f(v) + \underbrace{o(1)}_{\to 0}\big) = D_{x_0}f(v).$$

Insbesondere ex. $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ $\partial_j f(x_0) = \partial_{e_j} f(x_0) = D_{x_0}f(e_j)$ und dies sind genau die Spalten der Jacobi-Matrix □

Wichtige Übung 11.7 (Summen- und Produktregel)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und seien $f_1, f_2 : U \to \mathbb{R}^m$ Funktionen. Angenommen f_1 und f_2 sind differenzierbar bei $x_0 \in U$.*

(i) Zeigen Sie, dass $f_1 + f_2$ bei x_0 differenzierbar ist und

$$\mathrm{D}_{x_0}(f_1 + f_2) = \mathrm{D}_{x_0} f_1 + \mathrm{D}_{x_0} f_2$$

erfüllt.

(ii) Sei jetzt $m = 1$. Zeigen Sie, dass $f_1 \cdot f_2$ bei x_0 differenzierbar ist und

$$\mathrm{D}_{x_0}(f_1 f_2) = f_2(x_0)\,\mathrm{D}_{x_0} f_1 + f_1(x_0)\,\mathrm{D}_{x_0} f_2$$

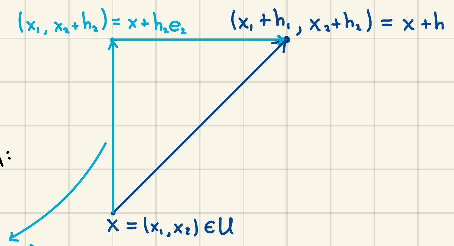
erfüllt.

Lemma 11.8 (Differenzierbarkeit via Komponenten)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Dann ist f genau dann bei $x_0 \in U$ differenzierbar, wenn die Komponenten $f_k = \pi_k \circ f$ für jedes $k \in \{1, \ldots, m\}$ bei x_0 differenzierbar sind. In diesem Fall gilt*

$$\mathrm{D}_{x_0} f = \begin{pmatrix} \mathrm{D}_{x_0} f_1 \\ \vdots \\ \mathrm{D}_{x_0} f_m \end{pmatrix}.$$

! **Satz 11.10** (Existenz der totalen Ableitung)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Falls für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ die partielle Ableitung $\partial_j f$ auf ganz U existiert und eine stetige Funktion definiert, so ist f auf ganz U differenzierbar.*

<u>Bew:</u> (für $n = 2$)
Mit 11.8 sei OBdA $m = 1$. Sei $x \in U$ bel.
Füge wie folgt gezielt Terme ein, um den 1-dim. MW-Satz anzuwenden:



$$f(x+h) - f(x) = \overbrace{f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2+h_2)}^{\text{konst. in der 2. Variable}} + \overbrace{f(x_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2)}^{\text{konst. in der 1. Variable}}$$

1-dim. MW-Satz

$$= \partial_1 f(\xi_1, x_2+h_2)\cdot h_1 + \partial_2 f(x_1, \xi_2)\cdot h_2$$

für gewisse $\xi_1 \in (x_1, x_1+h_1)$ und $\xi_2 \in (x_2, x_2+h_2)$.
Für $\alpha(x,h) := \big(\partial_1 f(\xi_1, x_2+h_2) - \partial_1 f(x)\big)h_1 + \big(\partial_2 f(x_1, \xi_2) - \partial_2 f(x)\big)h_2$
gilt nun

$$f(x+h) - f(x) = \underbrace{\partial_1 f(x)h_1 + \partial_2 f(x)h_2}_{D_x f(h) := (\partial_1 f(x)\ \ \partial_2 f(x))\binom{h_1}{h_2}} + \alpha(x,h)$$

Für $\|h\| \longrightarrow 0$ folgt $h_1, h_2 \longrightarrow 0$ und $\xi_1 \longrightarrow x_1$, $\xi_2 \longrightarrow x_2$ und mit Stetigkeit von $\partial_1 f, \partial_2 f$ folgt nun

$$\frac{\alpha(x,h)}{\|h\|} \xrightarrow{h\to 0} 0,$$

also $\alpha(x,h) = o(\|h\|)$ für $h \longrightarrow 0$. Damit ist f auf ganz U diffbar □

Definition 11.1. Ein **Gebiet** in $\mathbb{R}^n$ ist eine nicht-leere, offene, zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

Definition 11.3 (Totale Ableitung)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Dann heisst f bei $x_0 \in U$ **differenzierbar** (oder **ableitbar**), falls es eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, so dass

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \underbrace{L}_{D_{x_0}f}(h) + \alpha_f(x_0, h)$$

und $\alpha_f(x_0, h) = o(\|h\|)$ für $h \to 0$ oder äquivalenterweise

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)\|}{\|h\|} = 0$$

gilt. Die lineare Abbildung L wird die **totale Ableitung**, das **Differential** oder die **Tangentialabbildung** genannt und als $\mathrm{D}_{x_0} f$, $\mathrm{d}f(x_0)$, $\mathrm{D}f(x_0)$ oder auch $f'(x_0)$ geschrieben. Weiter heisst f differenzierbar, falls f bei jedem Punkt in U differenzierbar ist.

Definition 11.5 (Ableitung entlang eines Vektors)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Die **Ableitung** von f **entlang eines Vektors** $v \in \mathbb{R}^n$ ist an einer Stelle $x_0 \in U$ durch

$$\partial_v f(x_0) = \lim_{s\to 0} \frac{f(x_0 + sv) - f(x_0)}{s}$$

definiert, falls der Grenzwert existiert. Falls $\|v\| = 1$ gilt, so spricht man auch von der **Richtungsableitung** in der Richtung v bei x_0.

Im Spezialfall, wo $v = e_j$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ ist, wird der obige Grenzwert

$$\partial_j f(x_0) = \partial_{e_j} f(x_0) = \lim_{s\to 0} \frac{f(x_0 + se_j) - f(x_0)}{s}$$

auch die **partielle Ableitung** in der j-ten Koordinate (oder der Variable x_j) bei x_0 genannt, falls er existiert. Wir schreiben mitunter auch $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ oder $\partial_{x_j} f(x_0)$. Existiert die partielle Ableitung in der j-ten Koordinate an jedem Punkt in U, so erhält man also eine Funktion $\partial_j f : U \to \mathbb{R}^m$.

Satz 11.13 (Kettenregel der mehrdimensionalen Differentialrechnung). *Seien $k, m, n \geq 1$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Weiter sei $f : U \to V$ bei x_0 differenzierbar und $g : V \to \mathbb{R}^k$ bei $f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ bei x_0 differenzierbar und die totale Ableitung $\mathrm{D}_{x_0}(g \circ f)$ bei x_0 ist durch die Verknüpfungen der linearen Abbildungen*

$$\mathrm{D}_{x_0}(g \circ f) = \mathrm{D}_{f(x_0)} g \circ \mathrm{D}_{x_0} f \tag{11.2}$$

gegeben.

Bew: Per def. gilt

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + D_{x_0} f(h) + \alpha_f(x_0, h)$$

mit $\alpha_f(x_0, h) = o(\|h\|)$ für $h \longrightarrow 0$

und für $y_0 = f(x_0)$ gilt

$$g(y_0 + \tilde{h}) = g(y_0) + D_{y_0} g(\tilde{h}) + \alpha_g(y_0, \tilde{h})$$

mit $\alpha_g(x_0, \tilde{h}) = o(\|\tilde{h}\|)$ für $\tilde{h} \longrightarrow 0$.

Setze $\tilde{h} := \underbrace{f(x_0 + h) - f(x_0)}_{= D_{x_0} f(h) + \alpha_f(x_0, h)} \xrightarrow{h \to 0} 0$, da f stetig ist.

$\tilde{h}$ einsetzen liefert

$$\begin{aligned} g(f(x_0 + h)) &= g(f(x_0)) + D_{y_0} g(D_{x_0} f(h) + \alpha_f(x_0, h)) + \alpha_g(x_0, \tilde{h}) \\ &= g(f(x_0)) + D_{y_0} g \circ D_{x_0} f(h) + \alpha_{g \circ f}(x_0, h) \end{aligned}$$

für $\alpha_{g \circ f}(x_0, h) := D_{y_0} g(\alpha_f(x_0, h)) + \alpha_g(y_0, f(x_0 + h) - f(x_0))$.

Nun gilt $\alpha_{g \circ f}(x_0, h) = o(\|h\|)$ für $h \longrightarrow 0$ ($\rightsquigarrow$ siehe Skript für Details), womit Diffbarkeit von $g \circ f$ und die Kettenregel folgt. □

Satz 11.14 (Mittelwertsatz für reellwertige Funktionen auf $\mathbb{R}^n$). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $x_0 \in U$ und $h \in \mathbb{R}^n$. Falls $x_0 + th \in U$ für alle $t \in [0, 1]$, dann gilt*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \mathrm{D}_\xi f(h) = \partial_h f(\xi)$$

für ein $\xi = x_0 + t_\xi h$ mit $t_\xi \in (0, 1)$.

Bew: Sei $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(x_0 + th)$.

Nach der mehrdim. Kettenregel ist φ diffbar und es gilt

$$\varphi'(t) = (D_{x_0 + th} f) \cdot h \in \mathbb{R}$$

Nach dem 1-dim. MW-Satz ex. ein $t_\xi \in (0, 1)$ mit

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t_\xi) \cdot (1 - 0)$$

$$\Rightarrow f(x_0 + h) - f(x_0) = D_\xi f(h)$$

für $\xi := x_0 + t_\xi h$. □

Korollar 11.15. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar mit $\mathrm{D}_x f = 0$ für alle $x \in U$. Dann ist f konstant.*

Bew: Mit 11.8 sei OBdA $m = 1$ Sei $x_0 \in U$ und

$$U' = \{x \in U \mid f(x) = f(x_0)\}.$$

Da f stetig ist, ist $U' = f^{-1}\{f(x_0)\}$ abgs

Sei $x \in U'$. Da U offen ist, ex. ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$.

Da sich jeder Punkt $y \in B_\varepsilon(x)$ mit einem gerad*em* Weg mit x verbinden lässt, folgt aus 11.14: $\exists \xi \in U : f(y) - f(x) = D_\xi f(y - x) = 0$

$$\Rightarrow f(y) = f(x) \Rightarrow y \in U' \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq U'.$$

Damit ist U' auch offen, d.h. abgeschloffen.

Da U zsmh. ist und $U' \neq \emptyset$, folgt $U = U'$, womit f konst. ist. □

Korollar 11.17. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann ist f lokal Lipschitz-stetig. Falls U zusätzlich konvex und die Ableitung beschränkt ist, dann ist f sogar Lipschitz-stetig.*

Bew: Sei OBdA $m = 1$

i) Agn. U ist konvex und die Abl. beschr., d.h. es ex. $M \geq 0$, s.d. $\forall \xi \in U : \|D_\xi f\|_{op} \leq M$. Da U konvex ist folgt mit dem allg MW-Satz

$$\|f(x) - f(y)\| = \|D_\xi f(x - y)\| \leq M \cdot \|x - y\|,$$

womit f L-stetig ist.

ii) Allg. betrachte für $x \in U$ nun $U_0 = B_\varepsilon(x)$ für $\varepsilon > 0$ klein genug, dass $\overline{B_\varepsilon(x)} \subseteq U$ und wende (i) auf $f|_{U_0}$ an. □

1-dim. MW Satz

! **Satz 11.20** (Satz von Schwarz). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$*

$$\partial_j \partial_k f = \partial_k \partial_j f$$

auf ganz U.

Bew: Sei OBdA $n = 2$ und $(x, y) \in U$. Per def. gilt

$$\begin{aligned} \partial_x \partial_y f(x, y) &= \lim_{h \to 0} \frac{\partial_y f(x + h, y) - \partial_y f(x, y)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \lim_{s \to 0} \frac{f(x + h, y + s) - f(x, y + s) - f(x + h, y) + f(x, y)}{h \cdot s} \end{aligned}$$

Def. $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(x + t, y + s) - f(x + t, y)$ und wende den 1-dim. MW-Satz auf φ auf $[0, t]$ an, d.h. es ex ein $\xi_h \in (x, x + h)$, s. d.

$$\begin{aligned} f(x + h, y + s) - f(x, y + s) - f(x + h, y) + f(x, y) &= g(t) - g(0) = g'(t) \cdot h \\ &= (\partial_x f(\xi_h, y + s) - \partial_x f(\xi_h, y)) \cdot h. \end{aligned}$$

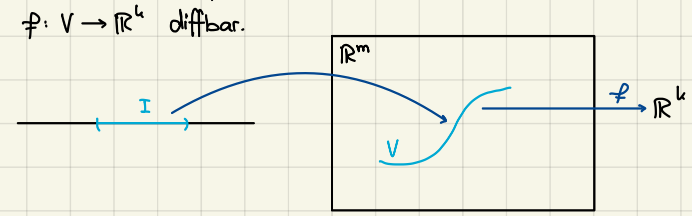
Definition 11.11. Wir nennen eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ **stetig differenzierbar**, wenn f differenzierbar ist und die Ableitung

$$x \in U \mapsto \mathrm{D}_x f \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$$

stetig ist.

Spezialfall $n = 1$: (Kettenregel)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ also ein offenes Intervall $\gamma : I \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ (offen) diffbarer Weg und $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^k$ diffbar.



Dann ist $f \circ \gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^k$ ein diffbarer Weg mit Ableitung

$$(f \circ \gamma)'(t) = \underbrace{D_{\gamma(t)} f}_{k \times m} \cdot \underbrace{\gamma'(t)}_{m \times 1} \qquad \forall t \in I$$

Ist zusätzlich $k = 1$, so def.

$$\operatorname{grad} f(x) := \nabla f(x) = (D_x f)^T \in \mathbb{R}^m \qquad \text{(Spaltenvektor)}$$

den Gradienten von f an der Stelle $x \in V$.

Es gilt

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'(t) &= D_{\gamma(t)} f \cdot \gamma'(t) \\ &= \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \qquad \forall t \in I \end{aligned}$$

Geometrische Interpretation:

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ bei $x \in U$ diffbar und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$.

Die Richtungsableitung

$$\partial_v f(x) = D_x f(v) = \underbrace{\langle \nabla f(x), v \rangle}_{= \|\nabla f(x)\| \cdot \|v\| \cdot \cos\sphericalangle}$$

wird maximal g.d.w. v in dieselbe Richtung wie $\nabla f(x)$ zeigt und $\|\nabla f(x)\|$ ist gleich dieser maximalen Richtungsableitung.

Definition 11.16 (Lokale Lipschitz-Stetigkeit). Eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen zwei metrischen Räumen X, Y heisst **lokal Lipschitz-stetig**, falls für jedes $x_0 \in X$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $f|_{B_\varepsilon(x_0)}$ Lipschitz-stetig ist.

Definition 11.19 (Höhere stetige Differenzierbarkeit). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Wir sagen, dass f **zweimal stetig differenzierbar** ist, falls f stetig differenzierbar ist und für alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ die partielle Ableitung $\partial_k f : U \to \mathbb{R}^m$ wiederum eine stetige partielle Ableitung $\partial_j \partial_k f$ besitzt. Im Allgemeinen heisst f ***d*-mal stetig differenzierbar** für ein $d \geq 2$, falls f stetig differenzierbar ist und für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ die partielle Ableitung $(d-1)$-mal stetig differenzierbar ist. Weiter sei

$$C^d(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist } d\text{-mal stetig differenzierbar}\}$$

die Menge der d-mal stetig differenzierbaren reellwertigen Funktionen auf U. Wir sagen, dass eine iterierte partielle Ableitung einer d-mal stetig differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ **Ordnung** ℓ für $\ell \in \{1, \ldots, d\}$ hat, falls genau ℓ partielle Ableitungen auf f angewandt wurden. Des Weiteren nennt man die Funktion f **glatt**, falls sie beliebig oft (also für alle $d \in \mathbb{N}$ d-mal) stetig differenzierbar ist.

Korollar 11.21 (Satz von Schwarz). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ d-mal stetig differenzierbar. Dann spielt die Reihenfolge der partiellen Ableitungen (bis zur Ordnung d) keine Rolle.*

Damit folgt

$$\partial_x \partial_y f(x,y) = \lim_{h\to 0} \lim_{s \to 0} \frac{(\partial_x f(\xi_h, y+s) - \partial_x f(\xi_h, y)) \cdot \cancel{h}}{\cancel{h} \cdot s}$$

$$= \lim_{h\to 0} \lim_{s \to 0} \frac{\partial_x f(\xi_h, y+s) - \partial_x f(\xi_h, y)}{s} \overset{\text{Def.}}{=} \lim_{h \to 0} \partial_y \partial_x f(\xi_h, y).$$

Mit $\xi_h \xrightarrow{h \to 0} x$ folgt also $\partial_x \partial_y f(x,y) = \partial_y \partial_x f(x,y)$.

□

Die **Hesse-Matrix** $H(x) = (H_{ij}(x))_{ij} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ bei $x \in U$ einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$H_{ij}(x) = \partial_i \partial_j f(x)$$

für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Der Satz von Schwarz (Satz 11.20) besagt nun genau $H_{ij}(x) = H_{ji}(x)$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, also dass $H(x)$ eine symmetrische Matrix ist.

Satz 11.22 (Taylor-Approximation mit Integralrestglied). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine $(d+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Sei $x \in U$ und $h \in \mathbb{R}^n$, so dass $x + th \in U$ für alle $t \in [0,1]$. Dann gilt*

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{k!} (\partial_h^k f)(x) + R^f_{x,d}(h), \tag{11.5}$$

$\partial_h^k f = \underbrace{\partial_h \cdots \partial_h}_{k\text{-mal}} f$,

$\partial_h f = Df(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot \partial_i f$

wobei das Integralrestglied $R^f_{x,d}$ durch

$$R^f_{x,d}(h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^d}{d!} (\partial_h^{d+1} f)(x + th) \, \mathrm{d}t.$$

gegeben ist. Insbesondere ist für $h \to 0$

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{k!} (\partial_h^k f)(x) + \overbrace{O(\|h\|^{d+1})}^{R^f_{x,d}(h)}. \tag{11.6}$$

Dabei bezeichnet $\partial_h^k f$ die k-fache Ableitung von f entlang des Vektors h. Wir erinnern daran, dass

$$\partial_h f = h_1 \partial_1 f + \ldots + h_n \partial_n f.$$

Auch die höheren Ableitungen $\partial_h^k f$ lassen sich als Linearkombinationen partieller Ableitungen der Ordnung k auffassen, wenn man die Potenz formal ausmultipliziert. Zum Beispiel gilt für den quadratischen Term bei $x \in U$

$$\begin{aligned} \left[\partial_h^2 f\right](x) &= \left[\partial_h (h_1 \partial_1 f + \ldots + h_n \partial_n f)\right](x) \\ &= \sum_{j=1}^{n} h_j \partial_h (\partial_j f)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \partial_i \partial_j f(x) = h^t H(x) h \end{aligned} \tag{11.7}$$

für alle $h \in \mathbb{R}^n$, wobei $H(x)$ wieder die Hesse-Matrix der zweiten Ableitungen bei x bezeichnet.

