D. Lineare Algebra | Spektrum von A: $\Lambda(A) = \{\lambda \in K \mid \lambda \text{ ist EW von } A\}$. Spektralradius: $\rho(A) := \max_{\lambda \in \Lambda(A)} |\lambda|$.

$x \in \mathbb{C}^n$, $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$: $\|x\|_{p_2} \le \|x\|_{p_1} \le n^{\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)} \|x\|_{p_2}$

Def. $\|\cdot\|_M$ auf $\mathbb{C}^{m\times n}$ heisst konsistent mit $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|_W$ falls $\forall x \in \mathbb{C}^n\ \forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}$: $\|Ax\|_W \le \|A\|_M \|x\|_V$.

Bh. $\|\cdot\|_F$, $\|\cdot\|_2$ sind konsistent.
Bew. $\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^m \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right|^2 \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\le} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \sum_{j=1}^n |x_j|^2\right) = \|A\|_F^2 \cdot \|x\|_2^2$

Spaltensummennorm: $\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$

Zeilensummennorm: $\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

Def. $\|\cdot\|_M$ submultiplikativ: $\|AB\|_M \le \|A\|_M \cdot \|B\|_M$

SVD: $A = U\Sigma V^H$

Spectral Mapping Thm. Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $q \in \mathbb{C}[X]$ gilt $\Lambda(q(A)) = q(\Lambda(A))$.

Cauchy-Schwarz. $|\langle v, w\rangle| \le \|v\| \cdot \|w\|$

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\|\cdot\|$ eine mit einer Vektornorm verträgliche Matrixnorm. Dann gilt $\forall k \ge 1$
$\rho(A) \le \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$,
insbesondere $\rho(A) \le \|A\|$

MATLAB. Gram-Schmidt
```
for l = 1:k
  sl = A(:,1:l-1)'*A(:,l);
  ql = A(:,l) - A(:,1:l-1)*sl;
  rl = norm(ql);
  A(:,l) = ql/rl;
end
```

Def. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heisst
1) pos. def. falls $\forall x \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$: $x^TAx > 0$
2) pos. sem. def. falls $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $x^TAx \ge 0$
SPD $\hat{=}$ sym. pos. def.

Def. Frobeniusnorm auf $\mathbb{C}^{m\times n}$:
$\|A\|_F := \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{1/2} = \text{spur}(AA^H)^{1/2}$

Def. Durch $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|_W$ induzierte Matrixnorm
$\|A\|_{VW} := \sup_{x\ne 0} \frac{\|Ax\|_W}{\|x\|_V} = \sup_{\|x\|_V = 1} \|Ax\|_W$

Bsp. $\|A\|_{max} = \max|a_{ij}|$ ist nicht submultiplikativ

MATLAB Commands
```
C = A*B      % Matrixmult.
C = A.*B     %  "  komponentenweise
B = A'       % A^H
B = A.'      % A^T
trace(A)     % Spur
eye(n) % I_n , tril(A), triu(A), eig(A),
rand, norm, svd
```

Spektralnorm. $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$:
$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^HA)} = \sigma_{max}(A) \le \|A\|_F = \text{spur}(A^HA)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{\min(m,n)} \sigma_k^2\right)^{1/2}$

Es gilt $\|A^T\|_1 = \|A\|_\infty$ und $\|A^T\|_\infty = \|A\|_1$

Für verträgliche Normen gilt $\rho(B) \le \|B\|$.

Def. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heisst strikt zeilendominant, wenn $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\ne i}^n |a_{ij}|$ für $i = 1,\dots,n$ gilt.

Satz. Eine strikt zeilendominante Matrix ist regulär.

Bew. Agn. A ist strikt zeilendominant und nicht regulär, d.h. $\exists x \ne 0$: $Ax = 0$.
Sei $i := \operatorname{argmax}_{j\in\{1,\dots,n\}} |x_j| \in \{1,\dots,n\}$
Dann gilt $x_i \ne 0$ mit $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$
$\Rightarrow a_{ii}x_i = -\sum_{j\ne i} a_{ij}x_j$
$\Rightarrow |a_{ii}| \le \sum_{j\ne i} |a_{ij}| \cdot \frac{|x_j|}{|x_i|} \le \sum_{j\ne i} |a_{ij}|$

Vandermonde. Interpolationsproblem in Matrixdarstellung:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}}_{=: V(x_0,\dots,x_n) =: V \ \leadsto\ \text{Vandermonde-Matrix}} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow \det(V) = \prod_{0\le j<i\le n} (x_i - x_j).$$

Bew. Sei $D_n := V(x_0,\dots,x_n)$ und betrachte D_n als ein Polynom in x_n. Dann gilt
- D_n ist ein Polynom vom Grad n mit führendem Koeffizienten D_{n-1}, was über Entwicklung der letzten Zeile folgt.
- $x_0,\dots,x_{n-1}$ sind Nullstellen von D_n, da für $x_n = x_m$ für $m \in \{0,1,\dots,n-1\}$ die Reihen n und m identisch sind und somit die Determinante verschwindet.

Also gilt $D_n = D_{n-1} \cdot \prod_{0\le j<n} (x_n - x_j)$. Induktiv folgt die Aussage. $\square$

Horner-Schema. $p_n(x) = (\dots(((c_nx + c_{n-1})x + c_{n-2})x + c_{n-3})x + \dots + c_1)x + c_0$

MATLAB.
```
function y = horner(c, x)
  n = length(c) - 1;  k = length(x);
  y(1:k,1) = c(n+1)
  for j = n:-1:1
     y = c(j) + y.*x;
  end
end
```

MATLAB. Vor- und Rückwärtssubstitution
```
function x = fsub(L,b)
  n = length(b); x = zeros(size(b));
  for i = 1:n
    x(i) = (b(i) - L(i,1:i-1)*x(1:i-1)) / L(i,i);
  end
end

function x = bsub(R,b)
  n = length(b); x = zeros(size(b));
  for i = n:-1:1
    x(i) = (b(i) - R(i,i+1:n)*x(i+1:n)) / R(i,i);
  end
end
```

MATLAB (GaussQuad.)
```
function [x,al] = gaussQuad(n)
% berechnet Knoten x und Gewichte al der Gauss Quad.
b = 1:n;  b = b./sqrt(4*b.*b-1);
J = diag(b,-1) + diag(b,1); [ev, ew] = eig(J);
x = diag(ew);  a = (2*(ev(1,:).*ev(1,:)));
end
```
```
function I = GaussQuadInt(f,a,b,n)   ~> berechnet ∫_a^b f(x)dx
[x,al] = gaussQuad(n)
x = ((b-a)/2).*x + (b+a)/2;   } affine Transformation
al = ((b-a)/2).*al;           }
I = 0;
for k = 1:n+1
  I = I + al(k)*f(x(k));
end
end
```

MATLAB. (Format)
format rat $\leadsto$ rational representation
format $\leadsto$ reset to default

1. Computerarithmetik | $x_{min}(\mathbb{F}) = \beta^{e_{min}-1}$, $x_{max}(\mathbb{F}) = \beta^{e_{max}}(1-\beta^{-t})$ | $\varepsilon_M := \beta^{1-t}$

Def. (Gleitkommazahlen) Sei $\beta \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ (Basis), $t \in \mathbb{N}$ (Mantissenlänge), $e_{min}, e_{max} \in \mathbb{Z}$ mit $e_{min} < 0 < e_{max}$ (Exponentenschranken). Dann ist $\mathbb{F} = \mathbb{F}(\beta, t, e_{min}, e_{max})$ def. als

$$\mathbb{F} := \left\{ \pm \beta^e \left(\frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \dots + \frac{d_t}{\beta^t} \right) \;\middle|\; \begin{array}{l} d_1, \dots, d_t \in \{0, \dots, \beta-1\} \\ d_1 \neq 0 \\ e \in \mathbb{Z},\ e_{min} \leq e \leq e_{max} \end{array} \right\} \cup \{0\}$$

Bsp. (Runden) Sei $\beta = 10$, $t = 3$.
$rd(0.9996) = 1.0$
$rd(0.3345) = 0.334$
$rd(0.3355) = 0.336$
(nach IEEE 754)

Satz. Für alle $x \in \mathrm{Bereich}(\mathbb{F})$ ex. ein (von x abhängiges) $\delta \in \mathbb{R}$, s.d. $rd(x) = x(1+\delta)$ und $|\delta| \leq u$ gilt wobei $u = u(\mathbb{F}) = \frac{1}{2}\beta^{1-t}$ die Rundungseinheit bezeichnet.

↳ Variante: ... $rd(x) = x(1+\delta)^{-1}$, $|\delta| \leq u$, ...

Def. (Standardmodell der Rundung) Die Rundung zur Gleitkomma-arithmetik $\mathbb{F}$ ist eine Abbildung $rd(\cdot): \mathrm{Bereich}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ derart, dass für alle $x, y \in \mathrm{Bereich}(\mathbb{F})$ mit $x \circ y \in \mathrm{Bereich}(\mathbb{F})$ ein $\delta \in \mathbb{R}$ ex, s.d. $rd(x \circ y) = (x \circ y)(1+\delta)$, $|\delta| \leq u$, $\circ \in \{+, -, *, /\}$.