Wie im eindimensionalen Fall wollen wir die Approximation in Gleichung (11.5) (oder auch (11.6)) die **Taylor-Approximation d-ter Ordnung** nennen.

Um zu veranschaulichen, wieso Satz 11.22 gerade die mehrdimensionale Version von Theorem 9.46 ist, wollen wir diesen hier in Multiindexnotation darstellen. Wir setzen für $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n$ und $h \in \mathbb{R}^n$

$$h^{\boldsymbol{\alpha}} = h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n}$$

sowie $\boldsymbol{\alpha}! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine $(d+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Sei $x \in U$ und $h \in \mathbb{R}^n$, so dass $x + th \in U$ für alle $t \in [0,1]$. Dann gilt

$$f(x+h) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n : \|\boldsymbol{\alpha}\|_1 \le d} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!} \partial^{\boldsymbol{\alpha}} f(x) h^{\boldsymbol{\alpha}} + R^f_{x,d}(h) \tag{11.10}$$

wobei

$$R^f_{x,d}(h) = (d+1) \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n : \|\boldsymbol{\alpha}\|_1 = d+1} h^{\boldsymbol{\alpha}} \int_0^1 \frac{(1-t)^d}{\boldsymbol{\alpha}!} \partial^{\boldsymbol{\alpha}} f(x + th) \, \mathrm{d}t. \tag{11.11}$$

Spricht man von Taylor-Approximation (insbesondere in der Literatur), so ist meistens die Form in (11.10), (11.11) anstelle von (11.5), (11.6) gemeint.

Wir bemerken an dieser Stelle ebenfalls, dass der Hauptterm auf der rechten Seite von (11.10) genau wie in der eindimensionalen Taylor-Approximation ein Polynom darstellt – diesmal allerdings in d Variablen.

Die höheren partiellen Ableitungen einer stetig differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ können also alle in die Form

$$\partial^{\boldsymbol{\alpha}} f = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f$$

gebracht werden, wobei die einzelnen Komponenten von $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n$ angeben wie oft wir nach den einzelnen Koordinatenrichtungen abgeleitet haben (und $\partial_j^0 f = f$ für alle $j = 1, \ldots, n$). Der Satz von Schwarz nimmt in dieser Notation die Form

$$\partial^{\boldsymbol{\alpha}} \partial^{\boldsymbol{\beta}} f = \partial^{\boldsymbol{\beta}} \partial^{\boldsymbol{\alpha}} f = \partial^{\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}} f$$

für $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{N}_0^n$ an, wobei f auf U als $\|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\|_1$-oft stetig differenzierbar vorausgesetzt wird. Wir bezeichnen in diesem Zusammenhang $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ als einen **Multiindex**.

Korollar 11.25 (Lineare und quadratische Approximation). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle $x \in U$*

$$f(x+h) = f(x) + \underbrace{\langle \nabla f(x), h \rangle}_{D_x f(h)} + O(\|h\|^2)$$

und genauer

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \tfrac{1}{2} h^t H(x) h + o(\|h\|^2)$$

für $h \to 0$, wobei $H(x)$ wieder die Hesse-Matrix von f bei x darstellt.

Proposition 11.29 (Notwendige Bedingung für lokale Extrema). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $x_0 \in U$ ein Punkt. Falls f in x_0 ein lokales Extremum annimmt und f in x_0 differenzierbar ist, so ist $\mathrm{D}_{x_0} f = 0$.*

<u>Bew:</u> Agn. f nimmt in $x_0 \in U$ OBdA ein lokales Max an

Dann gilt für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$:

- $\partial_j f(x_0) = \lim_{h \downarrow 0} \overbrace{\frac{f(x_0 + he_j) - f(x_0)}{h}}^{\le 0 \text{ für } h \text{ klein genug}} \le 0$
- $\partial_j f(x_0) = \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(x_0 + he_j) - f(x_0)}{h} \ge 0$

Daraus folgt $D_{x_0} f = 0$.

□

Definition 11.28 (Extrema). Sei f eine reellwertige Funktion auf einer Menge X. Dann sagen wir, dass f in $x_{\max} \in X$ ein **Maximum annimmt**, falls $f(x) \le f(x_{\max})$ für alle $x \in X$ gilt. Die Funktion f nimmt ein **striktes Maximum** in $x_{\max} \in X$ an, falls $f(x) < f(x_{\max})$ für alle $x \in X \setminus \{x_{\max}\}$ gilt. In beiden Fällen bezeichnen wir $f(x_{\max})$ als das **Maximum** von f. Analoge Begriffe definiert man für das **Minimum**. In beiden Fällen sprechen wir von **(globalen) Extremwerten**.

Sei nun X ein metrischer Raum. Dann sagen wir, dass f in $x_{\max} \in X$ ein **lokales Maximum annimmt**, falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(x) \le f(x_{\max})$ für alle $x \in B_\delta(x_{\max})$. Weiter nimmt f in $x_{\max} \in X$ ein **striktes lokales Maximum** an, falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(x) < f(x_{\max})$ für alle $x \in B_\delta(x_{\max}) \setminus \{x_{\max}\}$. In beiden Fällen wird $f(x_{\max})$ als **lokales Maximum** bezeichnet. Die Definition eines **lokalen Minimum** ist analog und beide werden als **lokale Extremwerte** bezeichnet.

quadratische Taylor-Approximation

Korollar 11.32. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $x_0 \in U$ ein kritischer Punkt und*

$$Q(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(x_0) h_i h_j$$

die quadratische Form assoziiert zur Hesse-Matrix $H(x)$ von f bei x_0. Dann gilt

- *Ist Q positiv definit, so nimmt f bei x_0 ein striktes lokales Minimum an.*
- *Ist Q negativ definit, so nimmt f bei x_0 ein striktes lokales Maximum an.*
- *Ist Q indefinit, so hat f bei x_0 kein lokales Extremum.*

Bew: Agn. $x_0 \in X$ ist krit. Punkt von f und $H := H(x)$ ist pos. definit.
Dann gilt nach der quadr. Approx. (11.25)

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \underbrace{D_{x_0}f(h)}_{=0,\ \text{da } x_0 \text{ krit. Punkt}} + \tfrac{1}{2}h^T H h + \underbrace{\alpha_f(x_0,h)}_{=o(\|h\|^2) \text{ für } h \to 0}.$$

Setze $c := \min_{v \in S^{n-1}} (v^T H v)$ $\rightsquigarrow$ ex., da $S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1\}$ nach Heine-Borell kompakt ist und $v \mapsto v^T H v$ stetig

Wegen der o-Approximation ex. ein $\delta > 0$, s.d.

$$\forall h \in B_\delta(0): \ |\alpha_f(x_0,h)| < \tfrac{c}{2}\|h\|^2.$$

Für $h \in B_\delta(0) \setminus \{0\}$ folgt nun

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \tfrac{1}{2}\|h^2\| \Big(\underbrace{\tfrac{h^T}{\|h\|} H \tfrac{h}{\|h\|}}_{\geq c}\Big) + \underbrace{\alpha_f(x_0,h)}_{< \frac{1}{2}\|h^2\| c}$$

$$> f(x_0) + \tfrac{1}{2}\|h^2\| c - \tfrac{1}{2}\|h^2\| c = f(x_0),$$

womit f ein striktes lokales Minimum in x_0 annimmt.
Falls H negativ definit ist, verwende Obiges für $-f$.
Siehe Skript für den indefiniten Fall $\square$

Satz 11.33 (Charakterisierungen von Definitheit)**.** *Sei $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Dann gilt*

- *A ist genau dann positiv definit, wenn alle der folgenden Determinanten positiv sind:*

$$a_{11}, \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \ldots \quad , \quad \det(A).$$

- *A ist genau dann negativ definit, wenn $-A$ positiv definit ist, was genau wechselnden Vorzeichen der Determinanten beginnend mit negativen Vorzeichen entspricht.*
- *Falls A nicht-degeneriert ist und weder positiv noch negativ definit ist, dann ist A indefinit.*

Satz 11.36 (Differentiation unter dem Integral)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $a < b$ reelle Zahlen und $f : U \times [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann definiert das Parameterintegral*

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

für $x \in U$ eine stetige Funktion $F : U \to \mathbb{R}$. Falls zusätzlich die partiellen Ableitungen $\partial_k f$ für $k = 1, \ldots, n$ existieren und auf ganz $U \times [a,b]$ stetig sind, dann ist F stetig differenzierbar und es gilt

$$\partial_k F(x) = \int_a^b \partial_k f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

für alle $x \in U$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Bew: • Stetigkeit von F:
Sei $x_0 \in U$ und $\eta > 0$ s.d. $\underset{\text{kompakt}}{K} := \overline{B_\eta(x_0)} \subseteq U$. Dann ist $f|_{K \times [a,b]}$ nach 10.64 glm. stetig. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. ein $\delta \in (0, \eta)$ mit $\forall x \in B_\delta(x_0)\ \forall t \in [a,b]: |f(x,t) - f(x_0,t)| < \varepsilon$.

$\rightsquigarrow$ δ muss dafür unabhängig von t sein, hier wurde also glm. Stetigkeit verwendet

Daraus folgt

$$|F(x) - F(x_0)| = \Big|\int_a^b \underbrace{(f(x,t) - f(x_0,t))}_{<\varepsilon} dx\Big| < \varepsilon(b-a)$$

für alle $x \in B_\delta(x_0)$.

• F ist stetig diffbar:
Seien $x_0 \in U$ und K wie oben und $k \in \{1, \ldots, n\}$.
Nach dem MW-Satz für alle $s \in (-\eta, \eta) \setminus \{0\}$ und $t \in [a,b]$ ein $\xi_{s,t} \in (0,1)$ mit

$$\frac{f(x_0 + se_k, t) - f(x_0,t)}{s} = \partial_k f(x_0 + \xi_{s,t} \cdot se_k, t)$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. (wieder mit glm. Stetigkeit von $\partial_k f$ auf $K \times [a,b]$) ein $\delta \in (0, \eta)$, s.d.

$$\forall x \in B_\delta(x_0): \ |\partial_k f(x,t) - \partial_k f(x_0,t)| < \varepsilon.$$

Also gilt für alle $s \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$:

$$\Big|\frac{F(x_0+se_k) - F(x_0)}{s} - \int_a^b \partial_k f(x_0,t)dt\Big| \overset{\text{Def.}}{=} \Big|\int_a^b \Big(\frac{f(x_0+se_k,t) - f(x_0,t)}{s} - \partial_k f(x_0,t)\Big) dt\Big|$$

$$= \Big|\int_a^b (\partial_k f(x_0 + \xi_{s,t} se_k, t) - \partial_k f(x_0,t))\, dt\Big|$$

$$\leq \varepsilon(b-a).$$

Also folgt

$$\partial_k F(x_0) = \lim_{s \to 0} \frac{F(x_0+se_k) - F(x_0)}{s} = \int_a^b \partial_k f(x_0,t)dt.$$

Nach dem 1. Teil des Satzes ist $\partial_k F$ auch stetig und damit ist F stetig diffbar. $\square$

Korollar 11.38. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, seien $a < b$ reelle Zahlen und sei $f : U \times (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig mit stetigen partiellen Ableitungen $\partial_k f$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$. Seien des Weiteren $\alpha, \beta : U \to (a,b)$ stetig differenzierbar. Dann ist das Parameterintegral mit veränderlichen Grenzen*

$$F : x \in U \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

stetig differenzierbar und für $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$\partial_k F(x) = f(x, \beta(x))\, \partial_k \beta(x) - f(x, \alpha(x))\, \partial_k \alpha(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \partial_k f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

für alle $x \in U$.

Definition 11.30 (Kritische Punkte)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Ein Punkt $x \in U$ heisst **kritischer Punkt** von f, falls $\mathrm{D}_x f = 0$. Ist allgemeiner f eine differenzierbare Abbildung von U nach $\mathbb{R}^m$, so ist $x \in U$ ein kritischer Punkt, falls $\mathrm{D}_x f$ Rang kleiner als $\min(m,n)$ hat.

Weiter nennt man $x \in U$ einen **regulären Punkt** der Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$, falls x kein kritischer Punkt von f ist. Das Bild eines kritischen Punktes unter f nennt man auch einen **kritischen Wert**; Punkte in $\mathbb{R}^m$ im Komplement der kritischen Werte von f heissen **reguläre Werte**.

Definition 11.31. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine **symmetrische Matrix** (das heisst, $A^t = A$). Dann nennt man die Abbildung

$$Q_A : v \in \mathbb{R}^n \mapsto v^t A v$$

die **zu A assoziierte quadratische Form** in n Variablen. Die quadratische Form Q_A oder auch die Matrix A heisst

- **positiv definit**, falls $Q_A(v) > 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
- **negativ definit**, falls $Q_A(v) < 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
- **indefinit**, falls $w_-, w_+ \in \mathbb{R}^n$ existieren mit $Q_A(w_+) > 0$ und $Q_A(w_-) < 0$, und
- **nicht-degeneriert**, falls $\det(A) \neq 0$.

Lemma 11.44 (Reparametrisierungen und Richtungsumkehr eines Weges)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld und sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ ein stetig differenzierbarer Weg für $a < b$. Dann ändert sich der Wert des Wegintegrals $\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}s$ nicht unter (orientierungserhaltenden) Reparametrisierungen von γ.*

Weiter gilt für den umgekehrten Weg $\tilde{\gamma} : t \in [-b,-a] \mapsto \gamma(-t)$ mit $\tilde{\gamma}(-b) = \gamma(b)$ und $\tilde{\gamma}(-a) = \gamma(a)$

$$\int_{\tilde{\gamma}} f \cdot \mathrm{d}s = -\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}s.$$

Kettenregel

Satz von Schwarz

Differentiation unter dem Integral

Existenz der totalen Ableitung

Satz 11.49 (Stammfunktion)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann ist f genau dann konservativ, wenn es eine stetig differenzierbare Funktion $F : U \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \nabla F(x)$ für alle $x \in U$ gibt.*

Des Weiteren gelten für ein stetig differenzierbares konservatives Vektorfeld f und deren Komponenten $f_1, \ldots, f_n$ die (partiellen) Differentialgleichungen

$$\partial_j f_k = \partial_k f_j$$ $\leadsto$ Integrabilitätsbedingungen

für alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$.

Die differenzierbare Funktion F in obigem Satz übernimmt die Rolle der Stammfunktion im Fundamentalsatz der Integral- und Differentialrechnung und wird auch das zum Vektorfeld f assoziierte **Potential** (**Potentialfunktion**) genannt. Diese Funktion existiert aber nicht für alle, sondern nur für gewisse (eben konservative) Vektorfelder.

Bew: Sei $\psi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \longrightarrow [a,b]$ monoton wachsend Dann gilt

$$\int_{\gamma\circ\psi} f \cdot ds = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \langle f(\gamma(\psi(t))), \gamma'(\psi(t)) \cdot \underbrace{\psi'(t)}_{\in\mathbb{R}} \rangle dt$$

$$= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \underbrace{\langle f\circ\gamma, \gamma' \rangle}_{\text{Funktion}} (\psi(t)) \cdot \underbrace{\psi'(t) dt}_{dr}$$ Substituiere $r = \psi(t) \leadsto dr = \psi'(t)dt$

$$= \int_a^b \langle f(\gamma(r)), \gamma'(r) \rangle dr$$

$$= \int_\gamma f \cdot ds.$$

Der 2. Teil (ψ monoton fallend $\leadsto$ umgekehrter Weg) folgt analog. $\square$

Bew: "$\Leftarrow$": Agn. es ex. eine C^1-Funktion $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f = \nabla F$.
Sei $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ ein C^1-Weg. Dann gilt

$$\int_\gamma f \cdot ds = \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

$$= \int_a^b \langle \underbrace{\nabla F(\gamma(t))}_{=(D_{\gamma(t)}F)^T}, \gamma'(t) \rangle dt$$

$$= \int_a^b D_{\gamma(t)} F \cdot \gamma'(t) dt$$ Kettenregel

$$= \int_a^b (\underbrace{F\circ\gamma}_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}})'(t) dt$$

$$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

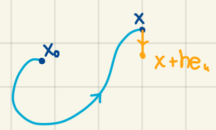
Ist γ nur stückweise C^1, so erhält man gleiches Resultat unter Auswertung einer Teleskopsumme. Damit ist f konservativ.

"$\Rightarrow$": Agn. f ist konservativ. Sei $x_0 \in U$ fest. Dann ex. für alle $x \in U$ ein stückweise C^1-Weg γ_x von x_0 nach x.
Wir def.

$$F : U \longrightarrow \mathbb{R}, \; x \longmapsto \int_{\gamma_x} f \cdot ds,$$

was wohldef. ist, da f konservativ ist. zz: $\forall k \in \{1, \ldots, n\}: \partial_k F = f_k$.
Sei $x \in U$ und $h \in \mathbb{R}$ klein genug Für $x + he_k$ verwenden wir

$$\gamma_{x+he_k}(t) := \begin{cases} \gamma_x(t) & \text{für } t \in [a_x, b_x] \\ x + (t-b_x)\cdot he_k & \text{für } t \in [b_x, b_x+1] \end{cases}$$ $(\leadsto \gamma_x : [a_x, b_x] \longrightarrow U)$



Daraus folgt

$$\partial_k F(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(F(x+he_k) - F(x))$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_{\gamma_{x+he_k}} f \cdot ds - \int_{\gamma_x} f \cdot ds\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \int_{b_x}^{b_x+1} \langle f(x + (t-b_x)\cdot he_k, \cancel{h}e_k \rangle dt$$ Subst.: $r = t - b_x$

$$= \lim_{h\to 0} \int_0^1 \underbrace{\langle f(x + rhe_k, e_k \rangle}_{f_k(x+rhe_k)} dr$$ 11.36

$$= f_k(x).$$

Da $f_1, \ldots, f_n$ per Annahme stetig sind, folgt aus 11.10, dass F diffbar ist und es gilt $\nabla F = f$.

Sei nun f konservativ und C^1. Dann ex. nach Obigem ein F mit $\nabla F = f$. Mit dem Satz von Schwarz folgt

$$\forall j,k \in \{1, \ldots, n\}: \; \partial_j f_k = \partial_j \partial_k F = \partial_k \partial_j F = \partial_k f_j.$$ $\square$

Definition 11.40 (Stückweise differenzierbare Wege und deren Längen)**.** Ein (wie immer stetiger) Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heisst **stückweise (stetig) differenzierbar**, falls eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{a = s_0 < \ldots < s_K = b\}$ von $[a,b]$ existiert, so dass $\gamma|_{[s_{k-1},s_k]}$ für alle $k \in \{1, \ldots, K\}$ stetig differenzierbar ist. Die Länge des stückweise differenzierbaren Weges γ ist definiert durch

$$L(\gamma) = \sum_{k=1}^K L(\gamma_k) = \sum_{k=1}^K \int_{s_{k-1}}^{s_k} \left\| (\gamma|_{[s_{k-1},s_k]})'(s) \right\| \mathrm{d}s.$$

Eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ wie oben werden wir eine für die stückweise differenzierbare Funktion **erlaubte Zerlegung** nennen.

Definition 11.43 (Wegintegral eines Vektorfelds)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Wir definieren das **Wegintegral des Vektorfelds** f entlang eines stetig differenzierbaren Weges $\gamma : [a,b] \to U$ durch

$$\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}s = \int_a^b \langle f(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle \, \mathrm{d}s$$

Ist $\gamma : [a,b] \to U$ stückweise differenzierbar und $\mathfrak{Z} = \{a = s_0 < s_1 < \ldots < s_K = b\}$ eine erlaubte Zerlegung von $[a,b]$ für γ, so setzt man wiederum

$$\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}s = \sum_{k=1}^K \int_{\gamma|_{[s_{k-1},s_k]}} f \cdot \mathrm{d}s.$$

Definition 11.46. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann heisst f **konservativ**, falls Wegintegrale des Vektorfelds f nur von Anfangs- und Endpunkt abhängen. Genauer formuliert, falls für alle stückweise stetig differenzierbaren Wege $\gamma : [a,b] \to U$ und $\eta : [a',b'] \to U$ mit $\gamma(a) = \eta(a')$ und $\gamma(b) = \eta(b')$ gilt

$$\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}s = \int_\eta f \cdot \mathrm{d}s.$$

Eine **Schlaufe** in einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Weg mit gleichem Anfangs- und Endpunkt (das heisst, ein Weg $\gamma : [a,b] \to U$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$). Ob ein Vektorfeld konservativ ist oder nicht, lässt sich auch mit Schlaufen charakterisieren.

Übung 11.48 (Schlaufencharakterisierung)**.** *Zeigen Sie, dass ein stetiges Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ auf einem Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann konservativ ist, wenn für jede stückweise stetig differenzierbare Schlaufe γ in U gilt $\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}s = 0$.*

Satz 11.52 (Integrabilitätsbedingungen auf sternförmigen Gebieten). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig. Ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann konservativ, wenn f den Integrabilitätsbedingungen*

$$\partial_k f_j = \partial_j f_k$$

für alle $j, k \in \{1, \dots, n\}$ genügt.

<u>Bew:</u> "$\Rightarrow$": Folgt direkt aus 11.49.

"$\Leftarrow$": Sei U OBdA sternförmig bzgl. $z = 0$. Def

$$F : U \to \mathbb{R},\ x \longmapsto \int_0^1 \langle f(\overbrace{tx}^{\in U}), x \rangle \, dt$$

Für $j \in \{1, .., n\}$ und $x \in U$ gilt dann

$$\partial_j F(x) = \partial_j \int_0^1 \langle f(tx), x \rangle \, dt \quad \rightsquigarrow \text{Parameterintegral}$$

$$= \partial_j \int_0^1 \sum_{k=1}^n f_k(tx) \cdot x_k \, dt$$

11 36

$$= \int_0^1 \Big(\sum_{k=1}^n \partial_j f_k(tx) t x_k + \underbrace{f_j(tx)}_{\text{Term aus Produktregel für } k=j} \Big) \, dt$$

aus Kettenregel

Integrabilitätsbed.

$$= \int_0^1 \Big(\sum_{k=1}^n \partial_k f_j(tx) t x_k + f_j(tx) \Big) \, dt$$

$$= \int_0^1 \Big(t \underbrace{\langle \nabla f_j(tx), x \rangle}_{((D_{tx} f_j(tx))^T)^T x \,=\, D_{tx} f_j(tx) \cdot x \,=\, \frac{d}{dt} f_j(tx)} + f_j(tx) \Big) \, dt$$

Kettenregel

$$= \int_0^1 t \frac{d}{dt} f_j(tx) + f_j(tx) \, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} \big(t \cdot f_j(tx) \big) \, dt$$

$$= t \cdot f_j(tx) \Big|_0^1 = f_j(x).$$

Also gilt $\nabla F = f$ und damit ist f nach 11.49 konservativ. $\square$

12. Anfänge der Differentialgeometrie

Satz 12.1 (Stetige lokale Lösungsfunktion). *Sei $r > 0$ ein Radius und seien $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$ Punkte. Wir betrachten die offene Teilmenge*

$$B_r^{\mathbb{R}^n}(x_0) \times B_r^{\mathbb{R}^m}(y_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid \|x - x_0\|_2 < r \text{ und } \|y - y_0\|_2 < r\}$$

von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Sei $F : B_r^{\mathbb{R}^n}(x_0) \times B_r^{\mathbb{R}^m}(y_0) \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Funktion, die die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

- *$F(x_0, y_0) = 0$.*
- *Die partiellen Ableitungen*

  $$\partial_{y_k} F : B_r^{\mathbb{R}^n}(x_0) \times B_r^{\mathbb{R}^m}(y_0) \to \mathbb{R}^m$$

  existieren für alle $k \in \{1, \ldots, m\}$ und sind auf $B_r^{\mathbb{R}^n}(x_0) \times B_r^{\mathbb{R}^m}(y_0)$ stetig.
- *Die totale Ableitung A bei y_0 der Abbildung $y \in B_r(y_0) \mapsto F(x_0, y)$ ist invertierbar, das heisst, die Matrix $A = (\partial_{y_k} F_j(x_0, y_0))_{j,k} \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ hat nicht-verschwindende Determinante.*

Dann existiert ein offener Ball $U_0 = B_\alpha(x_0)$ um x_0 und ein offener Ball $V_0 = B_\beta(y_0)$ um y_0 mit $\alpha, \beta \in (0, r)$ und eine stetige Funktion $f : U_0 \to V_0$, so dass für alle $(x,y) \in U_0 \times V_0$ die Gleichung $F(x,y) = 0$ genau dann gilt, wenn $y = f(x)$ gilt. Insbesondere ist $f(x_0) = y_0$.

<u>Bew-Idee:</u>

1) Für festes $x \in B_r(x_0)$ def.
   - $F_x : y \in B_r(y_0) \longmapsto F(x,y) \in \mathbb{R}^m$
   - $T_x : y \in B_r(y_0) \longmapsto y - \underbrace{A^{-1}}_{\text{ex. nach Voraussetzung}} F_x(y) \in \mathbb{R}^m$ $\quad (A = D_{y_0} F_{x_0})$

   Damit gilt $F(x,y) = 0$ g.d.w. $T_x(y) = y$ $\rightsquigarrow$ y Fixpunkt von T_x

2) Zeige die Kontraktionseigenschaft von T_x:

   Es gilt $D_y T_x = I_m - A^{-1} \underbrace{D_y F_x}_{\text{stetig, da } F_x\ C^1 \text{ ist}}$ $\rightsquigarrow$ stetig

   und
   $$D_{y_0} T_{x_0} = A^{-1}(A - \underbrace{D_{y_0} F_{x_0}}_{A}) = 0.$$
   Also ex ein $\delta \in (0, r)$ mit
   $$\forall (x,y) \in B_\delta(x_0) \times B_\delta(y_0) : \quad \|D_y T_x\|_{op} \leq \tfrac{1}{2}.$$
   Sei $x \in B_\delta(x_0)$. Nun folgt für alle $y_1, y_2 \in B_\delta(y_0)$
   $$\begin{aligned} \|T_x(y_1) - T_x(y_2)\| &= \Big\| \int_0^1 (D_{y_1 + t(y_2 - y_1)} T_x) \overbrace{(y_2 - y_1)}^{\text{von Kettenregel}} \, dt \Big\| \\ &\leq \int_0^1 \|D_{y_1 + t(y_2 - y_1)} T_x)\|_{op} \cdot \|y_2 - y_1\| \, dt \\ &\leq \tfrac{1}{2} \cdot \|y_2 - y_1\|. \end{aligned}$$

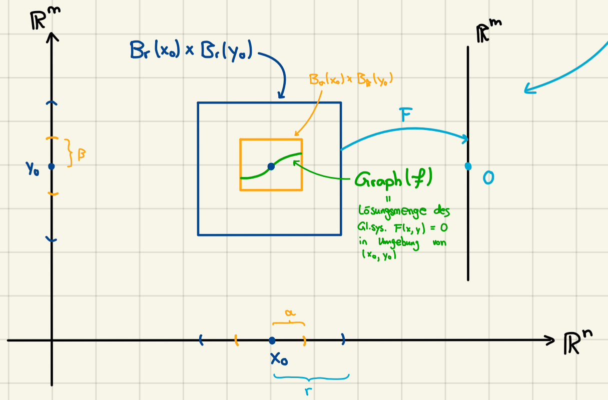
3) T_x als Selbstabbildung:

   Mit der Stetigkeit von F finden wir $\alpha, \beta \in (0, \delta)$, s.d.
   $$\forall x \in X : \quad T_x(Y) \subseteq Y$$
   für $X = \overline{B_\alpha(x_0)}$ und $Y := \overline{B_\beta(y_0)}$.

4) Nach dem Banachschen Fixpunktsatz ex. für jedes $x \in X$ ein eindeutiges $y \in Y$ mit $T_x(y) = y \iff F(x,y) = 0$.
   Dies def. eine Funktion $f : B_\alpha(x_0) \longrightarrow B_\beta(y_0)$ mit den gewünschten Eigenschaften.

5) Stetigkeit der Lösungsfunktion f:

   Um dies zu zeigen wiederhole obiges Argument für alle $x \in \overline{B_\alpha(x_0)}$ "gleichzeitig". Benutze also wiederum eine Lipschitz-Kontraktion auf dem Raum
   $$\tilde{Y} := \{ g : \overline{B_\alpha(x_0)} \longrightarrow Y \mid g \text{ ist stetig} \} \subseteq C(\overline{B_\alpha(x_0)}, \mathbb{R}).$$
   $\square$



Satz 12.2 (Differenzierbarkeit der lokalen Lösungsfunktion). *Seien $r > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$ und $F : B_r(x_0) \times B_r(y_0) \to \mathbb{R}^m$ mit den Eigenschaften aus Satz 12.1 und sei $f : U_0 \to V_0$ die stetige lokale Lösungsfunktion aus Satz 12.1. Angenommen F ist d-mal stetig differenzierbar für $d \geq 1$. Dann ist die stetige Lösungsfunktion f ebenso d-mal stetig differenzierbar und die Ableitung von f bei $x \in U_0$ ist durch*

$$\mathrm{D}_x f = -((\boldsymbol{\partial}_y F)(x, f(x)))^{-1} (\boldsymbol{\partial}_x F)(x, f(x)) \tag{12.3}$$

gegeben.

Falls bereits bekannt wäre, dass f in der Tat differenzierbar ist, so würde (12.3) auch aus der Kettenregel folgen. Um dies zu sehen, nehmen Sie zuerst $m = n = 1$ an und wenden die Kettenregel auf $F(x, f(x)) = 0$ an. Der allgemeine Fall ist bloss in der Notation schwieriger.

Dabei bezeichnet $\boldsymbol{\partial}_x F(x,y)$ die Matrix der partiellen Ableitungen von F in den Koordinatenrichtungen der Variable $x \in B_r(x_0)$ ausgewertet an der Stelle (x,y), das heisst,

$$\boldsymbol{\partial}_x F(x,y) = \left(\partial_{x_j} F_i(x,y)\right)_{ij} \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R}).$$

Alternativ könnte man, konform mit unserer bisherigen Notation, auch schreiben

$$\boldsymbol{\partial}_x F(x,y) = \mathrm{D}_x(F(\cdot, y)),$$

womit also $\boldsymbol{\partial}_x F(x,y)$ die Ableitung nach x unter Festhalten von y an der Stelle (x,y) bezeichnet. Analog ist $\boldsymbol{\partial}_y F(x,y)$ die Ableitung nach y unter Festhalten von x an der Stelle (x,y)

$$\boldsymbol{\partial}_y F(x,y) = \left(\partial_{y_j} F_i(x,y)\right)_{ij} \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R}).$$

Satz 12.5 (Satz zur inversen Abbildung). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine d-mal stetig differenzierbare Funktion mit $d \geq 1$. Sei $x_0 \in U$ mit invertierbarer totaler Ableitung $\mathrm{D}_{x_0} f \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ (das heisst, x_0 ist ein regulärer Punkt von f). Dann gibt es eine offene Umgebung $U_0 \subseteq U$ von x_0 und eine offene Umgebung $V_0 \subseteq f(U)$ von $y_0 = f(x_0)$, so dass $f|_{U_0} : U_0 \to V_0$ bijektiv ist und die Umkehrabbildung ebenso d-mal stetig differenzierbar ist. Des Weiteren gilt*

$$\mathrm{D}_y(f^{-1}) = (\mathrm{D}_x f)^{-1}$$

für alle $x \in U_0$ und $y = f(x) \in V_0$.

Bew: Sei $F : U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(x,y) \longmapsto y - f(x)$. Wir wollen dies mittels 12.1 nach x auflösen!
Sei $r > 0$ mit $B_r(x_0) \subseteq U$ und betrachte ab jetzt F auf $B_r(x_0) \times B_r(y_0)$.
Nun gilt:
- $F(x_0, y_0) = 0$
- F ist d-mal stetig diffbar
- $\partial_x F(x_0, y_0) = -\mathrm{D}_{x_0} F$ invbar nach Annahme

Also ex. nach 12.1 $\alpha, \beta \in (0, r)$ und eine C^d-Funktion

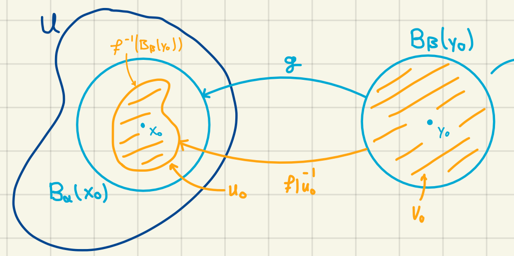
$$g : B_\beta(y_0) \longrightarrow B_\alpha(x_0),$$

so dass $\forall (x,y) \in B_\alpha(x_0) \times B_\beta(y_0)$ gilt

$$g(y) = x \iff F(x,y) = 0 = y - f(x) \iff f(x) = y.$$

Def. nun $V_0 := B_\beta(y_0)$ und $U_0 := g(V_0) = \underbrace{f^{-1}(B_\beta(y_0))}_{\text{Urbild}}$ offen.

Damit ist nun $f|_{U_0} : U_0 \longrightarrow V_0$ bijektiv, also invbar, und nach 12.2 auch d-mal stetig diffbar. □



Korollar 12.8 (Kriterium für Diffeomorphie). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine d-mal stetig differenzierbare, injektive Funktion mit $d \geq 1$. Angenommen jeder Punkt $x \in U$ hat die Eigenschaft, dass $\mathrm{D}_x f$ invertierbar ist (oder in anderen Worten: jeder Punkt in U ist regulär). Dann ist $V = f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to V$ ist ein C^d-Diffeomorphismus mit*

$$\mathrm{D}_y(f^{-1}) = (\mathrm{D}_x f)^{-1}$$

für alle $x \in U$ und $y = f(x) \in V$.

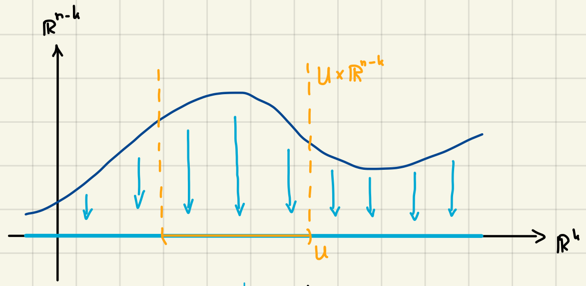
Bew: Da f inj. ist, ist $f^{-1} : V \longrightarrow U$ bijektiv. Für $y_0 \in V$ und $x_0 = f^{-1}(y_0)$ ex. nach 12.5 offene Umgebungen U_0 von x_0 und V_0 von y_0 mit
$V_0 = f(U_0) \subseteq f(U) = V$,
womit V offen ist. Ausserdem ist $f^{-1}|_{V_0} = (f|_{U_0})^{-1}$ nach 12.5 auch d-mal stetig diffbar. □

Bsp: a) Jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine n-dim. Tmfg. von $\mathbb{R}^n$.
$\rightsquigarrow$ wähle $\varphi_p = \mathrm{id}_U : U \to U \quad \forall p \in U$
Umgekehrt ist jede n-dim. Tmfg. von $\mathbb{R}^n$ eine offene Menge.

b) Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist diskret, falls für alle $p \in M$ ein $\varepsilon > 0$ ex mit $M \cap B_\varepsilon(p) = \{p\}$.
Jede diskrete Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine 0-dim. Tmfg.
$\rightsquigarrow$ wähle $\varphi_p : B_\varepsilon(p) \longrightarrow B_\varepsilon(0)$, $x \longmapsto x - p$.

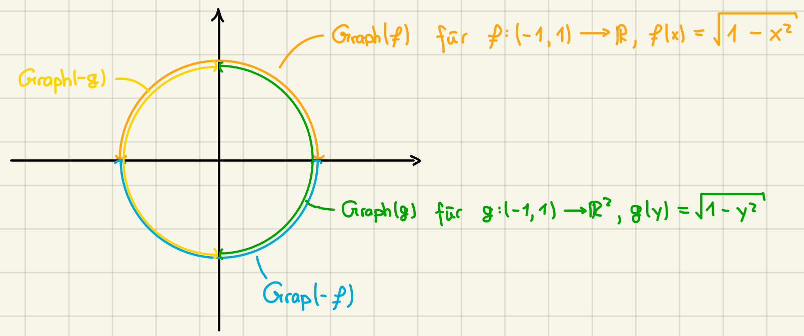
c) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $0 < k < n$. Ist $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ C^∞, so ist $M = \mathrm{Graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$ eine k-dim Tmfg. von $\mathbb{R}^n$
Für $p = (x_0, f(x_0)) \in M$ wähle $U_p = V_p = U \times \mathbb{R}^{n-k}$,

$$\varphi = \varphi_p : U_p \longrightarrow V_p, \quad \varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y - f(x) \end{pmatrix}$$



Dann ist $\mathrm{D}_{(x,y)}\varphi = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline -\mathrm{D}_x f & I_{n-k} \end{array}\right) \rightsquigarrow \varphi$ ist also ein Diffeom.

d) Die (Einheits-)sphäre $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ ist eine $(n-1)$-dim. Tmfg. von $\mathbb{R}^n$, da sie sich lokal als Flt. von $n-1$ der n Variablen $x_1, \dots, x_n$ darstellen lässt.
ZB. $n = 2$: $\quad S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$



Definition 12.6 (Diffeomorphismus). Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine bijektive, glatte Funktion $f : U \to V$ mit glatter Inversen $f^{-1} : V \to U$ wird ein (glatter) **Diffeomorphismus** genannt. Sind f und f^{-1} jeweils bloss d-mal stetig differenzierbar für $d \geq 1$, so nennen wir f einen C^d-**Diffeomorphismus**.