Lemma 1.15. Für $|\delta_i| \leq u(\mathbb{F})$, $\rho_i = \pm 1$, $n < 1/u(\mathbb{F})$ ex. ein $\Theta_n \in \mathbb{R}$ mit
$$\prod_{i=1}^{n} (1+\delta_i)^{\rho_i} = 1 + \Theta_n, \quad |\Theta_n| \leq \frac{n \cdot u(\mathbb{F})}{1 - n \cdot u(\mathbb{F})} =: \gamma_n(\mathbb{F}).$$
Für $i < j$ gilt $\gamma_i < \gamma_j$.

Lemma. Sei $x \in \mathbb{F}$ und $y \in \mathbb{F}$ die zu x nächste Zahl in $\mathbb{F}$. Dann gilt: $\beta^{-1}\varepsilon_M |x| = \beta^{-t} \cdot |x| \leq |x-y| \leq \varepsilon_M \cdot |x| = \beta^{1-t}|x|$.

$\mathrm{Bereich}(\mathbb{F}) := \{x \in \mathbb{R} \mid x_{min}(\mathbb{F}) \leq |x| \leq x_{max}(\mathbb{F})$

Rundungsanalyse Skalarprodukt. $x, y \in \mathbb{R}^n$, $s_i = \sum_{k=1}^{i} x_k y_k$. (*)

$\hat{s}_1 := rd(x_1 y_1) = x_1 y_1 (1+\delta)$, $\hat{s}_2 := rd(\hat{s}_1 + x_2 y_2) = \dots$

$\hat{s}_3 = rd(\hat{s}_2 + x_3 y_3) = x_1 y_1 (1+\delta)^3 + x_2 y_2 (1+\delta)^3 + x_3 y_3 (1+\delta)^2$,

$\hat{s}_n = x_1 y_1 (1+\delta)^n + x_2 y_2 (1+\delta)^n + x_3 y_3 (1+\delta)^{n-1} + \dots + x_n y_n (1+\delta)^2$.

$\overset{\text{Lemma 1.15}}{=} x_1 y_1 \Theta_n + x_2 y_2 \Theta_n + x_3 y_3 \Theta_{n-1} + \dots + x_n y_n \Theta_2 \leq \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \Theta_n$

$= (x + \Delta x)^T y = x^T (y + \Delta y)$ $(= rd(x^T y))$

mit $|\Delta x| \leq \gamma_n |x|$, $|\Delta y| \leq \gamma_n |y|$ (komponentenweise Ungl.)

Rückwärtsfehler

Vorwärtsfehler: $|x^T y - rd(x^T y)| \leq \gamma_n \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| = \gamma_n |x|^T |y|$.

Def. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Dann schreibt man

$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \to a$, wenn $\limsup_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$.

$f(x) = o(g(x))$ für $x \to a$, wenn $\lim_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$.

Sei $p(x) = a_\ell x^\ell + a_{\ell+1} x^{\ell+1} + \dots + a_u x^u$ Polynom mit $a_\ell \neq 0$, $a_u \neq 0$ und $u \geq \ell$. Dann gilt

- $p(x) = \mathcal{O}(x^j)$ für $x \to \infty$ $\forall j \geq u$
- $p(x) = o(x^j)$ für $x \to \infty$ $\forall j > u$
- $p(x) = \mathcal{O}(x^j)$ für $x \to 0$ $\forall j \leq \ell$
- $p(x) = o(x^j)$ für $x \to 0$ $\forall j < \ell$.

Denormalisierte Zahlen. Sind def. als
$$\hat{\mathbb{F}} := \mathbb{F} \cup \left\{ \pm \beta^{e_{min}} \left(\frac{d_2}{\beta_2} + \dots + \frac{d_t}{\beta_t} \right) \;\middle|\; d_2, \dots, d_t \in \{0, \dots, \beta-1\} \right\}.$$

Lemma 2.4 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reguläre Dreiecksmatrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und $x = A^{-1}b$. Dann erfüllt die durch Vor- bzw. Rückwärtssubst. in $\mathbb{F}$ berechnete numerische Lösung $\hat{x}$ des LGS $Ax = b$
$$(A + \Delta A)\hat{x} = b \text{ für ein } \Delta A \text{ mit } |\Delta A| \overset{\text{komponentenweise}}{\leq} \gamma_n(\mathbb{F}) \cdot |A|.$$

Bew. Für Notation sei $\Theta_i \in \mathbb{R}$ unbestimmt mit $|\Theta_i| \leq \gamma_i$.

Sei $A = \nabla$ (anderer Fall analog). Dann wird $Ax = b$ gelöst durch
$$x_i := \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right) / a_{ii}, \quad i = n, n-1, \dots, 1.$$

Zwischenbeh. Sei $y = (c - \sum_{i=1}^{k-1} a_i b_i) b_k$ in $\mathbb{F}$ mit Rundung berechnet

Via
```
s := c
for i = 1:k-1
    s := s - a_i b_i
end
y := s / b_k
```
. Dann gilt für das resultierende $\hat{y} \in \mathbb{F}$
$$b_k \hat{y} (1 + \Theta_k) = c - \sum_{i=1}^{k-1} a_i b_i (1 + \Theta_i).$$

Bew. Für $s := rd(c - \sum_{i=1}^{k-1} a_i b_i)$ folgt analog zu (*)

$$\hat{s} = c(1+\delta_1) \cdots (1+\delta_{k-1}) - \sum_{i=1}^{k-1} a_i b_i (1+\varepsilon_i)(1+\delta_i) \cdots (1+\delta_{k-1})$$

für $|\varepsilon_i|, |\delta_i| \leq u(\mathbb{F})$. Zudem gilt
$$\hat{y} = rd(\hat{s}/b_k) = \hat{s}/(b_k(1+\delta_k)) \quad \text{mit } |\delta_k| \leq u(\mathbb{F}).$$

Nach Division durch $(1+\delta_1) \cdots (1+\delta_{k-1})$ folgt
$$b_k \hat{y} \underbrace{\frac{1+\delta_k}{(1+\delta_1) \cdots (1+\delta_{k-1})}}_{= 1 + \Theta_k} = c - \sum_{i=1}^{k-1} a_i b_i \underbrace{\frac{1+\varepsilon_i}{(1+\delta_1) \cdots (1+\delta_{i-1})}}_{= (1+\Theta_i)}.$$

Dies bew. die Zwischenbeh. ☐

Anwendung der Zwischenbeh. auf $\hat{x}_i := rd(x_i)$ ergibt nun
$$a_{ii} \hat{x}_i (1 + \Theta_{n-i+1}) = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \hat{x}_j (1 + \Theta_{j-i})$$
$$\Rightarrow a_{ii}(1 + \Theta_{n-i+1}) \hat{x}_i + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} (1 + \Theta_{j-i}) \hat{x}_j = b_i$$

Somit gilt $(A + \Delta A)x = b$ für
$$|\Delta A_{ij}| \leq \begin{cases} \gamma_{n-i+1} |a_{ii}|, & i = j \\ \gamma_{|i-j|} |a_{ij}|, & i < j. \end{cases}$$

Mit der Monotonieeigenschaft $\gamma_{i+1} > \gamma_i$ folgt nun die Behauptung. ☐

Satz 4.14 Das Legendre-Polynom q_{n+1} hat genau $n+1$ einfache Nullstellen in $(-1, 1)$.

Bew. Def. $N := \{\lambda \in (-1,1) \mid \lambda \text{ ist NS ungerader Vielfachheit von } q_{n+1}\}$ und setze
$$h(x) := 1^{\in \mathbb{P}_0} \quad \text{falls } N = \emptyset$$
$$h(x) := \prod_{i=1}^{m} (x - \lambda_i) \in \mathbb{P}_m \quad \text{falls } N = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}.$$

Dann ist $q_{n+1} \cdot h \in \mathbb{P}_{n+m+1}$ reell und hat in $(-1, 1)$ keinen Vorzeichenwechsel. Daraus folgt
$$(q_{n+1}, h) = \int_{-1}^{1} q_{n+1}(x) h(x) dx \neq 0.$$

Wegen $q_{n+1} \perp \mathbb{P}_n$ folgt $h \notin \mathbb{P}_n$ und somit $m > n$, womit q_{n+1} mind. $n+1$ verschiedene Nullstellen ungerader VF. in $(-1, 1)$ hat.

Da nach dem Fundamentalsatz der Algebra q_{n+1} genau $n+1$ NS mit VF. hat, folgt die Aussage ☐

2. Direkte Lösung Linearer Gl.systeme | MATLAB: `x = A\b;` löst $Ax = b$

Algo. Vorwärtssubst. ($Lx = b$)

for $i = 1, \dots, n$ do

$$x_i := \frac{1}{\ell_{ii}}\left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} x_k\right)$$

end

Algo. Rückwärtssubst. ($Rx = b$)

for $i = n, \dots, 1$ do

$$x_i := \frac{1}{r_{ii}}\left(b_i - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} x_k\right)$$

end

Satz 2.17 Sei $\hat{x} \neq 0$ die num. berechnete Lösung von $Ax = b$. Dann gilt $\min\{\|\Delta A\|_2 \mid (A + \Delta A)\hat{x} = b\} = \frac{\|r\|_2}{\|\hat{x}\|_2}$, wobei $r = b - A\hat{x}$ das Residuum von $\hat{x}$ ist.