Die **Polarkoordinatenabbildung** ist durch

$$f : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\})$$
$$(r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

definiert und bildet einen Diffeomorphismus. In der Tat ist f bijektiv (nach Abschnitt 7.6.4) und hat bei $(r, \varphi) \in (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

mit Determinante $r \neq 0$, womit nach Korollar 12.8 die Abbildung f ein Diffeomorphismus ist.

Des Weiteren kann man natürlich f auch auf den Punkten in $\{0\} \times \mathbb{R}$ durch $(0,0)^t$ definieren, doch wäre f bei diesen nicht lokal invertierbar.

Eine dreidimensionale Verallgemeinerung der Polarkoordinaten stellen die **Zylinderkoordinaten** dar. Die entsprechende Abbildung ist der Diffeomorphismus

$$f : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\} \times \mathbb{R})$$
$$(r, \varphi, z) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

mit Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und Jacobi-Determinante r bei $(r, \varphi, z) \in (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$.

Eine weitere Verallgemeinerung der Polarkoordinaten für den dreidimensionalen Raum stellen die **Kugelkoordinaten** dar. Hier werden ein Radius $r \in (0, \infty)$ und zwei Winkel $\theta \in (0, \pi)$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$ verwendet, wobei θ den Winkel eines Punktes relativ zum Nordpol der Sphäre $\mathbb{S}^2$ und φ den Winkel der Projektion auf die xy-Ebene relativ zu $(1,0,0)^t$ angeben soll. Der entsprechende Diffeomorphismus ist also gegeben durch

$$f : (0, \infty) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\} \times \mathbb{R})$$
$$(r, \theta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Für $(r, \theta, \varphi) \in (0, \infty) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi)$ ist die Jacobi-Matrix durch

$$\mathrm{D}_{(r,\theta,\varphi)} f = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

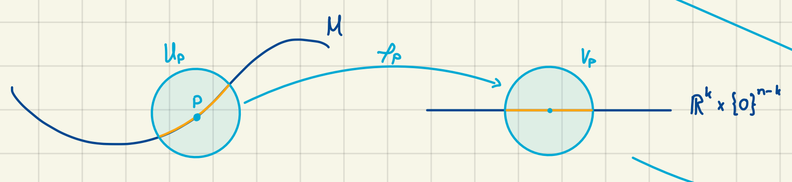
gegeben und die Jacobi-Determinante (nach der Regel von Sarrus) durch

$$\begin{aligned} \det\left(\mathrm{D}_{(r,\theta,\varphi)} f\right) &= r^2 \sin\theta\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^3\theta\sin^2\varphi \\ &\quad + r^2\sin\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^3\theta\cos^2\varphi \\ &= r^2(\sin\theta\cos^2\theta + \sin^3\theta) = r^2\sin\theta \neq 0 \end{aligned}$$

gegeben.

Definition 12.10. Sei $0 \leq k \leq n$ für $n \geq 1$. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine k-dimensionale (glatte) **Teilmannigfaltigkeit**, falls für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung U_p in $\mathbb{R}^n$ von p und ein Diffeomorphismus $\varphi_p : U_p \to V_p = \varphi_p(U_p)$ auf eine weitere offene Teilmenge $V_p \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert, so dass

$$\varphi_p(U_p \cap M) = \{y \in V_p \mid y_i = 0 \text{ für alle } i > k\} = V_p \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k})$$



Proposition 12.12 (Lokale Darstellbarkeit durch Graphen). *Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit, wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung U_p von p in $\mathbb{R}^n$, eine glatte Funktion $f_p : \tilde{U}_p \to \mathbb{R}^{n-k}$ auf einer offenen Teilmenge $\tilde{U}_p \subseteq \mathbb{R}^k$ und ein $\sigma \in S_n$ gibt, so dass*

$$M \cap U_p = P_\sigma(\mathrm{Graph}(f_p)).$$

Theorem 12.16 (Satz über den konstanten Rang). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq m < n$ und $F : U \to \mathbb{R}^m$ eine glatte Funktion, so dass F keine kritischen Punkte in $M = \{p \in U \mid F(p) = 0\}$ besitzt (das heisst, D_pF hat Rang m für alle $p \in M$ beziehungsweise 0 ist ein regulärer Wert von F). Dann ist M eine $(n-m)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.*

$M = F^{-1}\{0\}$

!

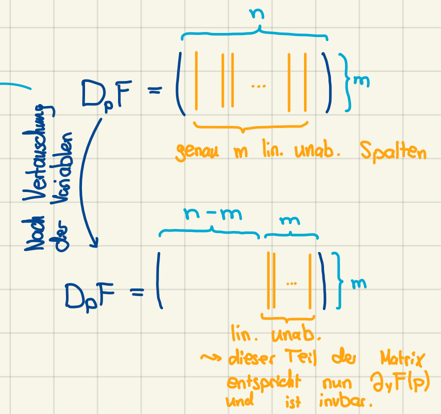
Bew: Sei $p = (x_0, y_0) \in M$. Es gilt $\mathrm{Rang}(D_pF) = \min(m,n) = m$.
Nach Vertauschung der Koord. und Umbenennen in $(x_1, \dots, x_{n-m}, y_1, \dots, y_m)$ können wir annehmen, dass $\partial_y F(p)$ invbar ist.
Sei $r > 0$ mit $B_r(x_0) \times B_r(y_0) \subseteq U$. Nach 12.1/12.2 ex. $\alpha, \beta \in (0, r)$ und $f : B_\alpha(x_0) \longrightarrow B_\beta(y_0)$ glatt, s.d.

$$M \cap \underbrace{(B_\alpha(x_0) \times B_\beta(y_0))}_{=: U_0} = \mathrm{Graph}(f)$$

gilt.
Def. einen Diffeomorphismus

$$\varphi_p : U_p \longrightarrow \varphi(U_p),\ (x,y) \longmapsto (x, y - f(x)) \quad \rightsquigarrow \text{vgl. Bsp. (c)}$$

□



Satz 12.21 (Lokale Beschreibung des Tangentialbündels). *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit.*

- *Sei $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung und sei $\varphi : U_0 \to V_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus mit*

$$\varphi(U_0 \cap M) = \{y \in V_0 \mid y_{k+1} = \ldots = y_n = 0\} = V_0 \cap \mathbb{R}^k$$

wie in Definition 12.10. Wir definieren $\psi = \varphi^{-1} : V_0 \to U_0$ und die Ableitung

$$\mathrm{D}\psi : \mathrm{T}V_0 \to \mathrm{T}U_0$$
$$(y,h) \mapsto (\psi(y), \mathrm{D}_y\psi(h)).$$

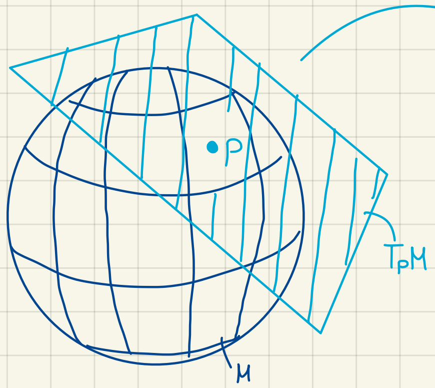
Dann ist die Einschränkung von $\mathrm{D}\psi$ eine Bijektion von $\mathrm{T}(V_0 \cap \mathbb{R}^k) = (V_0 \cap \mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k$ nach $\mathrm{T}(U_0 \cap M)$. Insbesondere ist T_pM ein k-dimensionaler Unterraum von $\mathrm{T}_p\mathbb{R}^n$ für alle $p \in M$.

Zudem gilt für jedes $p \in M$
$$\mathrm{T}_pM = \{p\} \times D_{\varphi(p)}\psi(\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k})$$

- *Angenommen $M = \{x \in U \mid F(x) = 0\}$ ist gegeben als Niveaumenge einer glatten Funktion $F : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass 0 ein regulärer Wert von F ist (wie im Theorem 12.16 über den konstanten Rang). Dann ist*

$$\mathrm{T}M = \{(p,v) \in M \times \mathbb{R}^n \mid \mathrm{D}_pF(v) = 0\}.$$

Zudem gilt für jedes $p \in M$
$$\mathrm{T}_pM = \{p\} \times \ker(D_pF).$$



Definition 12.20 (Tangentialraum). Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit. Der **Tangentialraum** (oder **Phasenraum**) von M bei $p \in M$ ist durch

$$\mathrm{T}_pM = \{(p, \gamma'(0)) \mid \exists \varepsilon > 0,\ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \text{ differenzierbar mit } \gamma(0) = p\}$$
$$\subseteq \mathrm{T}_p\mathbb{R}^n = \{p\} \times \mathbb{R}^n$$

und das **Tangentialbündel** von M durch

$$\mathrm{T}M = \bigsqcup_{p \in M} \mathrm{T}_pM \subseteq \mathrm{T}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

definiert.

Proposition 12.26 (Notwendige Bedingungen für Extrema mit Nebenbedingungen). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $M \subseteq U$ eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Weiter sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Angenommen $f|_M$ nimmt in $p \in M$ ein lokales Extremum an. Dann ist $\nabla f(p)$ ein* ***Normalenvektor*** *an M bei p, das heisst, es gilt $\langle \nabla f(p), v \rangle = 0$ für alle $(p,v) \in \mathrm{T}_pM$.*

Bew: Seien $(p,v) \in T_pM$, $\varepsilon > 0$ und $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ mit $\gamma(0) = p$ (wie in der Def. von T_pM) ein C^1-Weg.
Da f in p ein lokales Extremum annimmt, nimmt $f \circ \gamma$ in 0 ebenfalls ein lokales Extremum an. Also folgt mit der Kettenregel

$$0 = (\underbrace{f \circ \gamma}_{\mathbb{R} \to \mathbb{R}})'(0) = D_pf \cdot \underbrace{\gamma'(0)}_{v} = \langle \nabla f(p), v \rangle.$$

□

Korollar 12.28 (Notwendige Bedingungen mit Lagrange-Multiplikatoren). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $M = \{x \in U \mid F(x) = 0\}$ eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit gegeben als Niveaumenge durch eine glatte Funktion $F : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ mit regulärem Wert 0 (siehe Theorem 12.16).*

!

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, für die $f|_M$ in $p \in M$ ein lokales Extremum annimmt, und sei L die zu M und f gehörige Lagrange-Funktion. Dann existieren Lagrange-Multiplikatoren $\lambda \in \mathbb{R}^{n-k}$, so dass die Gleichungen

$$\partial_{x_i} L(p, \lambda) = 0, \quad \partial_{\lambda_j} L(p, \lambda) = 0$$

für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $j \in \{1, \ldots, n-k\}$ erfüllt sind. Dabei ist zu $(x, \lambda) \in U \times \mathbb{R}^{n-k}$

$$\partial_{x_i} L(x, \lambda) = \partial_i f(x) - \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j \partial_i F_j(x), \quad \partial_{\lambda_j} L(x, \lambda) = -F_j(x) \tag{12.6}$$

für $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $j \in \{1, \ldots, n-k\}$.

Bsp: Bestimme das absolute Max/Min von

$$f : (x,y,z) \longmapsto x^2 + 2y + 4z$$

auf $S^2(\overset{\text{Radius}}{3}) = F^{-1}\{0\}$ für

$$F : (x,y,z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2 - 9.$$

Gleichungssystem

$$\cdot\ \nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \nabla F(x,y,z)$$

$$\cdot\ F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0.$$

- $x \neq 0$: $\lambda = 1$, $y = 1$, $z = 2$, $x^2 = 4 \rightsquigarrow x = \pm 2$.
  $\rightsquigarrow$ Einsetzen: $f(x,y,z) = 14$
- $x = 0$: $z = \frac{2}{\lambda} = 2y$, $5y^2 = 9$, $y = \pm\frac{3}{\sqrt{5}}$, $z = \pm\frac{6}{\sqrt{5}}$.
  $\rightsquigarrow$ Einsetzen: $f(x,y,z) = \pm 6\sqrt{5}$

$\Longrightarrow$ Max. 14 in $(\pm 2, 1, 2)$, Min. $-6\sqrt{5}$ in $(0, -3/\sqrt{5}, -6/\sqrt{5})$.

Definition 12.27. Die **Lagrange-Funktion** $L : U \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}$ für eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ ist durch

$$L : (x, \lambda) \in U \times \mathbb{R}^{n-k} \mapsto L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j F_j(x)$$

definiert. Die Komponenten von λ werden auch **Lagrange-Multiplikatoren** genannt.

13. Mehrdimensionale Integralrechnung

Lemma 13.5. *Seien $\mathfrak{Z} = (\mathfrak{Z}_1, \ldots, \mathfrak{Z}_n)$ und $\mathfrak{Z}' = (\mathfrak{Z}'_1, \ldots, \mathfrak{Z}'_n)$ zwei Zerlegungen eines abgeschlossenen Quaders Q. Dann gilt $U(f, \mathfrak{Z}) \leq O(f, \mathfrak{Z}')$ für jede beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$. Falls des Weiteren $\mathfrak{Z}'$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{Z}$ ist (das heisst, für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ die Zerlegung $\mathfrak{Z}'_k$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{Z}_k$ ist), dann gilt*

$$U(f, \mathfrak{Z}) \leq U(f, \mathfrak{Z}') \leq O(f, \mathfrak{Z}') \leq O(f, \mathfrak{Z}).$$

Insbesondere gilt für eine beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ die Ungleichung $\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$.

Proposition 13.6 (Eine erste Charakterisierung von Riemann-Integrierbarkeit). *Sei f eine beschränkte reellwertige Funktion auf einem abgeschlossenen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Funktion f ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von Q mit $O(f, \mathfrak{Z}) - U(f, \mathfrak{Z}) < \varepsilon$ existiert.*

Proposition 13.7 (Linearität des Riemann-Integrals). *Seien f_1, f_2 Riemann-integrierbare reellwertige Funktionen auf einem abgeschlossenen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ und $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. Dann ist auch die Linearkombination $s_1 f_1 + s_2 f_2$ Riemann-integrierbar und es gilt*

$$\int_Q (s_1 f_1 + s_2 f_2) \,\mathrm{dvol} = s_1 \int_Q f_1 \,\mathrm{dvol} + s_2 \int_Q f_2 \,\mathrm{dvol}.$$

Proposition 13.8 (Monotonie und die Dreiecksungleichung des Riemann-Integrals). *Sei Q ein abgeschlossener Quader. Für zwei Riemann-integrierbare Funktionen $f_1, f_2 : Q \to \mathbb{R}$ gelten folgende Monotonie-Eigenschaften:*

(i) Falls $f_1 \geq 0$ ist, so gilt $\int_Q f_1 \,\mathrm{dvol} \geq 0$.

(ii) Falls $f_1 \leq f_2$ ist, so gilt $\int_Q f_1 \,\mathrm{dvol} \leq \int_Q f_2 \,\mathrm{dvol}$.

(iii) Die Funktion $|f_1| : Q \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar und es gilt die Dreiecksungleichung

$$\left| \int_Q f_1 \,\mathrm{dvol} \right| \leq \int_Q |f_1| \,\mathrm{dvol}.$$

Proposition 13.11 (Stetigkeit als Vorraussetzung). *Sei Q ein abgeschlossener Quader mit nicht-leerem Inneren. Dann ist jede stetige Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ auch Riemann-integrierbar.*

__Bew:__ Q ist nach Heine-Borel kompakt und damit ist f nach 10.64 glm. stetig. Sei $\varepsilon > 0$ Dann ex. ein $\delta > 0$ s.d.

$$\forall x_1, x_2 \in Q: \quad \|x_1 - x_2\|_\infty < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Sei nun Z eine hinreichend feine Zerlegung ("Maschenweite" $< \delta$).
Dann gilt

$$O(f, Z) - U(f, Z) = \sum_{Q_\alpha \sqsubset Z} \underbrace{(\sup(f(Q_\alpha)) - \inf(f(Q_\alpha))}_{<\varepsilon} \cdot \mathrm{vol}(Q_\alpha)$$

$$\leq \sum_{Q_\alpha \sqsubset Z} \varepsilon \cdot \mathrm{vol}(Q_\alpha) = \varepsilon \,\mathrm{vol}(Q),$$

womit f nach 13.6 R-intbar ist. $\square$

Proposition 13.13 (Sandwich-Charakterisierung mit stetigen Funktionen). *Sei Q ein abgeschlossener Quader mit nichtleerem Inneren und $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt. Die Funktion f ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ zwei stetige Funktionen $f_-, f_+ : Q \to \mathbb{R}$ gibt, die*

$$f_- \leq f \leq f_+ \quad \text{und} \quad \int_Q (f_+ - f_-) \,\mathrm{dvol} < \varepsilon$$

erfüllen.

Lemma 13.17 (Eigenschaften von Nullmengen). *Eine Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge. Eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wiederum eine Nullmenge.*

↳ Insbesondere ist jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ (z.B. $\mathbb{Q}^n$) eine Nullmenge.

__Bew:__ Sei $(N_j)_j$ eine Folge von Nullmengen im $\mathbb{R}^n$ und $N := \bigcup_{j=1}^\infty N_j$. Sei $\varepsilon > 0$.
Per Def. ex. für jedes $j \in \mathbb{N}$ eine Folge von offenen Quadern $(Q_{j,\ell})_\ell$ mit $N_j \subseteq \bigcup_{\ell=1}^\infty Q_{j,\ell}$ und $\sum_{\ell=1}^\infty Q_{j,\ell} < \frac{\varepsilon}{2^j}$.
Daraus folgt

$$N = \bigcup_{j=1}^\infty N_j \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty \bigcup_{\ell=1}^\infty Q_{j,\ell} \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^\infty \sum_{\ell=1}^\infty Q_{j,\ell} < \underbrace{\sum_{j=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^j}}^{\text{geom. Reihe}} = \varepsilon.$$

Damit ist N auch eine Nullmenge. $\square$

Definition 13.1 (Volumen von Quadern). Für $n \geq 1$ und beschränkte nichtleere Intervalle $I_1, \ldots, I_n$ ist das **Volumen** des n-dimensionalen Quaders $Q = I_1 \times \cdots \times I_n$ durch

$$\mathrm{vol}(Q) = \mathrm{vol}(\overline{Q}) = \mathrm{vol}(Q^\circ) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$$

definiert, wobei $a_k = \inf I_k$ und $b_k = \sup I_k$ für $k = 1, \ldots, n$ ist.