Def. Die (relative) Kondition der Funktion $x \mapsto f(x)$ an der Stelle x ist

$$\operatorname{cond}(f, x) := \frac{\|f'(x)\|_{\mathcal{L}(V_i, V_o)}}{\|f(x)\|_{V_o}} \cdot \|x\|_{V_i},$$

wobei V_i, V_o endl. dim. VR sind, $\mathcal{L}(V_i, V_o) = \operatorname{Hom}(V_i, V_o)$ und $\forall B \in \mathcal{L}(V_i, V_o)$: $\|B\|_{\mathcal{L}(V_i, V_o)} := \sup_{x \in V_i \setminus \{0\}} \frac{\|Bx\|_{V_o}}{\|x\|_{V_i}}$

→ **Bsp.** Subtraktion: Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x - y$. Dann gilt $\|f'(x_0, y_0)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})} = \|(\partial_x f(x_0, y_0), \partial_y f(x_0, y_0))\|_2 = \|(1, -1)\|_2 = \sqrt{2}$. Also ist die rel. Kond. der Subtraktion von x_0 und y_0 gleich

$$\operatorname{cond}(f, (x_0, y_0)) = \frac{\sqrt{2}}{|x_0 - y_0|}\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \xrightarrow{x_0 \approx y_0} +\infty$$

Satz 2.22 Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ regulär und $\Delta A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, so dass $\|A^{-1} \cdot \Delta A\| < 1$ gilt für eine submultiplikative Norm $\|\cdot\|$. Dann ist $(A + \Delta A)\hat{x} = b + \Delta b$ eindeutig lösbar und es gilt

$$\underbrace{\frac{\|x - \hat{x}\|}{\|x\|}}_{\text{rel. Fehler}} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|A\|}{1 - \|A^{-1} \cdot \Delta A\|}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right),$$

wobei $\hat{x} = x + \Delta x$ (Fehler von Lösung)

Satz 2.24 Sei $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dann gilt $B^m \xrightarrow{m \to \infty} 0$ g.d.w. $\rho(B) < 1$.

Kor. 2.25 Sei $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $\rho(B) < 1$. Dann gilt:
1) $(I_n - B)^{-1}$ existiert
2) die Neumann-Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} B^j = (I_n - B)^{-1}$ konvergiert.

Satz. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ SPD. Dann gilt
1) A ist regulär
2) $a_{ii} > 0$
3) $|a_{ij}| < \frac{1}{2}(a_{ii} + a_{jj})$ für $i \neq j$. $\Rightarrow \max_{i,j} |a_{ij}| = \max(a_{ii})$
4) $\forall X \in GL_n(\mathbb{R})$ ist $X^T A X$ SPD
5) $A = \operatorname{diag}(A_1, A_2) \Rightarrow A_1, A_2$ sind SPD
6) Es ex. $R = \nabla \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $R^T R = A$.

Def. Ein Algo. zur Lösung eines LGS $Ax = b$ heisst numerisch rückwärtsstabil, wenn für das berechnete $\hat{x}$ gilt

$(A + \Delta A)\hat{x} = b$ für $\|\Delta A\|_2 \lesssim u(\mathbb{F}) \cdot \|A\|_2$

$\overset{2.17}{\Longleftrightarrow} \|r\|_2 = \|b - A\hat{x}\|_2 \lesssim u(\mathbb{F}) \cdot \|A\|_2 \cdot \|\hat{x}\|_2$

MATLAB. LR-Zerl. mit Pivotisierung

```
function [P,L,U] = pivot_LU(A)
  n = size(A,2);
  L = eye(size(A));
  P = eye(size(A));
  U = A;
  for k = 1:n-1
    [~, ind] = max(abs(U(k:end, k))); % pivot index
    U([k, ind], :) = U([ind, k], :);
    P([k, ind], :) = P([ind, k], :);
    V = U(k+1:end, k) / U(k, k);
    L(k+1:end, k) = V;
    U(k+1:end, :) = U(k+1:end, :) - V * U(k, :);
    U(k+1:end, k) = 0;
    L([k, ind], 1:k-1) = L([ind, k], 1:k-1);
  end
end
```

Def. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besitzt LR-Zerlegung, falls $R = \nabla \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $L = \Delta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\ell_{11} = \dots = \ell_{nn} = 1$ ex., s.d. $A = LR$ gilt.

Satz 2.6 A regulär + $A = LR$ ex. $\Rightarrow$ $A = LR$ eindeutig. + $r_{ii} \neq 0$ (Bew. auf Rückseite)

Satz 2.9 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär. A besitzt LR-Zerl. g.d.w. alle führenden Hauptabschnittmatrizen $S_k = (a_{ij})_{i,j = 1, \dots, k}$ regulär sind.

MATLAB. LR-Zerlegung.

```
for k = 1:n-1
  A(k+1:n, k) = A(k+1:n, k)/A(k, k);
  A(k+1:n, k+1:n) = A(k+1:n, k+1:n) - A(k+1:n, k) * A(k, k+1:n);
end
L = tril(A, -1) + eye(n);
R = triu(A);
```

Algo. Gauss ohne Pivotsuche — Laufzeit
1) Bestimme LR-Zerl. von A: $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$
2) Löse $Ly = b$ mit Vorwärtssubst.: $n^2 - n$
3) Löse $Rx = y$ mit Rückwärtssubst.: n^2

Gesamtkosten: $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$.
(bei (2) $\ell_{ii} = 1$ ausgenutzt!)

Def. Kondition einer $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die regulär ist: $\kappa(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \overset{\text{falls } \|\cdot\| \text{ submultiplikativ}}{\geq} \|I_n\|$.

Kondition für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Seien $\sigma_1 \geq \dots \sigma_r > 0$ Sing.werte von A. Dann ist Kondition von A geg. durch $\kappa(A) := \frac{\sigma_1}{\sigma_r}$.

Algo. Gauss mit Pivotsuche — Laufzeit: $\mathcal{O}(n^3)$
1) Bestimme Zerlegung $PA = LR$
2) Löse $Ly = Pb$ mit Vorwärtssubst.
3) Löse $Rx = y$ mit Rückwärtssubst.

Satz 2.32 Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ex. eine Zerlegung $PA = LR$ mit $|\ell_{ij}| \leq 1$ $\forall i,j \in \{1, \dots, n\}$ g.d.w. A regulär ist.

Algo. Cholesky-Zerlegung — Laufzeit: $\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$

for $j = 1, \dots, n$ do
  for $i = 1, \dots, j-1$ do
    $r_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} r_{kj}\right) / r_{ii}$
  end
  $r_{jj} = \left(a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} r_{kj}^2\right)^{1/2}$
end

MATLAB Commands. `cond(·)`, `condest(·)`

MATLAB. Chol.-Decomposition — Laufzeit: $\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$

```
function R = chol_dec(A)
  R = zeros(size(A));
  n = length(A);
  for j = 1:n
    for i = 1:j-1
      R(i,j) = (A(i,j) - R(1:i-1, i)' * R(1:i-1, j)) / R(i,i);
    end
    R(j,j) = sqrt(A(j,j) - R(1:j-1, j)' * R(1:j-1, j));
  end
end
```

Laufzeiten mit Bandstruktur:
LR-Zerl. $\approx 2npq$
Vorwärtssubst. $\approx 2nq$
Rückwärtssubst. $\approx 2np$
Gesamt $\approx 2n(pq + p + q)$

Algo. LR-Zerl. für Bandmatrizen

for $k = 1, \dots, n-1$ do
  for $i = k+1, \dots, \min\{n, k+q\}$ do
    $a_{ik} = a_{ik} / a_{kk}$
    for $j = k+1, \dots, \min\{n, k+p\}$ do
      $a_{ij} = a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj}$
    end
  end
end

```
function x = f_subs_tri(a, b, d)
n = length(d); x = zeros(n, 1);
x(1) = d(1)/b(1);
for k = 2:n
  x(k) = (d(k) - x(k-1)*a(k-1))/b(k);
end
```

$\begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ a & \ddots & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} x = d$

⊛ Für b_subs_tri() siehe Rückseite

MATLAB LR-Zerl. für Bandmatrizen

```
function [L,R] = lr_band(a, b, c)
  n = length(b);
  al = zeros(1, n-1);
  be = zeros(1, n);
  ga = c;
  be(1) = b(1);
  for k = 1:n-1
    al(k) = a(k)/be(k);
    be(k+1) = b(k+1) - al(k)*c(k);
  end
  L = diag(al, -1) + eye(n);
  R = diag(be) + diag(ga, 1);
end
```

$A = \begin{pmatrix} \ddots & c & 0 \\ a & b & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$

MATLAB. Chol.-Dec. for Bandmatrix

$A = \begin{pmatrix} \ddots & & & 0 \\ a & b & c & \\ 0 & & \ddots & \end{pmatrix}$

```
function [al, be, ga] = chol_dec_band(a, b, c)
  n = length(c)
  al = zeros(n-2, 1); be = zeros(n-1, 1); ga = zeros(n, 1);
  for k = 1:n
    if k > 2
      al(k-2) = a(k-2)/ ga(k-2);
    end
    if k > 1
      be(k-1) = (b(k-1) - b(max(k-2, 1)) * al(max(k-2, 1))) / ga(k-1);
    end
    ga(k) = sqrt(c(k) - al(max(k-2, 1))^2 - be(max(k-1, 1))^2);
end
```