Definition 13.2 (Zerlegung von Q). Sei der Quader Q wie oben. Für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ sei

$$\mathfrak{Z}_k = \{a_k = x_{k,0} < x_{k,1} < \ldots < x_{k,A(k)} = b_k\}$$

eine Zerlegung von $[a_k, b_k]$. Dann bezeichnen wir

$$\mathfrak{Z} = (\mathfrak{Z}_1, \ldots, \mathfrak{Z}_n)$$

als eine **Zerlegung des Quaders** Q und die offenen Quader

$$Q_{\boldsymbol{\alpha}} = (x_{1,\alpha_1-1}, x_{1,\alpha_1}) \times \ldots \times (x_{n,\alpha_n-1}, x_{n,\alpha_n})$$

für $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ mit $\alpha_k \in \{1, \ldots, A(k)\}$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ als die **der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ entsprechenden (offenen) Teilquader**. Wir werden für die der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ entsprechenden offenen Teilquader kurz auch $Q_{\boldsymbol{\alpha}} \sqsubset \mathfrak{Z}$ schreiben (für $\boldsymbol{\alpha}$ implizit wie oben).

Definition 13.4 (Riemann-Integral auf Quadern). Für eine beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ auf einem abgeschlossenen Quader Q und eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von Q definieren wir die **Untersumme**

$$U(f, \mathfrak{Z}) = \sum_{Q_{\boldsymbol{\alpha}} \sqsubset \mathfrak{Z}} \inf(f(Q_{\boldsymbol{\alpha}})) \,\mathrm{vol}(Q_{\boldsymbol{\alpha}})$$

und die **Obersumme**

$$O(f, \mathfrak{Z}) = \sum_{Q_{\boldsymbol{\alpha}} \sqsubset \mathfrak{Z}} \sup(f(Q_{\boldsymbol{\alpha}})) \,\mathrm{vol}(Q_{\boldsymbol{\alpha}}).$$

Das **untere Integral** von f wird durch

$$\underline{I}(f) = \sup \{U(f, \mathfrak{Z}) \mid \mathfrak{Z} \text{ ist eine Zerlegung von } Q\}$$

und das **obere Integral** von f durch

$$\overline{I}(f) = \inf \{O(f, \mathfrak{Z}) \mid \mathfrak{Z} \text{ ist eine Zerlegung von } Q\}$$

definiert. Die Funktion f heisst **Riemann-integrierbar**, falls $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$ gilt. Der gemeinsame Wert wird in diesem Fall als das **Riemann-Integral**

$$\int_Q f \,\mathrm{dvol} = \underline{I}(f) = \overline{I}(f)$$

bezeichnet.

Definition 13.16 (Nullmengen). Eine Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ wird eine **Nullmenge** (genauer eine **Lebesgue-Nullmenge** im $\mathbb{R}^n$) genannt, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge $(Q_\ell)_\ell$ von offenen Quadern im $\mathbb{R}^n$ gibt, so dass

$$N \subseteq \bigcup_{\ell=1}^\infty Q_\ell, \quad \sum_{\ell=1}^\infty \mathrm{vol}(Q_\ell) < \varepsilon \tag{13.3}$$

erfüllt sind.

!

Proposition 13.20 (Nicht-Nullmengen)**.** *Ein Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ mit nicht-leerem Inneren ist keine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$.*

d.h. $\mathrm{vol}(Q) > 0$

Bew: Sei Q OBdA abgs. mit $\mathrm{vol}(Q) > 0$. Agn. Q ist eine Nullmenge.
Da Q kompakt ist, ex. endl. viele offene Quader $O_1, \ldots, O_m$ mit

$$Q \subseteq \bigcup_{\ell=1}^{m} O_\ell \quad \text{und} \quad \sum_{\ell=1}^{m} \mathrm{vol}(O_\ell) < \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{=:\varepsilon \rightsquigarrow \text{ kann beliebig gewählt werden}} \mathrm{vol}(Q).$$

Konstruiere nun Zerlegung Z von Q, s.d. für jedes $\ell \in \{1, \ldots, m\}$ die Quader $Q_\alpha \sqsubset Z$ auch $O_\ell \cap Q$ zerlegen.
Dann folgt

$$\mathrm{vol}(Q) = \sum_{Q_\alpha \sqsubset Z} \mathrm{vol}(Q_\alpha) \leq \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{Q_\alpha \subseteq O_\ell} \mathrm{vol}(Q_\alpha) = \sum_{\ell=1}^{m} \mathrm{vol}(O_\ell \cap Q) < \tfrac{1}{2}\mathrm{vol}(Q). \quad ↯$$

Da dies ein Widerspruch ist, ist Q also keine Nullmenge. $\square$

Proposition 13.22. *Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ ein abgeschlossener Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist der Graph*

$$\mathrm{graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in Q\}$$

von f eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.

Bew: Sei $M = \sup|f(Q)|$ und $\varepsilon > 0$. Da f R-intbar ist, ex. eine Zerlegung Z mit $O(f, Z) - U(f, Z) < \varepsilon$.
Zu jedem $Q_\alpha \sqsubset Z$ def. $P_\alpha := Q_\alpha \times [\inf(f(Q_\alpha)), \sup(f(Q_\alpha))]$.
Dann gilt

$$\mathrm{Graph}(f) \subseteq \bigcup_{Q_\alpha \sqsubset Z} P_\alpha \cup \underbrace{\bigcup_{Q_\alpha \sqsubset Z} (\partial Q_\alpha \times [-M, M])}_{\text{Nullmenge ("Raster" der Zerlegung)}}$$

und

$$\sum_{Q_\alpha \sqsubset Z} \mathrm{vol}(P_\alpha) = O(f, Z) - U(f, Z) < \varepsilon. \quad \square$$

Satz 13.23 (Lebesgue-Kriterium für Riemann-Integrierbarkeit)**.** *Sei f eine beschränkte reellwertige Funktion auf einem abgeschlossenen Quader Q. Die Funktion f ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Menge*

$$N = \{x \in Q \mid f \text{ ist unstetig in } x\}$$

eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$ ist.

Definition 13.26 (Jordan-Messbarkeit)**.** Eine Teilmenge B von $\mathbb{R}^n$ heisst **Jordan-messbar**, falls es einen abgeschlossenen Quader Q in $\mathbb{R}^n$ mit $Q \supseteq B$ gibt, so dass die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_B$ auf Q Riemann-integrierbar ist. Das **Volumen** (der **Inhalt** oder das **Jordan-Mass**) ist in diesem Fall durch

$$\mathrm{vol}(B) = \int_Q \mathbb{1}_B \,\mathrm{dvol}$$

definiert.

Korollar 13.27. *Eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn B beschränkt ist und der Rand ∂B eine Nullmenge ist. Falls $B_1, B_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar sind, so sind auch $B_1 \cup B_2$, $B_1 \cap B_2$ und $B_1 \setminus B_2$ Jordan-messbar.*

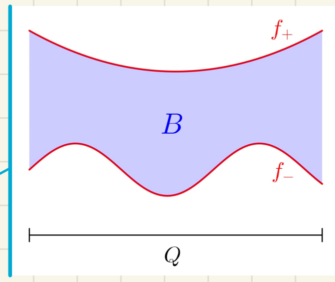
Schlussendlich gilt für einen abgeschlossenen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ und zwei stetige Funktionen $f_-, f_+ : Q \to \mathbb{R}$ mit $f_- \leq f_+$, dass die Menge

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid x \in Q,\ f_-(x) \leq y \leq f_+(x)\}$$

zwischen den Graphen von f_- und f_+ (siehe das folgende Bild) Jordan-messbar ist. Das gleiche gilt, wenn man zwei Riemann-integrierbare Funktionen f_-, f_+ auf Q mit $f_- \leq f_+$ und eine Jordan-messbare Teilmenge $D \subseteq Q$ verwendet um

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid x \in D,\ f_-(x) \leq y \leq f_+(x)\}$$

zu definieren.



Definition 13.29 (Das Riemann-Integral auf B)**.** Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Teilmenge und sei f eine reellwertige Funktion auf B. Dann heisst f **Riemann-integrierbar**, falls es einen abgeschlossenen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $B \subseteq Q$ gibt, so dass die Funktion

$$x \in Q \mapsto \underbrace{(\mathbb{1}_B f)}_{=: f_Q}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in B \\ 0 & \text{falls } x \in Q \setminus B \end{cases}$$

auf Q Riemann-integrierbar ist.Wir schreiben in diesem Fall $f \in \mathcal{R}(B)$ und nennen

$$\int_B f \,\mathrm{dvol} = \int_Q \mathbb{1}_B f \,\mathrm{dvol}$$

das **Riemann-Integral** von f über B.

Lemma 13.30 (Wohldefiniertheit des Riemann-Integrals)**.** *Die Wahl des abgeschlossenen Quaders $Q \supseteq B$ in Definition 13.29 beinflusst die Riemann-Integrierbarkeit einer Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ und den Wert des Riemann-Integrals $\int_B f \,\mathrm{dvol}$ nicht.*

Korollar 13.32 (Lebesgue-Kriterium)**.** *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und sei $f : B \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn f auf B fast überall stetig ist, das heisst, wenn die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge ist. Insbesondere ist jede beschränkte stetige Funktion auf einer Jordan-messbaren Menge Riemann-integrierbar.*

Proposition 13.34 (Additivität des Riemann-Integrals)**.** *Seien B_1, B_2 zwei Jordan-messbare Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und sei $f : B_1 \cup B_2 \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann sind $f|_{B_1} \in \mathcal{R}(B_1)$, $f|_{B_2} \in \mathcal{R}(B_2)$ und $f|_{B_1 \cap B_2} \in \mathcal{R}(B_1 \cap B_2)$ ebenso Riemann-integrierbar und es gilt*

$$\int_{B_1 \cup B_2} f \,\mathrm{dvol} = \int_{B_1} f \,\mathrm{dvol} + \int_{B_2} f \,\mathrm{dvol} - \int_{B_1 \cap B_2} f \,\mathrm{dvol}.$$

Theorem 13.39 (Fubini). *Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ zwei abgeschlossene Quader und sei $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann existiert das* ***Parameterintegral***

$$x \in X \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{dvol}(y)$$

für fast alle $x \in X$ und es gilt

also für alle bis auf eine Nullmenge

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{dvol}((x,y)) = \int_X \left[\int_Y f(x,y)\,\mathrm{dvol}(y)\right] \mathrm{dvol}(x).$$

Genauer formuliert, definieren wir die Funktionen $f_x : y \in Y \mapsto f(x,y)$ sowie

$$F : x \in X \mapsto \underline{I}(f_x) = \begin{cases} \int_Y f_x(y)\,\mathrm{dvol}(y) & \text{falls } f_x \text{ Riemann-integrierbar ist} \\ \underline{I}(f_x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist F auf X Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{dvol}((x,y)) = \int_X F(x)\,\mathrm{dvol}(x).$$

Selbiges gilt, wenn man in der Definition von F das untere Integral durch das obere Integral ersetzt.

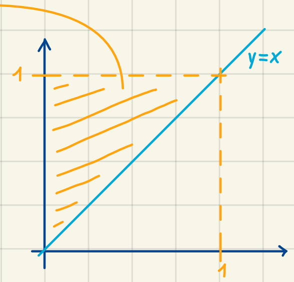
Bsp: Berechne $\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2}\,dy\,dx \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 \int_0^y e^{y^2}\,dx\,dy$

$$= \int_0^1 \left[x e^{y^2}\right]_{x=0}^{x=y} dy$$

$$= \int_0^1 y e^{y^2}\,dy$$

$$= \left[\tfrac{1}{2} e^{y^2}\right]_{y=0}^{y=1} = \tfrac{1}{2}(e-1)$$

Integral über diese Fläche



Korollar 13.41. *Sei $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ ein n-dimensionaler abgeschlossener Quader und sei $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt*

$$\int_Q f\,\mathrm{dvol} = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_1,$$

wobei dieselben formalen Komplikationen wie in Theorem 13.39 auftreten können.

Korollar 13.43 (Fubini für Bereiche zwischen Graphen). *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ eine Jordan-messbare Menge, seien $\varphi_-, \varphi_+ : D \to \mathbb{R}$ beschränkt und stetig mit $\varphi_- \le \varphi_+$ und sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ die Jordan-messbare Teilmenge*

$$B = \{(x,y) \in D \times \mathbb{R} \mid \varphi_-(x) \le y \le \varphi_+(x)\}.$$

Für eine Riemann-integrierbare Funktion f auf B gilt

$$\int_B f(x,y)\,\mathrm{dvol}((x,y)) = \int_D \int_{\varphi_-(x)}^{\varphi_+(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{dvol}(x),$$

wobei wieder die selben Komplikationen wie in Theorem 13.39 auftreten können.

Bsp: Berechne den Schwerpunkt (x_s, y_s) von $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \ge x^2,\ x \ge y^2\}$

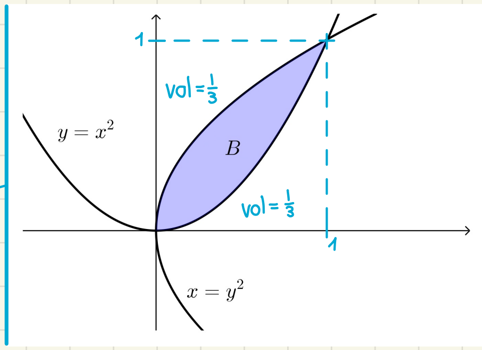
Es gilt $\mathrm{vol}(B) = \frac{1}{3}$. Nun folgt

$$x_s \overset{\text{Def.}}{=} \frac{1}{\mathrm{vol}(B)} \int_B x\,\mathrm{dvol} \overset{\text{Fubini}}{=} 3 \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x\,dy\,dx$$

$$= 3 \int_0^1 x(\sqrt{x} - x^2)\,dx$$

$$= 3\left[\tfrac{2}{5} x^{5/2} - \tfrac{1}{4} x^4\right]_0^1 = \tfrac{9}{20}.$$

Aus Symmetriegründen gilt analog $y_s = \frac{9}{20}$.



Korollar 13.46 (Prinzip von Cavalieri). *Falls $B \subseteq [a,b] \times \mathbb{R}^{n-1}$ beschränkt und Jordan-messbar ist, dann ist*

$$\underbrace{\mathrm{vol}(B)}_{\mathrm{vol}_n(B)} = \int_a^b \underbrace{\mathrm{vol}(B_x)}_{\mathrm{vol}_{n-1}(B_x)}\,\mathrm{d}x,$$

wobei für $x \in [a,b]$ die Teilmenge $B_x \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ durch

$$B_x = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x,y) \in B\}$$

gegeben ist und für fast alle $x \in [a,b]$ Jordan-messbar ist.

Proposition 13.49 (Lineare Substitutionsregel). *Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader und sei L in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Dann ist das Bild $L(Q)$ von Q unter L Jordan-messbar und es gilt*

$$\mathrm{vol}(L(Q)) = |\det(L)|\,\mathrm{vol}(Q).$$

Korollar 13.54 (Volumen von Parallelotopen). *Sei $L \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ mit Spalten $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Dann ist das* ***Parallelotop***

$$P = L([0,1]^n) = \left\{\sum_{i=1}^n s_i v_i \mid s_1, \ldots, s_n \in [0,1]\right\}$$

Jordan-messbar und es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(P) &= \mathrm{vol}(L([0,1]^n)) \\ &= |\det(L)| = \sqrt{\mathrm{gram}(v_1, \ldots, v_n)}. \end{aligned}$$

Definition 13.53. Zu Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ wird

$$\mathrm{gram}(v_1, \ldots, v_n) = \det(\langle v_i, v_j \rangle)_{ij}$$

die **Gramsche Determinante** von $v_1, \ldots, v_n$ genannt.

Satz 13.56 (Substitutionsregel mit kompaktem Träger). *Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und sei $\Phi : X \to Y$ ein C^1-Diffeomorphismus. Des Weiteren sei $f : Y \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion mit kompakten Träger in Y. Dann hat die Funktion*

$$x \in X \mapsto (f \circ \Phi(x)) |\det(\mathrm{D}_x \Phi)|$$

kompakten Träger in X, ist Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_Y f(y) \,\mathrm{dvol}(y) = \int_X (f \circ \Phi(x)) |\det(\mathrm{D}_x \Phi)| \,\mathrm{dvol}(x),$$

*wobei die Funktion $x \in X \mapsto \det(\mathrm{D}_x \Phi)$ als die **Jacobi-Determinante** von Φ bezeichnet wird.*

Bew-Idee: Agn. X ist ein offener Quader. Wähle eine feine Zerlegung $\mathcal{Z}$ mit Mittelpunkten $x_\alpha \in Q_\alpha \sqsubset \mathcal{Z}$. Dann gilt mit der Taylor-Approximation

$$\forall Q_\alpha \sqsubset \mathcal{Z} \,\forall x \in Q_\alpha : \quad \Phi(x) \approx \Phi(x_\alpha) + D_{x_\alpha}\Phi(x - x_\alpha)$$

und somit

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(\Phi(Q_\alpha)) &\approx \mathrm{vol}(\Phi(x_\alpha) + D_{x_\alpha}\Phi(Q_\alpha - x_\alpha)) \\ &= \mathrm{vol}(D_{x_\alpha}\Phi(Q_\alpha)) \\ &= |\det(D_{x_\alpha}\Phi)| \,\mathrm{vol}(Q_\alpha). \end{aligned}$$

Volumen translationsinvariant, $D_{x_\alpha}\Phi$ linear

13.49

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_Y f(y)\,\mathrm{dvol}(y) &= \sum_{Q_\alpha \sqsubset \mathcal{Z}} \int_{\Phi(Q_\alpha)} f(y)\,\mathrm{dvol}(y) \\ &\approx \sum_{Q_\alpha \sqsubset \mathcal{Z}} f(\Phi(x_\alpha)) \cdot \mathrm{vol}(\Phi(Q_\alpha)) \\ &\approx \int_X (f \circ \Phi)(x) |\det(D_x\Phi)| \,\mathrm{dvol}(x). \end{aligned}$$

□

Proposition 13.72 (Kompatibilität). *Sei B eine Jordan-messbare Teilmenge, sei $(B_m)_m$ eine Ausschöpfung von B und sei $f : B \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt*

$$\mathrm{vol}(B) = \lim_{m\to\infty} \mathrm{vol}(B_m),$$
$$\int_B f \,\mathrm{dvol} = \lim_{m\to\infty} \int_{B_m} f \,\mathrm{dvol}.$$

Insbesondere ist f über B uneigentlich Riemann-integrierbar.