Bew. S.2.6 $0 \neq \det A = \det L \cdot \det R = \prod_{i=1} r_{ii} \Rightarrow r_{ii} \neq 0$.
Seien $A = LR = L'R'$ LR-Zerl. von A. Dann sind R, R' regular, da $r_{ii}, r'_{ii} \neq 0$. Aus $LR = L'R'$ folgt $L^{-1}L' = R(R')^{-1}$. Es gilt $L^{-1}L' = \Delta$, $R(R')^{-1} = \nabla$.
$\Rightarrow L^{-1}L'$ ist Diagonalmatrix mit 1 auf der Diagonale, da $l_{ii} = 1$. $\Rightarrow L^{-1}L' = I_n \Rightarrow L = L'$, $R = R'$. □

→ **Bem. zu S.2.6.** Ist A nicht regulär, gilt keine Eindeutigkeit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Def. Sei $\pi: \{1,..,n\} \to \{1,..,n\}$ eine Permutation. Dann ist

$$P_\pi := (e_{\pi(1)}, e_{\pi(2)}, \dots, e_{\pi(n)})$$

die zu π zugehörige Permutationsmatrix.

→ Eigenschaften.
i) $P_\pi e_i = e_{\pi(i)}$ ii) $P_\pi^{-1} = P_\pi^T$ iii) $P_{\pi \circ \tilde{\pi}} = P_\pi P_{\tilde{\pi}}$
iv) $P_\pi A$ entsteht aus A durch Zeilenpermutationen.

Def. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst Bandmatrix mit Bandbreite $p+q+1$, falls es $p, q \in \mathbb{N}_0$ gibt mit

$$a_{ij} = 0 \text{ für } j > i+p \text{ oder } i > j+q.$$

p heisst obere-, q heisst untere Bandbreite.

Bew. L.3.35 Wegen $\mathbb{P}_n = \operatorname{span}\{T_n\}_{n \geq 0}$ ist das Bestapprox.problem äquivalent zum Minimierungsproblem $\min_{\tilde{a}_0, .., \tilde{a}_n} \| f - \sum_{k=0}^n \tilde{a}_k \tilde{T}_k \|_{L^2_\omega}^2$.
Dies ist wiederum äquivalent zu $\forall q \in \mathbb{P}_n : \underbrace{(f - \sum_{k=0}^n \tilde{a}_k \tilde{T}_k)}_{\in \mathbb{P}_n^\perp} \perp q$
im Sinne von $(\cdot,\cdot)_\omega$, d.h.
Daraus folgt $(f - \sum_{k=0}^n \tilde{a}_k \tilde{T}_k, \tilde{T}_m)_\omega = 0$ für $m = 0,..,n$.
Wegen $(\tilde{T}_n, \tilde{T}_m)_\omega = \delta_{n,m}$ ist dies äquivalent zu

$$0 = (f, \tilde{T}_m)_\omega - (\sum_{k=0}^n \tilde{a}_k \tilde{T}_k, \tilde{T}_m)_\omega = (f, \tilde{T}_m)_\omega - \tilde{a}_m$$
$$\Rightarrow \tilde{a}_m = (f, \tilde{T}_m)_\omega.$$

Durch reskalierung folgt

$$\tilde{a}_k \tilde{T}_k = \sqrt{2/\pi}\,(f, \tilde{T}_k)_\omega T_k = \tfrac{2}{\pi}(f, T_k)_\omega T_k = a_k T_k. \quad \square$$

Satz 2.15 Sei für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die LR-Zerl. ohne Pivotisierung durchführbar. Dann erfüllt die in $\mathbb{F}$ berechnete Lösung $\hat{x}$ von $Ax = b$:

$$(A + \Delta A)\hat{x} = b \quad \text{für } \Delta A \text{ mit } |\Delta A| \leq (3\gamma_n + \gamma_n^2)|\hat{L}| \cdot |\hat{R}|$$

wobei $\hat{L}$ und $\hat{R}$ die in $\mathbb{F}$ berechneten Faktoren der LR-Zerl. sind.

Satz. 2.39 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ SPD und $\hat{x}$ die in $\mathbb{F}$ berechnete Lösung von $Ax = b$. Dann gilt

$$(A + \Delta A)\hat{x} = b \quad \text{für } \|\Delta A\|_2 \leq 4n(3n+1) \cdot u(\mathbb{F}) \cdot \|A\|_2.$$

Bew. S.3.31 Bew. durch Widerspruch. Agn. es ex. $p_n \in \mathbb{P}_n$ mit höchstem Koeff. $a_n = 2^{n-1}$ und $\|p_n\|_\infty < \|T_n\|_\infty = 1$. Dann ist $T_n - p_n$ ein Polynom vom Grad höchstens $n-1$.
Wegen Lemma 3.30 gilt an den Punkten $\bar{x}_j = \cos(\frac{j\pi}{n})$:
- $T_n(\bar{x}_{2k}) = 1$, $p_n(\bar{x}_{2k}) < 1 \Rightarrow p_n(\bar{x}_{2k}) - T_n(\bar{x}_{2k}) < 0$
- $T_n(\bar{x}_{2k+1}) = -1$, $p_n(\bar{x}_{2k+1}) > -1 \Rightarrow p_n(\bar{x}_{2k+1}) - T_n(\bar{x}_{2k+1}) > 0$.

Damit ist $T_n - p_n$ an den $n+1$ Punkten $\bar{x}_j$ für $j = 0,..,n$ abwechselnd positiv und negativ und hat daher mind. n Nullstellen in $[-1,1]$ im Widerspruch zu $\deg(T_n - p_n) \leq n-1$. □

Lemma 3.33 i) $C([-1,1]) \subseteq L^2_\omega(-1,1)$
ii) Die lineare Injektionsabb $\iota: C([-1,1]) \to L^2_\omega(-1,1)$, welche ein $f \in C([-1,1])$ mit einem Element von $L^2_\omega(-1,1)$ identifiziert ist stetig, d.h es ex. $C > 0$, s.d. $\forall f \in C([-1,1]): \|\iota(f)\|_{L^2_\omega(-1,1)} \leq C \cdot \|f\|_{C([-1,1])}$.

↳ **Bew.** Wegen $\|f\|^2_{C([-1,1])} = \max\{|f(x)|^2 : x \in [-1,1]\}$, gilt $\forall f \in C([-1,1])$:

$$\|f\|^2_{L^2_\omega(-1,1)} = \int_{-1}^1 |f(x)|^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \leq \|f\|^2_{C([-1,1])} \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{\pi} \quad \square$$

Bew. L.3.34 Es gilt $\int_0^\pi \cos(mx)\cos(nx)\,dx = 0$ für $n \neq m$ und $\int_0^\pi (\cos(kx))^2 dx = \begin{cases} \pi/2 & \text{falls } k \neq 0 \\ \pi & \text{falls } k = 0 \end{cases}$. Zudem gilt

$$T_k(x) = \operatorname{Re}(z^k) = \tfrac{1}{2}(z^k + z^{-k}) = \operatorname{Re}(e^{ik\theta}) = \cos(k\theta)$$

für $x = \cos\theta \in [-1,1]$, $|z| = 1$.
Wir nehmen $n \neq m$ und $n, m \geq 0$ an und rechnen mit $x = \cos\theta$ durch Substitution

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_\pi^0 \cos(n\theta)\cos(m\theta)\frac{1}{\underbrace{\sqrt{1-\cos^2\theta}}_{\sin\theta}}(-\sin\theta)\,d\theta$$
$$= \int_0^\pi \cos(n\theta)\sin(n\theta)\,d\theta = 0.$$

und analog

$$\int_{-1}^1 (T_n(x))^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \overset{(*)}{=} \begin{cases} \pi/2 & \text{falls } n \neq 0 \\ \pi & \text{falls } n = 0 \end{cases}.$$

Also ist $\{T_n\}_{n \geq 0}$ orthogonal auf $[-1,1]$ bzgl. $(\cdot,\cdot)_\omega$.
Damit ist auch $\{\tilde{T}_n\}_{n \geq 0}$ orthogonal und aus $(*)$ ergibt sich, dass $\tilde{T}_n$ normiert bzgl. $(\cdot,\cdot)_\omega$ sind.

```
function x = b_subs_tri(be, ga, d)
n=length(d); x=zeros(n,1);
x(n) = d(n) / be(n);
for k = n-1:-1:1
  x(k) = (d(k) - ga(k)*x(k+1)) / be(k);
end
end
```

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ 0 & \ddots \end{pmatrix} x = d$$

3. Interpolation und Approximation | $\mathbb{P}_n = \text{span}\{x^i \mid i=0,\dots,n\}$

Def. Zu paarweise versch. Stützstellen $x_0,\dots,x_n$ heissen die $n+1$ Polynome $\ell_i(x) := \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ $(i=0,\dots,n)$ $\mathbb{P}_n$? die zugehörigen Lagrange-Interpolationspolynome und erfüllen die "Kronecker-Eigenschaft" $\ell_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Bem. Auswertung von $p_n(x)$ in Lagrange-Darstellung benötigt $\mathcal{O}(n^2)$ flops (floating point operations).