Bew: Wegen $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots \subseteq B$ ist $(\mathrm{vol}(B_m))_m$ monoton wachsend und beschränkt, also Konv. und es gilt $\lim_{m\to\infty} \mathrm{vol}(B_m) \leq \mathrm{vol}(B)$.
Zudem ist

$$N := \bigcup_{m=1}^\infty \partial B_m \cup \partial B$$

Eine Lesbegue-Nullmenge. Also ex. für jedes $\varepsilon > 0$ eine Folge $(Q_\ell)_\ell$ offener Quader mit

$$N \subseteq \bigcup_{\ell=1}^\infty Q_\ell \quad \text{und} \quad \sum_{\ell=1}^\infty \mathrm{vol}(Q_\ell) < \varepsilon.$$

Nun folgt

$$\begin{aligned} \overset{\text{kompakt!}}{\bar{B}} = B \cup \partial B &= \bigcup_{m=1}^\infty B_m \cup \partial B \\ &= \bigcup_{m=1}^\infty B_m^\circ \cup N \\ &\subseteq \underbrace{\bigcup_{m=1}^\infty B_m^\circ \cup \bigcup_{\ell=1}^\infty Q_\ell}_{\text{offene Überdeckung von } \bar{B}} \end{aligned}$$

Also ex. $M, L \in \mathbb{N}$ mit

$$\bar{B} \subseteq B_M^\circ \cup \bigcup_{\ell=1}^L Q_\ell$$

und

$$\mathrm{vol}(B) = \mathrm{vol}(\bar{B}) \leq \mathrm{vol}(B_M^\circ) + \underbrace{\sum_{\ell=1}^L \mathrm{vol}(Q_\ell)}_{<\varepsilon} < \mathrm{vol}(B_M) + \varepsilon.$$

Daraus folgt insgesamt $\lim_{m\to\infty} \mathrm{vol}(B_m) = \mathrm{vol}(B)$.

Ist f auf B R-intbar und $M := \sup_{x\in B} |f(x)|$, so folgt zudem

$$\begin{aligned} \left|\int_{B_m} f\,\mathrm{dvol} - \int_B f\,\mathrm{dvol}\right| &\leq \int_{B\setminus B_m} |f|\,\mathrm{dvol} \\ &\leq M \cdot \mathrm{vol}(B \setminus B_m) \xrightarrow{m\to\infty} 0 \end{aligned}$$

□

Satz 13.74 (Uneigentliche Riemann-Integrale und nicht-negative Funktionen). *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, sei $(B_m)_m$ eine Ausschöpfung von B und sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine Funktion so dass $f|_{B_m}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ Riemann-integrierbar ist. Angenommen f ist nicht-negativ und der Grenzwert $I = \lim_{m\to\infty} \int_{B_m} f \,\mathrm{dvol}$ existiert. Dann existiert der Grenzwert $\lim_{\ell\to\infty} \int_{A_\ell} f \,\mathrm{dvol}$ für jede weitere Ausschöpfung $(A_\ell)_\ell$ mit der Eigenschaft, dass $f|_{A_\ell}$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ Riemann-integrierbar ist, und ist gleich I. Insbesondere ist f auf B uneigentlich Riemann-integrierbar und das uneigentliche Riemann-Integral ist gleich I.*

Bew: Da für alle $\ell \geq 1$ per Annahme $f|_{A_\ell}$ R-intbar ist, folgt mit $f \geq 0$ und Prop. 13.72

$$\int_{A_\ell} f\,\mathrm{dvol} = \lim_{m\to\infty} \int_{A_\ell \cap B_m} f\,\mathrm{dvol} \leq \lim_{m\to\infty} \int_{B_m} f\,\mathrm{dvol},$$

da $(A_\ell \cap B_m)_m$ eine Ausschöpfung von A_ℓ darstellt. Da $\left(\int_{A_\ell} f\,\mathrm{dvol}\right)_\ell$ monoton wachsend und nach Obigem beschränkt ist, folgt

$$\lim_{\ell\to\infty} \int_{A_\ell} f\,\mathrm{dvol} \leq \lim_{m\to\infty} \int_{B_m} f\,\mathrm{dvol}.$$

Analog folgt die umgekehrte Ungleichung und somit Gleichheit. □

Theorem 13.76 (Substitution). *Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und sei $\Phi : X \to Y$ ein Diffeomorphismus. Weiter sei $f : Y \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass f und $|f|$ auf Y uneigentlich Riemann-integrierbar sind. Dann ist die Funktion $(f \circ \Phi)|\det(\mathrm{D}\Phi)|$ uneigentlich Riemann-integrierbar auf X und es gilt*

$$\int_Y f \,\mathrm{dvol} = \int_X (f \circ \Phi) |\det(\mathrm{D}\Phi)| \,\mathrm{dvol}.$$

Definition 13.55. Sei $n \geq 1$ und $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist der **Träger** $\mathrm{supp}(f)$ durch

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$$

definiert. Wir sagen, dass f **kompakten Träger** hat, falls $\mathrm{supp}(f)$ eine kompakte Teilmenge von X ist. Für eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit kompakten Träger $K = \mathrm{supp}(f)$ definieren wir das Riemann-Integral

$$\int_X f \,\mathrm{dvol} = \int_Q \mathbb{1}_X f \,\mathrm{dvol},$$

wobei Q ein Quader mit $K \subseteq Q$ ist und $\mathbb{1}_X f$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ durch

$$\mathbb{1}_X f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in X, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert ist.

Definition 13.70 (Ausschöpfungen). Eine **Ausschöpfung** einer Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Folge Jordan-messbarer Teilmengen $(B_m)_m$ mit

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \ldots \quad \text{und} \quad B = \bigcup_{m=1}^\infty B_m.$$

Definition 13.71 (Uneigentliches Riemann-Integral). Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ und sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass f auf B **uneigentlich Riemann-integrierbar** ist, falls B eine Ausschöpfung $(B_m)_m$ besitzt, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ die Einschränkung $f|_{B_m}$ Riemann-integrierbar ist, der Grenzwert $\lim_{m\to\infty} \int_{B_m} f \,\mathrm{dvol}$ existiert und von der Wahl der Ausschöpfung $(B_m)_m$ mit obiger Eigenschaft unabhängig ist. In diesem Fall schreiben wir

$$\int_B f \,\mathrm{dvol} = \lim_{m\to\infty} \int_{B_m} f \,\mathrm{dvol}$$

für das **uneigentliche Riemann-Integral** von f über B.

14 Mehrdimensionale Integralsätze

Divergenzsätze in der Ebene

Hauptsatz der Diff.- und Integralrechnung — Fubini

Proposition 14.1 (Divergenzsatz auf Rechtecken). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge im $\mathbb{R}^2$ und sei $f:(f_1,f_2)^t : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann existiert für alle $p \in U$ die sogenannte **Divergenz** oder **Quellenstärke***

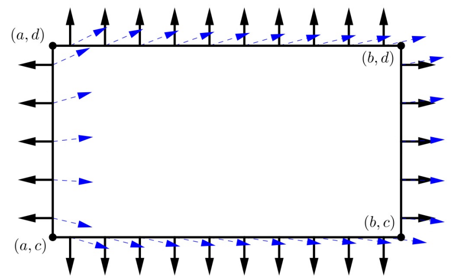
$$(\operatorname{div}(f))(p) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{4h^2} \int_{\partial(p+[-h,h]^2)} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$$

und ist durch

$$\operatorname{div}(f) = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2$$

gegeben. Des Weiteren gilt für jedes abgeschlossene Rechteck $B \subseteq U$

$$\int_B \operatorname{div}(f)\,\mathrm{dvol} = \int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}. \tag{14.1}$$



Figur 14.1: Die dicken schwarzen Pfeile stellen die zum Rand normalen Richtungen dar und die gestrichelten blauen Pfeile stellen f dar. Wir betrachten zum Beispiel die untere Kante des obigen Rechtecks, womit die nach aussen zeigende Normale durch $-(0,1)^t$ gegeben ist. Das entsprechende Integral $\int_a^b \langle f(x,c), -(0,1)^t\rangle\,\mathrm{d}x$ ist gerade $-\int_a^b f_2(x,c)\,\mathrm{d}x$, wie in der Definition des Integrals $\int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$.

Definition (Flussintegral). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $B = [a,b]\times[c,d] \subseteq U$ ein abgeschlossenes Rechteck. Das Flussintegral von f durch ∂B ist definiert durch

$$\int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = \underbrace{-\int_a^b f_2(x,c)\,\mathrm{d}x}_{\text{unten}} + \underbrace{\int_c^d f_1(b,y)\,\mathrm{d}y}_{\text{rechts}} + \underbrace{\int_a^b f_2(x,d)\,\mathrm{d}x}_{\text{oben}} - \underbrace{\int_c^d f_1(a,y)\,\mathrm{d}y}_{\text{links}}$$

$=$ "Integral von $\langle f, n\rangle$ entlang ∂B" (vlg. 11.6)

$=$ "Volumen des Mediums, welches pro Zeiteinheit aus dem Rechteck strömt".

!

Wir interpretieren die Divergenz $\operatorname{div}(f)$ als eine Messgrösse, die bei jedem Punkt $p \in U$ angibt, wie sehr sich in p die Dichte des Mediums pro Zeiteinheit ändert. Anders formuliert lässt sich damit beurteilen, ob in p eine Quelle (mit $\operatorname{div}(f)(p) > 0$) oder eine Senke (mit $\operatorname{div}(f)(p) < 0$) der Strömung vorhanden ist. Das Vektorfeld f heisst **divergenzfrei**, falls $\operatorname{div}(f) = 0$ gilt. Bei inkompressiblen Flüssigkeiten ist dies eine physikalisch notwendige Bedingung an eine Strömung der Flüssigkeit.

Bew: Sei $B = [a,b]\times[c,d] \subseteq U$. Dann gilt

$$\int_{\partial B} f \cdot dn \overset{\text{Def.}}{=} \int_a^b (f_2(x,d) - f_2(x,c))\,dx + \int_c^d (f_1(b,y) - f_1(a,y))\,dy$$

$$\overset{\text{Hauptsatz}}{=} \int_a^b\int_c^d \partial_2 f_2(x,y)\,dy\,dx + \int_c^d\int_a^b \partial_1 f_1(x,y)\,dx\,dy$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_B (\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2)\,\mathrm{dvol}.$$

Sei nun $p \in U$ und $h > 0$ mit $B_h := p + [-h,h]^2 \subseteq U$. Dann gilt

$$\left| \frac{1}{4h^2}\int_{\partial B_h} f \cdot dn - (\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2)(p) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{4h^2}\int_{B_h} (\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2)(x) - (\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2)(p)\,\mathrm{dvol}(x) \right|$$

$$\leq \left| \frac{1}{4h^2}\int_{[-h,h]^2} \underbrace{(\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2)(p+x) - (\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2)(p)}_{\xrightarrow{x\to 0} 0}\,\mathrm{dvol}(x) \right| \xrightarrow{h\to 0} 0,$$

da $\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2$ stetig ist. Somit gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{4h^2}\int_{\partial B_h} f \cdot dn = (\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2)(p)$$

$\square$

Proposition 14.2 (Divergenzsatz für Bereiche unter Graphen). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und f ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf U. Seien $a < b$ und $c < d$ reelle Zahlen, so dass $[a,b]\times[c,d] \subseteq U$ ist, und sei $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ stetig und stückweise stetig differenzierbar. Für den Bereich*

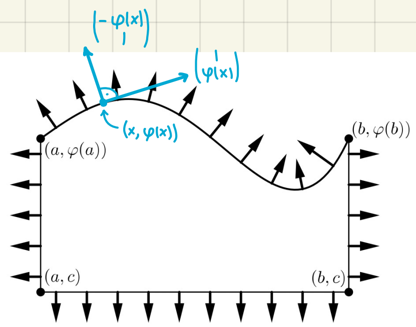
$$B = \{(x,y) \in U \mid x \in [a,b],\ c \leq y \leq \varphi(x)\}$$

gilt dann

$$\int_B \operatorname{div}(f)\,\mathrm{dvol} = \int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}.$$

Hierbei ist per Definition

$$\int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = \underbrace{-\int_a^b f_2(x,c)\,\mathrm{d}x}_{\text{unten}} + \underbrace{\int_c^{\varphi(b)} f_1(b,y)\,\mathrm{d}y}_{\text{rechts}}$$
$$\underbrace{+\int_a^b \left\langle f(x,\varphi(x)), \begin{pmatrix} -\varphi'(x) \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}x}_{\text{oben}} \underbrace{-\int_c^{\varphi(a)} f_1(a,y)\,\mathrm{d}y.}_{\text{links}}$$



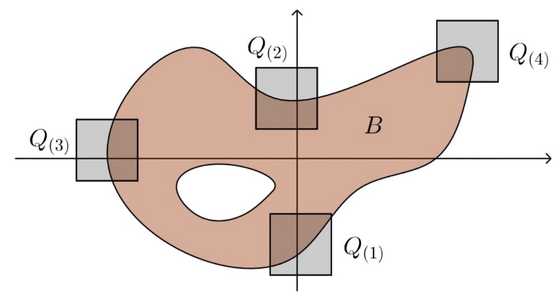
Figur 14.4: An einem beliebigen Punkt $(x,\varphi(x))$ im Graphen von φ ist $(1,\varphi'(x))^t$ ein nach rechts gerichteter Tangentenvektor. Rotiert man diesen nun um 90 Grad im Gegenuhrzeigersinn, so erhält man den Vektor $(-\varphi'(x),1)^t$, der also senkrecht auf dem Graphen stehen muss und nach aussen zeigt. Wir bemerken, dass dieser Normalenvektor nicht zwingend Länge 1 besitzt; seine Länge entspricht der Bogenlänge in der Parametrisierung durch die x-Koordinate.

Lemma 14.6 (Glatte Ränder und Niveaumengen). *Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit Null als regulären Wert. Dann ist die abgeschlossene Teilmenge*

$$B = \{u \in \mathbb{R}^n \mid F(u) \geq 0\}$$

glatt berandet und $\partial B = \{u \in \mathbb{R}^n \mid F(u) = 0\}$ $= F^{-1}\{0\}$.

Bew mittels ähnlichen Methoden wie im Satz über den konstanten Rang.



Figur 14.5: In der durch $Q_{(1)}$ definierten Umgebung lässt sich der Schnitt $B \cap Q_{(1)}$ als die Menge der Punkte in $Q_{(1)}$ oberhalb eines Graphen über der x-Achse auffassen. Genauso ist der Schnitt $B \cap Q_{(2)}$ die Menge der Punkte in $Q_{(2)}$ unterhalb eines Graphen über der x-Achse. Wir stellen aber auch fest, dass sich $B \cap Q_{(2)}$ (im Gegensatz zu $B \cap Q_{(1)}$) nicht als Gebiet unterhalb eines Graphen über der y-Achse auffassen lässt. Letzteres trifft umgekehrt auf den Schnitt $B \cap Q_{(3)}$ zu, welcher nur als Gebiet oberhalb eines (also rechts von dem) Graphen über der y-Achse dargestellt werden kann. Auch bemerken wir, dass die gleiche „Grösse“ von Quadraten an anderen Stellen vielleicht nicht passt. Beispielsweise lässt sich $B \cap Q_{(4)}$ weder über der x-Achse noch über der y-Achse als Menge unterhalb oder oberhalb eines Graphen interpretieren.

Definition 14.4 (Glatt berandet). Eine abgeschlossene Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst ein **glatt berandeter Bereich**, falls es für jeden Punkt $p \in \partial B$ eine Matrix $\underbrace{P = A_\varepsilon P_\sigma}_{\in O_n(\mathbb{Z})}$ für

- eine Diagonalmatrix $A_\varepsilon = \operatorname{diag}((-1)^{\varepsilon_1}, \ldots, (-1)^{\varepsilon_n})$ zu $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ mit $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0,1\}$ und
- eine Permutationsmatrix P_σ zu $\sigma \in S_n$

sowie einen offenen Quader $O = O_1 \times (c,d)$ mit $P(p) \in O$ gibt, so dass der Durchschnitt $P(B) \cap O$ durch eine glatte Funktion $\varphi : O_1 \to \mathbb{R}$ definiert werden kann. Genauer ist

$$P(B) \cap O = \{(x,y) \in O_1 \times (c,d) \mid c < y \leq \varphi(x)\}.$$

Lemma 14.7 (Geeignete Wahl der Seitenlänge). *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ein glatt berandeter, beschränkter Bereich. Dann existiert eine Länge $\eta_0 > 0$, so dass für jeden Randpunkt $p \in \partial B$ die Umgebung O zu p aus Definition 14.4 als Würfel mit Kantenlänge $2\eta_0$ um $P(p)$ gewählt werden kann (wobei P ebenfalls wie in Definition 14.4 gegeben ist).*

__Bew:__ Wir def.

$$\mathcal{O} := \{P^{-1}(O) \mid p \in \partial B,\ P \in O_n(\mathbb{Z}),\ U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ mit } P(p) \in O \text{ wie in Def. 14.4}\}.$$

Dies ist eine offene überdeckung von ∂B. Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ abgs. mit $B \subseteq Q^\circ$ und $\forall P^{-1}(O) \in \mathcal{O}$: $P^{-1}(O) \in Q^\circ$. Dann ist

$$\mathcal{O} \cup \{B^\circ, Q \setminus B\}$$

(rel.) offene Überdeckung von Q. Da Q kompakt ist, ex. nach 10.54 eine Lesbegue-Zahl $\eta_0 > 0$, s.d.

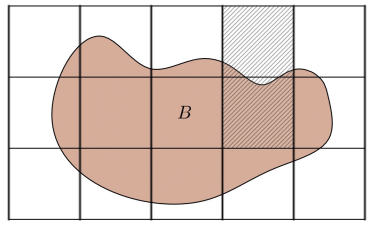
$$\forall p \in \partial B\ \exists P^{-1}(O) \in \mathcal{O}: B^\infty_{\eta_0}(p) \subseteq P^{-1}(O)$$
$$\Rightarrow B^\infty_{\eta_0}(P(p)) \subseteq O.$$

□

Proposition 14.8 (Puzzlestein-Domino Überdeckung). *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein glatt berandeter Bereich und sei $Q \supseteq B$ ein abgeschlossenes Quadrat. Dann existiert für jede Zerlegungen $\mathfrak{Z}$ von Q in Quadrate mit genügend kleiner Maschenweite eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf der Menge $\{Q_\alpha \mid Q_\alpha \sqsubset \mathfrak{Z}\}$, so dass die Äquivalenzklassen aus einem oder zwei benachbarten Quadraten bestehen und so dass für die Vereinigung P über eine Äquivalenzklasse der Durchschnitt $B \cap P$ durch eine stückweise stetig differenzierbare Funktion beschrieben werden kann. Genauer formuliert gibt es für jedes $Q_\alpha \sqsubset \mathfrak{Z}$ die folgenden zwei Möglichkeiten:*

- *(Puzzlestein) Entweder $Q_\alpha \sqsubset \mathfrak{Z}$ ist zu keinem weiteren Quadrat der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ äquivalent, wir nennen in diesem Fall $R = \overline{Q_\alpha}$ einen* Puzzlestein.
- *(Domino) Oder Q_α ist genau zu einem weiteren Quadrat $Q_\beta \sqsubset \mathfrak{Z}$ äquivalent, so dass der Abschluss $R = \overline{Q_\alpha \cup Q_\beta}$ der Vereinigung ein Rechteck ist, welches wir als* Domino *bezeichnen.*

In beiden Fällen hat $\partial B \cap \partial R$ höchstens zwei Elemente und der Durchschnitt $B \cap R$ kann, möglicherweise nach Vertauschung der Koordinaten, durch den Graphen einer stückweise stetig differenzierbaren Funktion φ wie in Proposition 14.2 beschrieben werden.