Baryzentrische Interpolationsformel. Für $j=0,\dots,n$ berechnet man vorher folgende Grössen: $\lambda_j := \left(\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}(x_j-x_i)\right)^{-1}$.

Dann gilt: $\ell_i(x) = \omega_{n+1}(x)\frac{\lambda_i}{x-x_i}$.

Es folgt die baryzentrische Darstellung des Lagr.schen. Int. poly.:
$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \ell_j(x) = \omega_{n+1}(x)\sum_{j=0}^{n}\frac{\lambda_j y_j}{x-x_j}$$
→ pro Auswertung nur noch $\mathcal{O}(n)$ flops!

Zudem gilt die baryzentrische Interpolationsformel:
$$p_n(x) = \left(\sum_{j=0}^{n}\frac{\lambda_j y_j}{x-x_j}\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{\lambda_j}{x-x_j}\right)^{-1}.$$
(*) → Herleitung auf Rückseite

Def. Seien $f[x_i] := y_i$ für Datenpunkte (x_i,y_i), $i=1,\dots,n$.
Def. rekursiv
$$f[x_i,x_{i+1},\dots,x_j] = \frac{f[x_{i+1},\dots,x_j]-f[x_i,\dots,x_{j-1}]}{x_j-x_i} \quad \text{für } i<j.$$
Dann bezeichne $f[x_0,\dots,x_k]$ die k-te dividierte Differenz.

Newton'sche Interpolationsformel. $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0,\dots,x_k]\,\omega_k(x)$

Bsp. Seien Datenpunkte $(1,-4),(3,-1),(4,2)$ gegeben.
Mit folgendem Schema bestimmt man $p_2(x)$:
$p_2(x) = -4 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)(x-3) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} - 4.$

x_i	y_i		
1	-4	$\frac{-4-(-1)}{1-3} = \frac{3}{2}$	$\frac{\frac{3}{2}-3}{1-4} = \frac{1}{2}$
3	-1	$\frac{-1-2}{3-4} = 3$	
4	2		

Stirling'sche Ungleichungen
Für $n\geq 1$ gilt:
$$\frac{n!e^n}{e\sqrt{n}} \leq n^n \leq \frac{n!e^n}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Satz 3.16 Sei $\mathcal{L}: C^n([a,b]) \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional mit $\mathbb{P}_n \subseteq \text{Kern}(\mathcal{L})$. Dann gilt die Restglieddarstellung von Peano:
$$\forall f\in C^{n+1}([a,b]):\ \mathcal{L}(f) = \int_a^b f^{(n+1)}(t)\cdot K(t)\,dt$$
wobei der Peanokern $K(t)$ durch
$$K(t) = \frac{1}{n!}\mathcal{L}_x[(x-t)_+^n],\quad (x-t)_+^n := \begin{cases}(x-t)^n & \text{falls } x\geq t\\ 0 & \text{falls } x<t\end{cases}$$
geg. ist. Hier bezeichnet $\mathcal{L}_x(g(x,t))$ Anwendung von $\mathcal{L}$ auf g als Funktion von x für festes t.

Def. Die Zahl $\Lambda_n = \Lambda_n(\{x_0,\dots,x_n\}) := \|\sum_{k=0}^{\infty}|\ell_k(x)|\|_\infty$ (Lagrange Polynome) heisst Lebesgue-Konstante zu den Stützstellen $x_0<x_1<\dots<x_n$. Sie ist ein Mass für die absolute Kondition der Poly.interpolation an den geg. Stützstellen.

Satz 3.21 Für geg. Stützstellen $x_0<\dots<x_n$ gilt die Quasioptimalität
$$\|f - I^{(n)}[f]\|_\infty \leq (1+\Lambda_n)\inf_{q\in\mathbb{P}_n}\|f-q\|_\infty.$$
($I^{(n)}$: Interpolationsoperator)

Satz. 3.25 (Jackson) Es ex. eine Konst. $C_J>0$, s.d. für alle $f\in C^0([a,b])$, $n\in\mathbb{N}$ gilt: $\min_{q\in\mathbb{P}_n}\|f-q\|_\infty \leq C_J\,\omega(f;\frac{b-a}{n})$.

Kor. 3.26 $\forall r\in\mathbb{N}\ \exists C_r>0\ \forall f\in C^r([-1,1])$:
$$\forall n\geq r:\ \min_{q\in\mathbb{P}_n}\|f-q\|_\infty \leq C_r n^{-r}\cdot\|f^{(r)}\|_\infty.$$

Für $n\in\mathbb{N}$ äquidistante Stützstellen gilt $(\gamma = 0.577\dots)$
$$\Lambda_n \cong \frac{2^{n+1}}{e\cdot n(\log n+\gamma)} \quad \text{für } n\to\infty$$

Kor. 3.17 Falls zusätzlich zu den Annahmen aus S. 3.16 der Kern $K(t)$ keinen Vorzeichenwechsel auf $[a,b]$ hat, dann ex. $\forall f\in C^{n+1}([a,b])$ ein $\xi\in[a,b]$, s.d. gilt
$$\mathcal{L}(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\mathcal{L}(x^{n+1})$$

Satz 3.2 Seien (x_i,y_i) Wertepaare mit x_i paarw. versch., $i=0,\dots,n$. Dann wird die Interpolationsaufgabe eindeutig durch
$$p_n(x) := \sum_{i=0}^{n} y_i\ell_i(x) \text{ gelöst } (\rightsquigarrow \text{Lagrange Darstellung von } p_n)$$

Satz 3.5 Sind $x_0,\dots,x_n\in\mathbb{R}$ paarw. versch., so bilden $\ell_0,\dots,\ell_n$ eine Basis von $\mathbb{P}_n$.

Satz 3.6 Seien $x_0<x_1<\dots<x_n$ Stützstellen, $x^*\in[x_0,x_n]$ beliebig und $f\in C^{n+1}([x_0,x_n])$. Dann gilt für das eindeutige Interpol.-polynom $p_n\in\mathbb{P}_n$ mit $p_n(x_i) = f(x_i)$ folgende Fehlerdarstellung:
$$E_n[f](x^*) := f(x^*)-p_n(x^*) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x^*)$$
mit einem von x^* abh. $\xi\in[x_0,x_n]$ und dem Knotenpolynom
$$\omega_{n+1}(x) := (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\in\mathbb{P}_{n+1}.$$

Satz 3.7 Aitken-Neville Schema. Seien (x_i,y_i), $i=0,\dots,n$ mit x_i paarw. versch. geg. Seien $P_{ik}\in\mathbb{P}_k$ geg. durch
$$P_{i0}(x) := y_i \quad \text{für } i=0,\dots,n$$
$$P_{ik}(x) := \left((x-x_i)P_{i+1,k-1}(x)-(x-x_{i+k})P_{i,k-1}(x)\right)\cdot(x_{i+k}-x_i)^{-1}$$
für $k=1,\dots,n$ und $i=0,\dots,n-k$.
Dann gilt für das Int.poly p_n die Beziehung: $p_n(x) = P_{0n}(x)\in\mathbb{P}_n$.

Bsp. Seien Datenpunkte $(1,2),(3,-1),(4,3)$ gegeben.
Mit folgendem Schema bestimmt man $p_n(2)$:

x_i	$y_i = P_{i0}(2)$	$P_{i1}(2)$	$P_{i2}(2)$
1	2	$\frac{(2-1)(-1)-(2-3)\cdot 2}{3-1} = \frac{1}{2}$	$\frac{(2-1)(-5)-(2-4)\cdot\frac{1}{2}}{4-1} = \frac{-4}{3} = P_n(2)$
3	-1	$\frac{(2-3)\cdot 3-(2-4)(-1)}{4-3} = -5$	
4	3		

Hermite-Interpolation. Wir def. die $n+1$ lin. Abb.
$$\mu_{ij}: C^n([t_0,t_n])\to\mathbb{R},\ f\mapsto f^{(j)}(x_i) \quad \text{für } j=0,\dots,d_i,\ i=0,\dots,m-1.$$
Hermite-Int.pol.agb.: Finde $p_n\in\mathbb{P}_n$ mit $n+1 = m+d_0+\dots+d_{m-1}$, s.d. $\mu_{ij}(p_n) = \mu_{ij}(f)$ für alle i,j gilt.

Satz 3.13 Die Hermite-Int.pol.agb. lässt sich immer eindeutig lösen.

Bew. Die Abb. $\mu:\mathbb{P}_n\to\mathbb{R}^{n+1}$, $p\mapsto(\mu_{ij}(p))_{i=0,\dots,m-1;\,j=0,\dots,d_i}$ ist linear und injektiv. Wegen $\dim(\mathbb{P}_n) = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$ ist μ damit bijektiv. □

Verallg. Newton Int.pol. für Hermite Zahle Stützstellen mit Mehrfachheit.
Gilt $x_i = \dots = x_j$, so passe def. wie folgt an: $f[x_i] = f(x_i)$,
$f[x_i,\dots,x_j] := \frac{f^{(j-i)}(x_i)}{(j-i)!}$. Rest analog zur Newton-Interpolation.

Bsp. Geg.: $(1,3),(1,1),(2,-2)$ ($f(1)$, $f'(1)$, $f(2)$)

x_i	$f[x_i]$		
1	3	1	-6
1	3	-5	
2	-2		

$\to p_2(x) = 3 + (x-1) - 6(x-1)^2$

Peano-Kern.
Allg. gilt $\int_a^b K(t) = \frac{\mathcal{L}(x^{n+1})}{(n+1)!}$
für $K(t) = \frac{1}{n!}\mathcal{L}_x[(x-t)_+^n]$

Satz 3.22 (Weierstrass) $\forall f\in C^0([-1,1])$ $\forall\varepsilon>0\ \exists n\in\mathbb{N}\ \exists\pi_n\in\mathbb{P}_n$: $\|f-\pi_n\|_\infty\leq\varepsilon$.

Def. Bestapproximationsfehler bezeichnet $\inf_{q\in\mathbb{P}_n}\|f-q\|_\infty$.

Satz 3.23 $\forall f\in C^0([a,b])\ \exists p_n\in\mathbb{P}_n$: $\inf_{q\in\mathbb{P}_n}\|f-q\|_\infty = \|f-p_n\|_\infty$.

Def. Der Stetigkeitsmodul von $f\in C^0([a,b])$ zur Schrittweite $h>0$ ist def. durch
$$\omega(f;h) := \max_{\substack{x,x'\in[a,b]\\ |x-x'|\leq h}}\{|f(x)-f(x')|\}.$$

Grundeigenschaften. 1) $h\mapsto\omega(f;h)$ ist nichtnegativ, monoton wachsend und subadditiv, d.h. $\forall h_1,h_2\geq 0$: $\omega(f;h_1+h_2)\leq\omega(f;h_1)+\omega(f;h_2)$.
2) $\forall n\in\mathbb{N}$: $\omega(f;nh)\leq n\cdot\omega(f;h)$. $\forall\lambda>0$: $\omega(f;\lambda h)\leq(1+\lambda)\omega(f;h)$.
3) $h\mapsto\omega(f,h)$ ist stetig und $\lim_{h\to 0}\omega(f;h) = 0$. 4) $\omega(f;h)\leq h\cdot\|f'\|$

MW-Satz der Integralrechnung. Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-int. s.d. g auf $[a,b]$ keinen Vorzeichenwechsel hat. Dann ex. ein $\xi\in[a,b]$ mit
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$
Für Bew.

Affine Abbildung. (auf das Standard- oder Referenz Intervall [-1,1])

$t:[a,b]\to[-1,1],\ x\mapsto \frac{2x-a-b}{b-a}$

$t^{-1}:[-1,1]\to[a,b],\ \tilde{x}\mapsto \frac{b-a}{2}\tilde{x}+\frac{a+b}{2}$

Def. Für jedes $n\in\mathbb{N}_0$ heissen die $n+1$ Punkte $x_i^{(n+1)} := \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right),\ i=0,\dots,n$ Chebychev Punkte im Intervall $[-1,1]$.

Def. Seien $T_0(x):=1$, $T_1(x):=x$. Dann ist das k-te Chebychev-Polynom rekursiv def. als $T_k(x):=2xT_{k-1}(x)-T_{k-2}(x)$.

Lemma 3.30

1) Die Chebychev-Polynome haben ganzzahlige Koeffizienten.
2) Der höchste Koeff. von T_n ist 2^{n-1} für $n\geq1$.
3) T_n gerade Funktion $\Leftrightarrow n$ gerade. T_n ungerade Funktion $\Leftrightarrow n$ ungerade.
4) $\forall x\in[-1,1]$: $T_n(x)=\cos(n\cdot\arccos x)$. $\Rightarrow |T_n(x)|\leq1$.
5) Für $n\geq1$ nimmt $|T_n(x)|$ den extremalen Wert 1 in $[-1,1]$ genau an den $n+1$ Clenshaw-Curtis Punkten $\bar{x}_j^n := \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)$ für $j=0,\dots,n$ an.
6) Für $n\in\mathbb{N}$ sind die n Nullstellen von T_n durch die Chebychev Punkte $x_j^{(n)}$, $j=0,\dots,n-1$ gegeben.

Der VR $S^1(\Delta) := \{f\in C([x_0,x_n]) \mid f|_{[x_{i-1},x_i]}\in\mathbb{P}_1\}$ hat Dimension $n+1$ und Basis $S_0 := \mathbb{1}_{[x_0,x_n]}$, $S_j := \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}\cdot\mathbb{1}_{[x_{j-1},x_j]} + \mathbb{1}_{[x_j,x_n]}$ für $j=1,\dots,n$.

Sherman-Morrison-Formel.

$$(A+uv^T)^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u}$$

Splines berechnen. Es gilt $h_j=x_j-x_{j-1}$.

i) Basis von $\mathbb{P}_3$ festlegen:

$\cdot\ b_1(x):=\phi\left(\frac{x_j-x}{h_j}\right)$ $\quad\cdot\ b_2(x):=\phi\left(\frac{x-x_{j-1}}{h_j}\right)$

$\cdot\ b_3(x):=-h_j\psi\left(\frac{x_j-x}{h_j}\right)$ $\quad\cdot\ b_4(x):=h_j\psi\left(\frac{x-x_{j-1}}{h_j}\right)$

mit $\phi(\xi):=3\xi^2-2\xi^3$, $\psi(\xi):=\xi^3-\xi^2$

Polynome haben dann die Form:

$S_j(x):=y_{j-1}b_1(x)+y_jb_2(x)+c_{j-1}b_3(x)+c_jb_4(x)$

ii) c_i berechnen: (durch LGS geg.)

a) Vollst. Spline (c_0,c_n vorgegeben)

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_2 & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & \\ & \beta_3 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & \beta_{n-1} \\ & & & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_{n-2}\\c_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1-\frac{1}{h_1}c_0\\d_2\\\vdots\\d_{n-2}\\d_{n-1}-\frac{1}{h_n}c_n\end{pmatrix}$$

$\alpha_j:=\frac{2}{h_j}+\frac{2}{h_{j+1}}$, $\beta_j:=\frac{1}{h_j}$, $d_j:=3\left(\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j^2}+\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}^2}\right)$

b) Periodischer Spline: ($y_0=y_n$, $c_0=c_n$)

$$\begin{pmatrix}\alpha_0 & \beta_1 & & & \beta_n\\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & & \\ & \beta_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & \beta_{n-1}\\ \beta_n & & & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_0\\c_1\\\vdots\\c_{n-2}\\c_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_0\\d_1\\\vdots\\d_{n-2}\\d_{n-1}\end{pmatrix}$$

$\alpha_0:=\frac{2}{h_n}+\frac{2}{h_1}$, $\beta_n:=\frac{1}{h_n}$, $d_0:=3\left(\frac{y_0-y_{n-1}}{h_n^2}+\frac{y_1-y_0}{h_1^2}\right)$

c) Natürlicher Spline: ($S_1''(x_0)=S_n''(x_n)=0$)

$$\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}_0 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & & \\ & \beta_2 & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha_{n-1} & \beta_n\\ & & & \beta_n & \tilde{\alpha}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_0\\c_1\\\vdots\\c_{n-1}\\c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{d}_0\\d_1\\\vdots\\d_{n-1}\\\tilde{d}_n\end{pmatrix}$$

$\tilde{\alpha}_0:=\frac{2}{h_1}$, $\tilde{d}_0:=3\frac{y_1-y_0}{h_1^2}$

$\tilde{\alpha}_n:=\frac{2}{h_n}$, $\tilde{d}_n:=3\frac{y_n-y_{n-1}}{h_n^2}$

Satz 3.28 ("Min-Max" Eigenschaft der Chebychev Punkte) Seien die Stützstellen $x_0,\dots,x_n$ geg. durch $x_0^{(n+1)},\dots,x_n^{(n+1)}\in[-1,1]$ und sei $\omega_{n+1}(x)$ das zugehörige Knotenpolynom. Dann gilt für jedes $\pi_{n+1}\in\mathbb{P}_{n+1}$ der Form $\pi_{n+1}(x)=x^{n+1}+q_n(x)$ mit $q_n\in\mathbb{P}_n$: $\|\pi_{n+1}\|_\infty\geq\|\omega_{n+1}\|_\infty=2^{-n}$. Gleichheit gilt g.d.w. $\pi_{n+1}=\omega_{n+1}$.

Satz 3.31 Das Chebychev-Polynom T_n hat minimale L_∞-Norm auf $[-1,1]$ unter allen Polynomen vom Grad n mit höchstem Koeff. $a_n=2^{n-1}$.

↳ **Kor.** Die Chebychev-Punkte $x_i^{(n+1)}$, $i=0,\dots,n$ (also die Nullstellen von T_{n+1}) minimieren den Ausdruck $\|\omega_{n+1}\|_\infty=\max_{x\in[-1,1]}|(x-x_0^{(n+1)})\dots(x-x_n^{(n+1)})|$. Für ein allg. Intervall $[a,b]$ sind die Stützstellen mittels der affinen Abb. t^{-1} zu transformieren.