Figur 14.7: Illustration der Definition der Äquivalenzrelation auf der Menge der $\mathfrak{Z}$ entsprechenden Quadrate. In diesem Bild sind die beiden schraffierten Quadrate zueinandener äquivalent, da der Rand von B die Kante zwischen diesen Quadraten zweimal schneidet. Alle anderen Quadrate sind nur zu sich selbst äquivalent.

Lemma 14.13 (Unabhängigkeit von der Parametrisierung). *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge, deren Rand eine positiv orientierte Parametrisierung besitzt, und sei $f : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld definiert auf einer offenen Menge $U \supseteq B$. Dann hängen sowohl das Wegintegral $\int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$ als auch das Flussintegral $\int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$ nicht von der Wahl der positiv orientierten Parametrisierung des Randes ∂B ab.*

!

Theorem 14.14 (Divergenzsatz in der Ebene). *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein glatt berandeter, kompakter Bereich und sei $f : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld definiert auf einer offenen Menge $U \supseteq B$. Dann gilt*

$$\int_B \operatorname{div}(f)\,\mathrm{dvol} = \int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}.$$

!

Theorem 14.18 (Satz von Green). *Sei $f : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Die Wirbelstärke $\operatorname{rot}(f)$ existiert auf ganz U und erfüllt*

$$\operatorname{rot}(f) = \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1.$$

Weiter gilt für jeden glatt berandeten, kompakten Bereich $B \subseteq U$

$$\int_B \operatorname{rot}(f)\,\mathrm{dvol} = \int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}.$$

__Bew:__ Def. $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ durch $g := R^{-1} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 \\ -f_1 \end{pmatrix}$.

Dann gilt

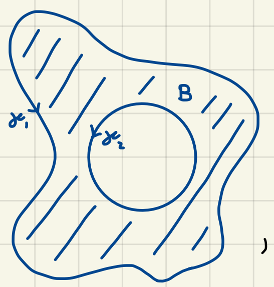
$$\int_B \overbrace{(\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)}^{\operatorname{rot}(f)}\,\mathrm{dvol} = \int_B \operatorname{div}(g)\,\mathrm{dvol} \overset{14.14}{=} \int_{\partial B} g \cdot \mathrm{d}n \overset{\text{Def.}}{=} \int_{\partial B} Rg \cdot \mathrm{d}s = \int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}s.$$

Daraus folgt (wie im Bew. von 14.1) nun

$$\operatorname{rot}(f)(p) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial B_r(p)} f \cdot \mathrm{d}s = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r(p)} \overbrace{(\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)}^{\text{stetig}}\,\mathrm{dvol} = (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)(p).$$

□

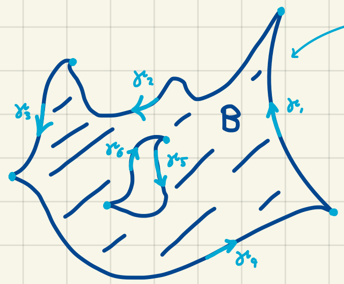
Ist f rotationsfrei (oder äquivalent erfüllt f die Integrabilitätsbedingungen), so folgt zB. für Kreisringe der Form



,

dass $$0 = \int_B \operatorname{rot}(f)\,\mathrm{dvol} = \int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}s = \int_{\gamma_1} f \cdot \mathrm{d}s - \int_{\gamma_2} f \cdot \mathrm{d}s$$

und damit $$\int_{\gamma_1} f \cdot \mathrm{d}s = \int_{\gamma_2} f \cdot \mathrm{d}s$$ gilt.



Definition 14.9 (Positiv orientierte Parametrisierung). Eine **Parametrisierung des Randes** einer abgeschlossenen Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ist eine Kollektion von stetig differenzierbaren Wegen $\gamma_k : I_k \to \partial B$ auf abgeschlossenen Intervallen $I_k = [a_k, b_k]$ mit $a_k < b_k$ für $k = 1, \ldots, K$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) (Überdeckend) Es gilt[1] $\partial B = \bigcup_{k=1}^K \gamma_k([a_k, b_k])$.

(ii) (Keine Selbstüberschneidungen abgesehen von den Endpunkten) Für alle Indizes $j, k \in \{1, \ldots, K\}$, alle $s \in I_j$ und $t \in I_k^\circ$ mit $(s, j) \neq (t, k)$ gilt $\gamma_j(s) \neq \gamma_k(t)$.

(iii) (Aufeinanderfolgend) Für jedes $k \in \{1, \ldots, K\}$ existiert genau ein $\ell \in \{1, \ldots, K\}$ mit $\gamma_k(b_k) = \gamma_\ell(a_\ell)$.

(iv) (Regularität) Die Wege $\gamma_1, \ldots, \gamma_K$ sind regulär (siehe Abschnitt 9.7.2).

Die Parametrisierung $\gamma_1, \ldots, \gamma_K$ heisst **positiv orientiert**, wenn für jedes $k \in \{1, \ldots, K\}$ und jedes $t \in I_k^\circ$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $\gamma(t) + sR\gamma'(t) \in B^\circ$ für alle $s \in (0, \varepsilon)$ und $\gamma(t) + sR\gamma'(t) \in \mathbb{R}^2 \setminus B$ für alle $s \in (-\varepsilon, 0)$. Dabei ist $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ die Rotationsmatrix zum Winkel 90 Grad **in mathematisch positiver Richtung** (also im Gegenuhrzeigersinn). Intuitiv ausgedrückt ist eine Parametrisierung von B also positiv orientiert, falls die Menge B jeweils links von den Wegen der Parametrisierung liegt.

Wichtige Übung 14.10 (Existenz einer positiv orientierten Parametrisierung). *Zeigen Sie, dass Bereiche wie in Proposition 14.2 und kompakte glatt berandete Bereiche eine positiv orientierte Parametrisierung besitzen und geben Sie diese im ersten Fall explizit an.*

Definition 14.11 (Integral über Ränder). Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge, deren Rand eine positiv orientierte Parametrisierung $\gamma_1 : I_1 = [a_1, b_1] \to \partial B, \ldots, \gamma_K : I_K = [a_K, b_K] \to \partial B$ besitzt. Weiter sei $f : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld definiert auf einer offenen Menge $U \supseteq B$. Dann ist das **Wegintegral** von f entlang ∂B durch

!

$$\int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \sum_{k=1}^K \int_{a_k}^{b_k} \langle f(\gamma_k(t)), \dot{\gamma}_k(t) \rangle \,\mathrm{d}t$$

definiert. Sei $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$. Das **Flussintegral** von f durch den Rand ∂B ist dann definiert als

$$\int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = \int_{\partial B} (Rf) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \sum_{k=1}^K \int_{a_k}^{b_k} \langle f(\gamma_k(t)), R^{-1}\dot{\gamma}_k(t) \rangle \,\mathrm{d}t.$$

Definition 14.17 (Rotation eines Vektorfelds). Sei $f : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Die **Wirbelstärke** oder **Rotation** von f ist durch

!

$$\operatorname{rot}(f)(u) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial B_r(u)} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} \tag{14.3}$$

für $u \in U$ definiert.

Satz 14.21 (Jordanscher Kurvensatz für glatte Funktionen)**.** *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ein glatter, regulärer, einfacher, geschlossener Weg. Dann kann man das Komplement der Spur $\gamma([a,b])$ des Weges schreiben als*

$$\mathbb{R}^2 \setminus \gamma([a,b]) = \operatorname{Inn}(\gamma) \sqcup \operatorname{Auss}(\gamma),$$

wobei das Innere $\operatorname{Inn}(\gamma)$ eine offene, beschränkte, zusammenhängende Teilmenge und das Äussere $\operatorname{Auss}(\gamma)$ eine offene, unbeschränkte, zusammenhängende Teilmenge ist. Des Weiteren gilt $\partial \operatorname{Inn}(\gamma) = \partial \operatorname{Auss}(\gamma) = \gamma([a,b])$.

DIVERGENZSÄTZE IM RAUM

Eine **Fläche** $S \subseteq \mathbb{R}^3$ ist eine zweidimensionale Teilmannigfaltigkeit. Wir werden an zwei Arten von Flächen interessiert sein:

(1) S ist der Rand eines kompakten, glatt berandeten Bereiches im $\mathbb{R}^3$. Beispielsweise könnte S also die Sphäre $\mathbb{S}^2$ sein, welche den Rand des Einheitsballes im $\mathbb{R}^3$ darstellt.

(2) Der Abschluss von S ist kompakt und ist eine „glatt berandete Teilmenge" einer weiteren Fläche $M \supseteq \overline{S}$. Ein solches S könnte beispielsweise die obere Hemisphäre von $\mathbb{S}^2$ sein. In diesem Fall nennt man $\overline{S}$ oft auch eine **Fläche mit Rand**.

Um die Fläche S lokal mit Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ zu beschreiben, werden wir Karten verwenden, an welche wir kurz erinnern werden (siehe auch die Diskussion nach Definition 12.10). Sei $p \in S$, sei $U_p \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Umgebung von p und sei $\varphi_p : U_p \to V_p = \varphi_p(U_p)$ ein Diffeomorphismus auf eine weitere offene Teilmenge $V_p \subseteq \mathbb{R}^3$, so dass

$$\varphi_p(U_p \cap S) = \{y \in V_p \mid y_3 = 0\} = V_p \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}).$$

Dann ist eine **Karte** von S um p durch die offene Menge

$$\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid (s,t,0) \in V_p\}$$

gegeben. Die Abbildung $\Phi = \varphi_p^{-1}$ oder auch deren Einschränkung

$$(s,t) \in \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid (s,t,0) \in V_p\} \mapsto \varphi_p^{-1}(s,t,0) \in S$$

auf die Karte wird dann **Kartenabbildung** genannt. Zur Vereinfachung der Notation werden wir die Koordinatenebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ oft mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren. Insbesondere schreiben wir zum Beispiel $V_p \cap \mathbb{R}^2$ für obige Karte und identifizieren (s,t) mit $(s,t,0)$. Die Kartenabbildungen werden wir meist mit Φ (und einem Index) bezeichnen. In der Literatur wird oft auch das Tupel $(V_p \cap \mathbb{R}^2, \varphi_p^{-1}|_{V_p \cap \mathbb{R}^2})$ als Karte bezeichnet.

Auf Grund der Kompaktheit von $\overline{S}$ in beiden Fällen (1) und (2) (und der Enthaltung $\overline{S} \subseteq M$ in (2)) können wir S durch endlich viele offene Mengen $U_1, \dots, U_L \subseteq \mathbb{R}^3$ überdecken, so dass es endlich viele offene Mengen $V_1, \dots, V_L$ und Kartenabbildungen $\Phi_\ell : V_\ell \to U_\ell$ gibt mit

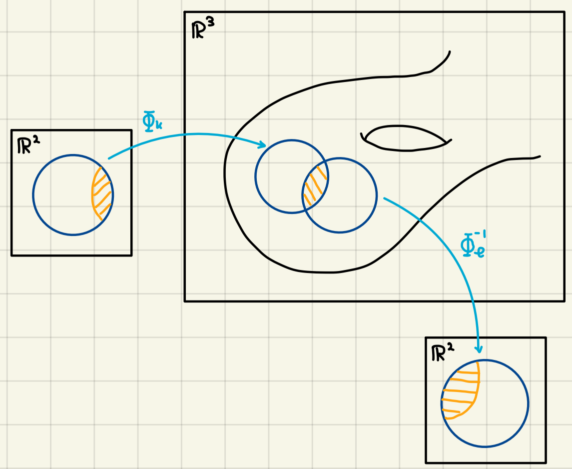
$$\Phi_\ell(V_\ell \cap \mathbb{R}^2) = U_\ell \cap S$$

für $\ell = 1, \dots, L$. Die Liste von Kartenabbildungen $\Phi_1, \dots, \Phi_L$ werden wir auch eine **Parametrisierung** von S nennen.

Lemma 14.35 (Existenz einer Aussennormalen)**.** *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ein kompakter glatt berandeter Bereich. Dann existiert eine orientierte Parametrisierung $\Phi_1, \dots, \Phi_L$ des Randes $S = \partial B$, so dass $\partial_s \Phi_\ell \times \partial_t \Phi_\ell$ eine Aussennormale ist. Das heisst, für alle $\ell \in \{1, \dots, L\}$ und $(s,t) \in V_\ell$ gilt*

$$\Phi_\ell(s,t) + \varepsilon(\partial_s \Phi_\ell \times \partial_t \Phi_\ell)(s,t) \notin B$$
$$\Phi_\ell(s,t) - \varepsilon(\partial_s \Phi_\ell \times \partial_t \Phi_\ell)(s,t) \in B^\circ,$$

wenn nur $\varepsilon > 0$ genügend klein ist.



Definition (Skalares Oberflächenintegral)**.** Seien $K_l \subseteq (V_l \cap \mathbb{R}^2)$ für $l = 1, \dots, L$ Jordan-messbare Teilmengen, so dass $S = \bigsqcup_{l=1}^L K_l$ und $f : S \to \mathbb{R}$ eine stetige, beschränkte Funktion. Dann definieren wir das **skalare Oberflächenintegral** von f durch

$$\int_S f \,\mathrm{d}A = \sum_{l=1}^L \int_{\Phi_l(K_l)} f \,\mathrm{d}A = \sum_{l=1}^L \int_{K_l} (f \circ \Phi_l) \|\partial_s \Phi_l \times \partial_t \phi_l\| \underbrace{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{dvol}(s,t)} .$$

Für $f = 1$ definiert zudem

$$A(S) = \int_S \mathrm{d}A = \sum_{l=1}^L \int_{K_l} \|\partial_s \Phi_l \times \partial_t \phi_l\| \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

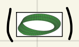
den Flächeninhalt von S.

Definition (Orientierung einer Parametrisierung)**.** Eine Parametrisierung $\Phi_1, \dots, \Phi_L$ ist **orientiert** oder definiert eine **Orientierung von S**, falls für alle $k, l \in \{1, \dots, L\}$ und $(s,t) \in \Phi_k^{-1}(U_l)$

$$\det(\mathrm{D}_{(s,t)}(\Phi_l^{-1} \circ \Phi_k)) > 0$$

gilt. S heisst zudem **orientierbar**, falls S eine orientierte Parametrisierung besitzt.

Wichtige Übung 14.32 (Eine Charakterisierung von Orientierbarkeit)**.** *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Ein stetiges **normiertes Normalenfeld** ist eine stetige Abbildung $n : S \to \mathbb{R}^3$ mit $n(p) \perp \mathrm{T}_p S$ und $\|n(p)\| = 1$ für alle $p \in S$. Zeigen Sie, dass S genau dann orientierbar ist, falls ein stetiges Normalenfeld existiert.*

Bsp: Das Möbiusband () ist eine nicht orientierbare Fläche.

Definition 14.36 (Flussintegral durch Flächen)**.** Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierbare Fläche, sei $\Phi_1 : V_1 \to U_1, \dots, \Phi_L : V_L \to U_L$ eine orientierte Parametrisierung von S und sei $K_1 \subseteq V_1 \cap \mathbb{R}^2, \dots, K_L \subseteq V_L \cap \mathbb{R}^2$ eine Kartenpartition für diese Parametrisierung. Sei $U \supseteq S$ eine offene Menge und sei f ein stetiges Vektorfeld auf U. Dann definieren wir das **Flussintegral** von f über S durch

$$\int_S f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = \sum_{\ell=1}^L \int_{K_\ell} \langle f \circ \Phi_\ell, \overbrace{\partial_s \Phi_\ell \times \partial_t \Phi_\ell \rangle \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t}^{\text{"= dn"}}.$$

Lemma 14.37 (Wohldefiniertheit des Flussintegrals). *Das Flussintegral über eine orientierbare, zusammenhängende Fläche hängt, abgesehen vom Vorzeichen, nicht von der gewählten orientierten Parametrisierung ab. Für den Rand $S = \partial B$ eines kompakten glatt berandeten Bereiches und einem Atlas wie in Lemma 14.35 gilt sogar, dass das Flussintegral (inklusive dem Vorzeichen) wohldefiniert ist.*

Bew: (nur für eine Karte)

Seien $\Phi : V \longrightarrow U$, $\tilde{\Phi} : \tilde{V} \longrightarrow \tilde{U}$ mit OBdA $U = \tilde{U}$ lokale Parametrisierungen von S, $K := V \cap \mathbb{R}^2$ und $\tilde{K} := \tilde{V} \cap \mathbb{R}^2$ mit $\Phi(K) = \tilde{\Phi}(\tilde{K})$ und sei

$$\psi : \Phi^{-1} \circ \tilde{\Phi}|_{\tilde{K}} : \tilde{K} \longrightarrow K \quad \text{mit} \quad \det(D\psi) > 0,$$

d.h. Φ und $\tilde{\Phi}$ sind kompatibel. Für ein stetiges Vektorfeld f folgt dann mit der Subst.regel (13.56) angewendet auf ψ

$$\int_K \langle f \circ \Phi, \partial_s \Phi \times \partial_t \Phi \rangle \, ds\, dt = \int_{\tilde{K}} \langle f \circ \Phi, \partial_s \Phi \times \partial_t \Phi \rangle \circ \psi \cdot \underbrace{\det(D\psi)}_{>0} \, d\tilde{s}\, d\tilde{t}$$

$$= \int_{\tilde{K}} \langle \underbrace{f \circ \Phi \circ \psi}_{f \circ \tilde{\Phi}}, \underbrace{(\partial_s \Phi \times \partial_t \Phi) \circ \psi \cdot \det(D\psi)}_{=} \rangle \, d\tilde{s}\, d\tilde{t}$$

Kettenregel + Lineare Algebra (nicht-trivialer Schritt!)

$$= \int_{\tilde{K}} \langle f \circ \tilde{\Phi}, \partial_{\tilde{s}} \tilde{\Phi} \times \partial_{\tilde{t}} \tilde{\Phi} \rangle \, d\tilde{s}\, d\tilde{t}. \qquad \square$$

Definition 14.39 (Divergenz). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge und sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Die **Divergenz** von f bei $p \in U$ ist definiert als

$$\operatorname{div}(f)(p) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{8h^3} \int_{\partial B_h^\infty(p)} f \cdot d\mathbf{n},$$

falls der Grenzwert existiert.