Chebychev Projektion Für $f,g\in C([-1,1])$ def $(f,g)_\omega:=\int_{-1}^1 f(x)g(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ und $\omega(x):=(1-x^2)^{-1/2}$ (Chebychev Gewichtsfunktion.).

Der VR $L^2_\omega(-1,1)$ mit $(\cdot,\cdot)_\omega$ ist vollst., also ein Hilbertraum. $\|f\|^2_{L^2_\omega(-1,1)}:=(f,f)_\omega$

Bestapprox.problem: Für $f\in C([-1,1])$ finde $p_n\in\mathbb{P}_n$, s.d. $\|f-p_n\|_{L^2_\omega(-1,1)}=\min_{q\in\mathbb{P}_n}\|f-q\|_{L^2_\omega}$

Lemma 3.34 Die reskalierten Chebychev Polynome $\{\tilde{T}_k\}_{k\geq0}$ def. durch $\tilde{T}_0:=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/2}T_0$, $\tilde{T}_k:=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}T_k$ für $k=1,2,3,\dots$ sind orthonormal bezgl. $(\cdot,\cdot)_\omega$

Lemma 3.35 Sei $f\in C([-1,1])$ gegeben. Die eindeutige Lösung $p_n\in\mathbb{P}_n$ des Bestapprox.problem ist gegeben durch (mit dem Faktor $\frac{2}{\pi}$ ersetzt durch $\frac{1}{\pi}$ für $k=0$):

$f_n(x)=\sum_{k=0}^n\tilde{a}_k\tilde{T}_k(x)=\sum_{k=0}^n a_kT_k(x)$, $\tilde{a}_k:=(f,\tilde{T}_k)_\omega$, $a_k:=\frac{2}{\pi}(f,T_k)_\omega$

Satz 3.36 Sei f analytisch in $[-1,1]$ und analytisch fortsetzbar in die offene Bernstein Ellipse $\mathcal{E}_\rho$ für ein $\rho>1$ mit $\max\{|f(z)|: z\in\mathcal{E}_\rho\}=M$. Dann gilt

1) $|a_0|\leq M$, $|a_k|\leq 2M\rho^{-k}$ für $k\geq1$. 2) $\|f-f_n\|_\infty\leq\frac{2M}{\rho-1}\rho^{-n}\in\mathcal{O}(\rho^{-n})$

Def. $\Delta:=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ paarw. versch. aufsteigende Stützstellen.

1) $S:[a,b]\to\mathbb{R}$ heisst kubischer Spline zu den Knoten $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$, wenn gilt: i) $S\in C^2([a,b])$, ii) $S|_{[x_i,x_{i+1}]}\in\mathbb{P}_3$.

2) S heisst interpolierender Spline zu den Stützwerten $y_0,\dots,y_n$, wenn gilt $S(x_j)=y_j$ für $j=0,\dots,n$.

3) S heisst vollständiger interpolierender Spline, falls neben (1) und (2) gilt $S'(a)=c_0$, $S'(b)=c_n$ für vorgegebene $c_0,c_n\in\mathbb{R}$.

4) S heisst periodischer interpolierender Spline mit Periode $b-a$, falls neben (1) und (2) gilt $S^{(j)}(a)=S^{(j)}(b)$ für $j=0,1,2$.

5) S heisst natürlicher interpolierender Spline, wenn neben (1) und (2) gilt $S''(a)=S''(b)=0$.

Wir def. zudem: $S^3(\Delta):=\{f\in C^2([a,b]) \mid f|_{[x_{j-1},x_j]}\in\mathbb{P}_3,\ 0<j\leq n\}$.

Satz 3.46 Sei $f\in C^4([a,b])$ und S der in den Stützstellen $a,a+h,a+2h,\dots,b$ mit $h=\frac{b-a}{n}$ interpolierende, vollständige kubische Spline. Dann gilt die Fehlerabschätzung $\|f-S\|_\infty\leq\frac{5}{384}h^4\|f^{(4)}\|_\infty\in\mathcal{O}(h^4)$.

⊛ Betrachten wir die Interpolation für $y_j\equiv1$, so gilt $P_n\equiv1$ und obere Gleichung ergibt

$1=\omega_{n+1}(x)\sum_{j=0}^n\frac{\lambda_j}{x-x_j}\Rightarrow\omega_{n+1}(x)=\left(\sum_{j=0}^n\frac{\lambda_j}{x-x_j}\right)^{-1}$.

Einsetzen ergibt das Resultat

Lemma 3.11 Sei $p_n\in\mathbb{P}_n$ das Int.poly einer Fkt. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ in $x_0<\dots<x_n$. Dann gilt $\forall x^*\in\mathbb{R}$: $f(x^*)-P_n(x^*)=f[x_0,\dots,x_n,x^*]\,\omega_{n+1}(x)$.

↳ **Kor. 3.12** Sei zudem $f\in C^{n+1}([x_0,x_n])$. Dann ex. für alle $x^*\in[x_0,x_n]$ ein $\xi\in(x_0,x_n)$ mit $f[x_0,\dots,x_n,x^*]=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{\dots}$

4. Numerische Integration.

Def. $I_{[a,b]}[f] := \int_a^b f(x)dx$. $p_n(x) =: I^{(n)}[f] = \sum_{j=0}^n f(x_j)\ell_j(x) \rightsquigarrow$ Lagrange-Darstellung.

Quadraturformel: $Q_{[a,b]}^{(n)}[f] := I_{[a,b]}[I^{(n)}[f]] = \sum_{j=0}^n f(x_j)\int_a^b \ell_j(x)dx = \sum_{j=0}^n \alpha_j f(x_j)$

für von f unabhängige (!) Gewichte $\alpha_j := I_{[a,b]}[\ell_j] = \int_a^b \ell_j(x)dx$.

Fehlerabschätzung. Falls $f \in C^{n+1}([a,b])$:

$$|I_{[a,b]}[f] - Q_{[a,b]}^{(n)}[f]| \le (b-a)\max_{x\in[a,b]}\prod_{j=0}^n |x-x_j| \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \le (b-a)^{n+2}\frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!}.$$

$$\forall f \in C([a,b]): |I_{[a,b]}[f] - Q_{[a,b]}^{(n)}[f]| \le \left(|b-a| + \sum_{j=0}^n |\alpha_j|\right)\cdot \inf_{q\in\mathbb{P}_n}\|f-q\|_\infty.$$

Geschlossene Newton-Cotes-Formeln. erhält man mit Stützstellenwahl $x_j := a + jh$ für $j = 0,\dots,n$ und $h = \frac{b-a}{n}$. Mit folgender Tabelle gilt jeweils $x_j = a + \xi_j(b-a)$:

n	Name	ξ_j	$\frac{\alpha_j}{b-a}$	$I_{[a,b]}[f] - Q_{[a,b]}^{(n)}[f]$
1	Trapezregel	$0, 1$	$\frac12, \frac12$	$-\frac{1}{12}(b-a)^3 f^{(2)}(\xi)$
2	Simpson-Regel	$0, \frac12, 1$	$\frac16, \frac46, \frac16$	$-\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi)$
3	$\frac38$-Regel	$0, \frac13, \frac23, 1$	$\frac18, \frac38, \frac38, \frac18$	$-\frac{3}{80}\left(\frac{b-a}{3}\right)^5 f^{(4)}(\xi)$
4	Milne-Regel	$0, \frac14, \frac12, \frac34, 1$	$\frac{7}{90}, \frac{32}{90}, \frac{12}{90}, \frac{32}{90}, \frac{7}{90}$	$-\frac{8}{945}\left(\frac{b-a}{4}\right)^7 f^{(6)}(\xi)$

Satz 4.2 Es gelten folgende Darstellungen des Quadraturfehlers: (Zwischenstellen $\xi \in [a,b]$)

1) Trapezregel: $I_{[a,b]}[f] - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)$.

2) Simpson-Regel: $I_{[a,b]}[f] - \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)) = -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi)$.

Satz 4.3 Für $f \in L^\infty(a,b)$ mit $f' \in L^1(a,b)$: $I_{[a,b]}[f] - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) = -\int_a^b (t - \frac12(a+b))f'(t)dt$.

Offene Newton-Cotes-Formeln. erhält man durch Stützstellenwahl $x_j := a + (j+1)h$ für $j = 0,\dots,n$ und $h = \frac{b-a}{n+2}$. Man erhält folgende Quadraturformeln:

- $Q_{[a,b]}^{(0)}[f] = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) \rightsquigarrow$ Mittelpunktsregel
- $Q_{[a,b]}^{(1)}[f] = \frac{b-a}{2}(f(a+h) + f(b-h))$ ← schon hier negatives Gewicht!
- $Q_{[a,b]}^{(2)}[f] = \frac{b-a}{3}(2f(a+h) - f(\frac{a+b}{2}) + 2f(b-h))$
- $Q_{[a,b]}^{(3)}[f] = \frac{b-a}{24}(11f(a+h) + f(a+2h) + f(b-2h) + 11f(b-h))$

Satz 4.4 Quadraturfehler der Mittelpunktsregel: $I_{[a,b]}[f] - (b-a)f(\frac{a+b}{2}) = \frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi)$

Def Eine Quadraturformel $Q_{[a,b]}$ hat Ordnung $n+1$, falls $\forall p_n \in \mathbb{P}_n: Q_{[a,b]}[p_n] = I_{[a,b]}[p_n]$.