Proposition 14.40 (Erste Version des Divergenzsatzes). *Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Dann existiert die Divergenz $\operatorname{div}(f)$ auf ganz U und ist durch*

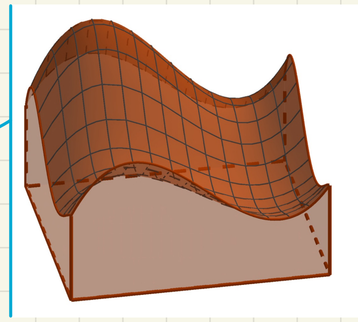
$$\operatorname{div}(f) = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3$$

gegeben. Sei weiter $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ ein abgeschlossenes Rechteck und sei $\varphi : Q \to [z_0, \infty)$ eine stetig differenzierbare Funktion, so dass der abgeschlossene Bereich unter dem Graphen von φ

$$B = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in Q,\ z_0 \le z \le \varphi(x, y)\}$$

in U liegt. Dann gilt

$$\int_B \operatorname{div}(f)\, d\mathrm{vol} = \int_{\partial B} f \cdot d\mathbf{n}.$$



Theorem 14.41 (Divergenzsatz im dreidimensionalen Raum – Satz von Gauss). *Sei B ein kompakter, glatt berandeter Bereich und f ein stetig differenzierbares Vektorfeld definiert auf einer offenen Obermenge von B. Dann gilt*

$$\int_B \operatorname{div}(f)\, d\mathrm{vol} = \int_{\partial B} f \cdot d\mathbf{n}.$$

Der Laplace-Operator berechnet also die mittlere Schwankung einer Funktion f um einen Punkt p.

Definition 14.42 (Laplace-Operator). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann definieren wir für $p \in U$

$$\Delta f(p) = \lim_{r \searrow 0} \frac{c_n}{r^{n+2}} \int_{B_r(p)} (f(p+h) - f(p))\, dh$$

falls der Grenzwert existiert. Es ist üblich die Konstante c_n mittels $c_n = \frac{2(n+2)}{\operatorname{vol}(B_1(0))}$ zu definieren.

quadratische Taylor-Approximation (11.25)

Proposition 14.43 (Laplace-Operator als Differentialoperator). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $F : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann existiert ΔF auf ganz U und erfüllt*

$$\Delta F = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 F.$$

Bew: Sei OBdA $p = 0 \in U$ und für $r > 0$ hinreichend klein

$$L(r) = \int_{B_r(0)} (F(h) - F(0))\, dh$$

$$= \int_{B_r(0)} \Big(\langle \underbrace{\nabla F(0)}_{\text{konst.}}, h \rangle + \tfrac{1}{2} h^T \underbrace{H(0)}_{\text{konst}} h + o(\|h\|^2) \Big)\, dh.$$

Hesse-Matrix

Aus Symmetriegründen gilt

- $\displaystyle\int_{B_r(0)} \langle \nabla F(0), h \rangle\, dh = 0$
- $\displaystyle\underbrace{\tfrac{1}{2} H_{ij}(0)}_{\partial_i \partial_j F(0)} \int_{B_r(0)} h_i h_j\, dh = 0$ für $i \neq j$

Also gilt
$$L(r) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \partial_j^2 F(0) \cdot \underbrace{\int_{B_r(0)} h_j^2\, dh}_{\frac{r^{n+2}}{n} \frac{\operatorname{vol}(B_1(0))}{n+2}} + \overbrace{\operatorname{vol}(B_r(0)) \cdot o(r^2)}^{o(r^{n+2})}.$$

⇝ siehe Skript

Damit folgt

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{r^{n+2}} L(r) = \lim_{r \downarrow 0} \underbrace{\frac{\operatorname{vol}(B_1(0))}{2(n+2)}}_{c_n^{-1}} \sum_{j=1}^n \partial_j^2 F(0) = c_n^{-1} \sum_{j=1}^n \partial_j^2 F(0) \qquad \square$$

Korollar 14.45 (Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ für $n = 2$ oder $n = 3$ offen und $g : U \to \mathbb{R}$ harmonisch (das heisst, $\Delta g = 0$). Dann gilt für jeden abgeschlossenen Ball $\overline{B_r(p)} \subseteq U$ die Mittelwerteigenschaft*

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(\partial B_r(p))} \int_{\partial B_r(p)} g(h)\, d\mathrm{vol}(h) = g(p).$$

Definition 14.47 (Wirbelstärke in Parallelogrammen). Sei f ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Für $p \in U$ und $u, v \in \mathbb{R}^3$ definieren wir die **Wirbelstärke** von f bei p **im infinitesimalen Parallelogramm** zu $u, v \in \mathbb{R}^3$ durch

$$\operatorname{rot}(f, p, u, v) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2} \int_{\partial P(p, hu, hv)} f \cdot d\mathbf{s},$$

falls der Grenzwert existiert.

Proposition 14.48 (Alternierend und Multilinear). *Sei f ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ und sei $p \in U$. Dann gelten folgende Aussagen:*

- *Für alle $p \in U$ und $u, v \in \mathbb{R}^3$ existiert die Wirbelstärke $\operatorname{rot}(f, p, u, v)$.*
- *Die Wirbelstärke $\operatorname{rot}(f, p, u, v)$ hängt bei festem $p \in U$ und $v \in \mathbb{R}^3$ linear von u ab.*
- *Die Wirbelstärke $\operatorname{rot}(f, p, u, v)$ hängt bei festem $p \in U$ und $u \in \mathbb{R}^3$ linear von v ab.*
- *Es gilt $\operatorname{rot}(f, p, u, v) = -\operatorname{rot}(f, p, v, u)$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^3$ und $p \in U$.*

Green

! **Theorem 14.50** (Satz von Stokes). *Sei f ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Dann existiert die Wirbelstärke $\operatorname{rot}(f,p,u,v)$ von f zu jedem Punkt $p \in U$ und zu allen $u, v \in \mathbb{R}^3$ und ist durch*

$$\operatorname{rot}(f,p,u,v) = \langle \operatorname{rot}(f)(p), u \times v \rangle$$

gegeben, wobei das Vektorfeld

$$\operatorname{rot}(f) = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix}$$

auf U die ***Rotation*** *von f genannt wird. Ist $S \subseteq U$ eine glatt berandete, orientierbare Fläche (mit Rand), so gilt des Weiteren*

$$\int_S \operatorname{rot}(f) \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = \int_{\partial S} f \cdot \mathrm{d}s.$$

Bew-Idee: Seien $V, U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $\Phi : V \longrightarrow U$ ein Diffeom., $K \subseteq (V \cap \mathbb{R}^2)$ kompakt und glatt berandet mit pos. orientierter Parametr.

$$\gamma_\ell : I_\ell \longrightarrow \partial K$$

des Randes ∂K für $\ell = 1, \dots, L$ und $\Phi(K) = S$.

Def. das zurückgezogene Vektorfeld $\tilde{f} : V \cap \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$\tilde{f} := \begin{pmatrix} \langle f \circ \Phi, \partial_1 \Phi \rangle \\ \langle f \circ \Phi, \partial_2 \Phi \rangle \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $\operatorname{rot}(\tilde{f}) = \partial_1 \tilde{f}_2 - \partial_2 \tilde{f}_1 = \langle \operatorname{rot}(f) \circ \Phi, \partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi \rangle_{\mathbb{R}^3}$.

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\int_S \operatorname{rot}(f) \cdot \mathrm{d}n &\overset{\text{Def.}}{=} \int_K \langle \operatorname{rot}(f) \circ \Phi, \partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi \rangle_{\mathbb{R}^3} \,\mathrm{dvol}_2 \\
&= \int_K \operatorname{rot}(\tilde{f}) \,\mathrm{dvol}_2 \\
&\overset{\text{Green}}{=} \int_{\partial K} \tilde{f} \cdot \mathrm{d}s \\
&\overset{\text{Def.}}{=} \sum_{\ell=1}^{L} \int_{I_\ell} \langle \tilde{f} \circ \gamma_\ell, \gamma_\ell' \rangle_{\mathbb{R}^2} \,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Def. von } \tilde{f}}{=} \sum_{\ell=1}^{L} \int_{I_\ell} \langle f \circ \Phi \circ \gamma_\ell, \underbrace{(\partial_1 \Phi \circ \gamma_\ell)\gamma_{\ell,1}' + (\partial_2 \Phi \circ \gamma_\ell)\gamma_{\ell,2}'}_{= (\partial_1 \Phi \circ \gamma_\ell,\, \partial_2 \Phi \circ \gamma_\ell) \cdot \binom{\gamma_{\ell,1}'}{\gamma_{\ell,2}'} \overset{\text{Kettenregel}}{=} (\Phi \circ \gamma_\ell)'} \rangle_{\mathbb{R}^3} \,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{\ell=1}^{L} \int_{I_\ell} \langle f \circ \Phi \circ \gamma_\ell, (\Phi \circ \gamma_\ell)' \rangle \,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Def.}}{=} \int_{\partial S} f \cdot \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

$\square$

Lemma 14.65 (Invarianz, glatter Fall). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, welches die Integrabilitätsbedingungen erfüllt. Seien weiter γ_0, γ_1 zwei glatte Wege von $p_0 \in U$ nach $p \in U$, die auf glatte Weise in U homotop sind. Dann gilt*

$$\int_{\gamma_0} f \cdot \mathrm{d}s = \int_{\gamma_1} f \cdot \mathrm{d}s.$$

Glättung durch Faltung

Proposition 14.66 (Invarianz, stetiger Fall). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, welches die Integrabilitätsbedingungen erfüllt. Des Weiteren seien γ_0, γ_1 zwei glatte Wege von $p_0 \in U$ nach $p \in U$, die in U (nicht zwingend auf glatte Weise) homotop sind. Dann gilt*

$$\int_{\gamma_0} f \cdot \mathrm{d}s = \int_{\gamma_1} f \cdot \mathrm{d}s.$$

Bew: Sei $H\ [0,1] \longrightarrow U$ eine glatte Homotopie zwischen γ_0 und γ_1.
Def wieder das zurückgezogene Vektorfeld $\tilde{f} : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$\tilde{f} := \begin{pmatrix} \langle f \circ H, \partial_1 H \rangle \\ \langle f \circ H, \partial_2 H \rangle \end{pmatrix}.$$

Mit der Kettenregel und 11.6 erhalten wir allg.

$$\begin{aligned}
(\partial_1 (f \circ H)(s,t), \partial_2 (f \circ H)(s,t)) &\overset{\text{Def.}}{=} (D_{(s,t)} f \circ H)(s,t) \\
&\overset{\text{Kettenregel}}{=} D_{H(s,t)} f \circ \underbrace{D_{(s,t)} H(s,t)}_{(\partial_1 H(s,t),\ \partial_2 H(s,t))} \\
&= (D_{H(s,t)} f(\partial_1 H(s,t)),\ D_{H(s,t)} f(\partial_2 H(s,t))) \\
&\overset{11.6}{=} (\partial_{\partial_1 H(s,t)} f(H(s,t)),\ \partial_{\partial_2 H(s,t)} f(H(s,t))).
\end{aligned}$$

Daraus folgt

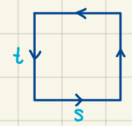
$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\tilde{f}) &\overset{\text{Def.}}{=} \partial_1 \langle f \circ H, \partial_2 H \rangle - \partial_2 \langle f \circ H, \partial_1 H \rangle \\
&= \partial_1 \sum_{i=1}^{n} (f_i \circ H) \cdot \partial_2 H_i - \partial_2 \sum_{i=1}^{n} (f_i \circ H) \cdot \partial_1 H_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} [\partial_1 ((f_i \circ H) \cdot \partial_2 H_i) - \partial_2 ((f_i \circ H) \cdot \partial_1 H_i)] \\
&\overset{\text{Produktregel}}{=} \sum_{i=1}^{n} [\partial_1 (f_i \circ H) \cdot \partial_2 H_i + \cancel{(f_i \circ H) \cdot \partial_1 \partial_2 H} \\
&\qquad - \partial_2 (f_i \circ H) \cdot \partial_1 H_i - \cancel{(f_i \circ H) \cdot \partial_2 \partial_1 H}] \quad \text{Satz von Schwarz} \\
&\overset{\text{Obiges angewendet}}{=} \sum_{i=1}^{n} [(\partial_{\partial_1 H} f_i \circ H) \partial_2 H_i - (\partial_{\partial_2 H} f_i \circ H) \partial_1 H_i] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big[\sum_{j=1}^{n} (\partial_j f_i \circ H) \partial_1 H_j \partial_2 H_i - \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f_i \circ H) \partial_2 H_j \partial_1 H_i\Big] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (\underbrace{\partial_j f_i}_{= \partial_i f_j} \circ H)(\partial_1 H_j \partial_2 H_i - \partial_1 H_i \partial_2 H_j) = 0.
\end{aligned}$$

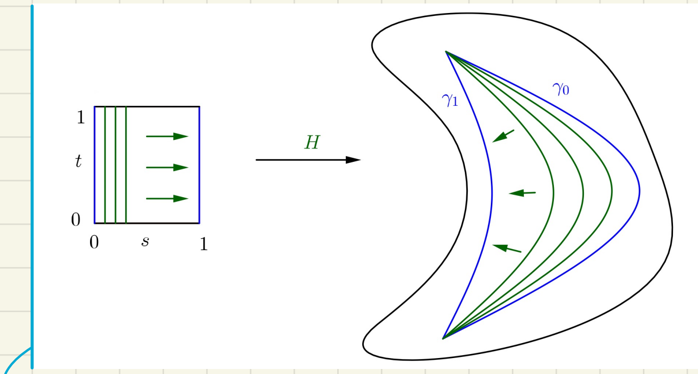
$\rightsquigarrow$ Integrabilitätsbedingungen

Terme heben sich paarweise auf

Also ist $\tilde{f}$ rotationsfrei und es folgt

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{[0,1]^2} \operatorname{rot}(\tilde{f}) \,\mathrm{dvol} \overset{\text{Green}}{=} \int_{\partial [0,1]^2} \tilde{f} \cdot \mathrm{d}s \\
&= \underbrace{\int_0^1 \tilde{f}_1(s,0) \,\mathrm{d}s}_{0,\ \text{da } \partial_1 H(s,0) = 0} + \int_0^1 \tilde{f}_2(1,t) \,\mathrm{d}t - \underbrace{\int_0^1 \tilde{f}_1(s,1) \,\mathrm{d}s}_{0,\ \text{da } \partial_1 H(s,0) = 0} - \int_0^1 \tilde{f}_2(0,t) \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$



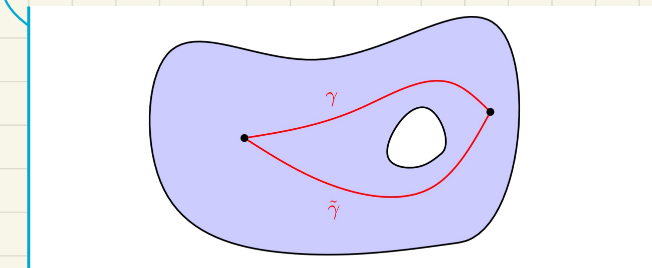


Definition 14.61 (Homotopie). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet (also eine zusammenhängende, offene Teilmenge) und seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to U$ zwei Wege in U mit gleichem Anfangspunkt $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ und gleichem Endpunkt $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. Dann heissen γ_0 und γ_1 **homotop** (in U), falls es eine stetige Abbildung $H : [0,1]^2 \to U$ gibt, die wir eine **Homotopie** nennen und die folgende Eigenschaften erfüllt:

- $H(0,t) = \gamma_0(t)$ für alle $t \in [0,1]$.
- $H(1,t) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in [0,1]$.
- $H(s,0) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ für alle $s \in [0,1]$.
- $H(s,1) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ für alle $s \in [0,1]$.

Falls γ_0 und γ_1 glatte Wege sind und die Homotopie glatt gewählt werden kann, so nennen wir die Wege **auf glatte Weise homotop**.

Definition 14.63 (Einfach zusammenhängend). Ein Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst **einfach zusammenhängend**, falls je zwei Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkt homotop sind.



Figur 14.9: Illustration eines nicht einfach zusammenhängenden Gebiets. Die beiden eingezeichneten Wege γ und $\tilde{\gamma}$ sind nicht homotop. Wer im Wald mit Hund an der Leine spazieren geht, kennt diesen Unterschied sehr gut.

$$= \int_0^1 \langle f(\underbrace{H(1,t)}_{\gamma_1}), \underbrace{\partial_2 H(1,t)}_{\gamma_1'} \rangle \, dt - \int_0^1 \langle f(\underbrace{H(0,t)}_{\gamma_0}), \underbrace{\partial_2 H(0,t)}_{\gamma_0'} \rangle \, dt$$

$$= \int_{\gamma_1} f \cdot ds - \int_{\gamma_0} f \cdot ds,$$

also

$$\int_{\gamma_1} f \cdot ds = \int_{\gamma_0} f \cdot ds.$$

□

Satz 14.64 (Integrabilitätsbedingungen). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Unter dieser Annahme ist ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ genau dann konservativ, wenn f den Integrabilitätsbedingungen*

$$\partial_k f_j = \partial_j f_k \tag{14.6}$$

für alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ genügt.

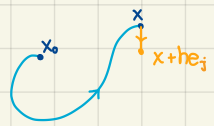
Bew: "$\Rightarrow$": Folgt direkt aus 11.49.

"$\Leftarrow$": Agn. f erfüllt die Int.bedingungen Sei $x_0 \in U$ fest. Da U als Gebiet per Def. Wegzsmh. ist, ex. für alle $x \in U$ ein C^1-Weg $\gamma_x : [0,1] \longrightarrow U$ von x_0 nach x Wegen 14.66 ist damit die Funktion

$$F : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \int_{\gamma_x} f \cdot ds$$

wohldef. Sei $j \in \{1, \ldots, n\}$, $x \in U$ und $h \in \mathbb{R}$ klein genug. Für $x + he_j \in U$ verwenden wir

$$\gamma_{x+he_j}(t) := \begin{cases} \gamma_x(t) & \text{für } t \in [0,1] \\ x + (t-1) \cdot he_j & \text{für } t \in [1,2] \end{cases}$$



Daraus folgt

$$\partial_j F(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(F(x+he_j) - F(x) \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\int_{\gamma_{x+he_j}} f \cdot ds - \int_{\gamma_x} f \cdot ds \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \int_1^2 \langle f(x + (t-1) \cdot he_j, \cancel{h} e_j \rangle \, dt$$

Subst.: $r = t - 1$

$$= \lim_{h \to 0} \int_0^1 \underbrace{\langle f(x + rhe_j, e_j \rangle}_{f_j(x + rhe_j)} \, dr$$

11.36

$$= f_k(x).$$

Da $f_1, \ldots, f_n$ per Annahme stetig sind, folgt aus 11.10, dass F diffbar ist und es gilt $\nabla F = f$. Damit ist F also ein Potential von f, womit f nach 11.49 konservativ ist.

□