Def Das eindeutige $q_{n+1} \in \mathbb{P}_{n+1}$ mit $q_{n+1}(1) = 1$ und $\forall h \in \mathbb{P}_n: \int_{-1}^1 q_{n+1}(x)h(x)dx = 0$ (d.h. $q_{n+1} \perp \mathbb{P}_n \subseteq \mathbb{P}_{n+1}$) heisst $(n+1)$-tes Legendre-Polynom. ($q_0 := 1$).

Satz 4.16 Die Legendre-Polynome $q_0, q_1,$ erfüllen die Dreitermrelation

$$q_0(x) = 1, \quad q_1(x) = 1, \quad q_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}x\cdot q_n(x) - \frac{n}{n+1}q_{n-1}(x)$$

Satz 4.17 Seien $x_0,\dots,x_n \in (-1,1)$ die Nullstellen des Legendre-Polynoms q_{n+1} und $\ell_0,\dots,\ell_n$ die entsprechende Legendre-Basis von $\mathbb{P}_n$. Mit der Wahl $\alpha_j := \int_{-1}^1 \ell_j(x)dx$ hat die Gauss'sche Quadraturformel $G_{[-1,1]}^{(n)}[f] = \alpha_0 f(x_0) + \dots + \alpha_n f(x_n)$ mit $n+1$ Knoten die Ordnung $2n+2$, d.h. ist exakt auf $\mathbb{P}_{2n+1}$.

Satz 4.19 Für $f \in C^{2n+2}([-1,1])$ ex. ein $\xi \in (-1,1)$, s.d.

$$G^{(n)}[f] - \int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_{-1}^1 \prod_{j=0}^n (x-x_j)^2 dx = \frac{2^{2n+3}((n+1)!)^4}{(2n+3)((2n+2)!)^3}f^{(2n+2)}(\xi).$$

Satz 4.20 Für alle $f \in C^0([-1,1])$ konvergiert $G^{(n)}[f] \xrightarrow{n\to\infty} \int_{-1}^1 f(x)dx$.

Taylor-Entwicklung. Sei $f \in C^{n+1}(I)$ für ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt $\forall x_0 \in I$ die Darstellung

$$\forall x \in I: \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^k$$

für ein $\xi \in I$ zwischen x_0 und x.

Summierte Quadraturformeln. Seien ab jetzt $x_j = a + jh$, $j = 0,\dots,N$, $h = \frac{b-a}{N}$.

Summierte Quadraturformel: $Q_h^{(n)}[f] := \sum_{i=0}^{N-1} Q_{[x_i,x_{i+1}]}^{(n)}[f]$

Summierte Trapezregel: $(n=1)$

$$Q_h^{(1)}[f] = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(b)\right).$$

Summierte Simpson-Regel: $(n=2)$

$$Q_h^{(2)}[f] = \frac{h}{6}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{N-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(b)\right).$$

Satz 4.5 (Fehlerabschätzungen)

$$|I_{[a,b]}[f] - Q_h^{(1)}[f]| \le \frac{h^2}{12}(b-a)\max_{x\in[a,b]}|f''(x)| \in \mathcal{O}(h^2)$$

$$|I_{[a,b]}[f] - Q_h^{(2)}[f]| \le \frac{h^4}{2880}(b-a)\cdot\max_{x\in[a,b]}|f^{(4)}(x)| \in \mathcal{O}(h^4)$$

Integrale & Reihen.

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^n dx = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{(b-a)^{n+1}}{2^n(n+1)} & \text{falls } n \text{ gerade}\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

Romberg'sches Integrationsverfahren. Extrapolationsprinzip: Für ein Diskretisierungsparameter $h > 0$ lässt sich $T(h)$ berechnen und $\lim_{h\to 0} T(h)$ konvergiert. $\rightsquigarrow$ Interpoliere T in Stützstellen $0 < h_1 < \dots < h_n$ und werte Int.poly $I^{(n)}[T]$ bei 0 aus.

Satz 4.8 (Euler-MacLaurin'sche Summenformel) Für $f \in C^{2p+2}([a,b])$ mit $p \in \mathbb{N}_0$ gilt für die summierte Trapezregel $T(h) = Q_h^{(1)}[f]$ der Schrittweite $h = \frac{b-a}{N}$ eine asymptotische Entwicklung

$$T(h) = c_0 + c_1h^2 + c_2h^4 + \dots + c_ph^{2p} + R_{p+1}(h)h^{2p+2},$$

wobei
- $c_0 = I_{[a,b]}[f] = \int_a^b f(x)dx$
- $c_k = \frac{(-1)^{k+1}B_k}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right)$, $k = 1,\dots,p$, B_k: Bernoulli'sche Zahlen
- $R_{p+1}(h) = \frac{-1}{(2p+2)!}\int_a^b f^{(2p+2)}(x)\left(S_{2p+2}\left(\frac{x-a}{h}\right) - S_{2p+2}(0)\right)dx$

mit einer stetigen, 1-periodischen Funktion S_{2p+2}.

Romberg-Schema. Setze $T_0(2^{-i}h) := T(2^{-i}h)$ mit summierter Trapezregel für $i = 0,\dots,m$ und danach rekursiv für $k = 1,\dots,m$:

$$T_k(2^{-i}h) := \frac{4^k T_{k-1}(2^{-(i+1)}h) - T_{k-1}(2^{-i}h)}{4^k - 1}, \quad i = 0,\dots,m-k.$$

Als Approximation von $I_{[a,b]}[f]$ wählt man dann $T_m(h)$.

Zeta-Funktion. $\zeta(s) = \sum_{n=0}^\infty n^{-s}$, Polstelle nur bei $s = 1$.

MATLAB (Formel) Konvergenzrate einer Extrapolation

Rate = (log(err(end)) - log(err(1)))/(log(h(end)) - log(h(1)))

(err: Fehlervektor; h: Schrittweitenvektor)

Gauss Quadratur Gewichte. Es gilt $\alpha_i > 0$ und da $G_{[-1,1]}^{(n)}$ immer mind. Ordnung 1 hat, ist $G_{[-1,1]}^{(n)}$ exakt auf $\mathbb{P}_0$. Daraus folgt

$$\sum_{i=0}^n |\alpha_i| = \sum_{i=0}^n \alpha_i = G_{[-1,1]}^{(n)}[\mathbb{1}] = \int_{-1}^1 dx = 2.$$

Prop. Es kann keine Quadraturformel in $n+1$ Punkten $x_0,\dots,x_n$ geben, die höhere Ordnung als $2n+2$ hat.

Bew. Agn. Quad.formel $Q^{(n)}[f] = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$ hat Ordnung $2n+3$, d.h. exakt auf $\mathbb{P}_{2n+2}$. Für $p(x) := \prod_{i=0}^n (x-x_i)^2 \in \mathbb{P}_{2n+2}$ folgt dann

$$0 < \int_a^b p(x)dx = Q^{(n)}[p] = \sum_{i=0}^n w_i\, p(x_i) = 0 \ ↯ \qquad \square$$

<u>Aufgabe.</u> Agn. Für alle $0<h<1$ haben wir eine Regel $D_h f$ für $f'(0)$ mit der asymptotischen Entwicklung $D_h f - f'(0) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i h^i$ für von h unabh. Koeff. c_i. Leite durch Extrapolation eine Näherung $D_h^3 f = a_1 D_h f + a_2 D_{h/2} f + a_3 D_{h/4} f$ für $f'(0)$ her mit $|D_h^3 f - f'(0)| \leq Ch^3$ für $C \in \mathbb{R}$.

<u>Lösung</u> Mit der asympt. Entwicklung erhalten wir

$$D_h f - f'(0) = c_1 h + c_2 h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$
$$D_{\frac{h}{2}} f - f'(0) = \tfrac{1}{2} c_1 h + \tfrac{1}{4} c_2 h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$
$$D_{\frac{h}{4}} f - f'(0) = \tfrac{1}{4} c_1 h + \tfrac{1}{16} c_2 h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

Wir suchen nun a_1, a_2, a_3 mit $a_1 D_h f + a_2 D_{\frac{h}{2}} f + a_3 D_{\frac{h}{4}} f - f'(0) = \mathcal{O}(h^3)$

Wir erhalten folgender LGS:
$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ a_1 + \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{4} a_3 = 0 \\ a_1 + \frac{1}{4} a_2 + \frac{1}{16} a_3 = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2 \\ 8/3 \end{pmatrix}$$

<u>Aufgabe</u> Sei $\alpha \in (0,1)$, $g(x) := x^\alpha$, $N \in \mathbb{N}$ und $Q_N[f] = \sum_{j=0}^{N-1} Q_{[x_j, x_{j+1}]}[f]$ mit $\left|\int_a^b f(x)\,dx - Q_{[a,b]}[f]\right| \leq \frac{(b-a)^3}{24} \|f''\|_{\infty,[a,b]}$ falls $f \in C^2$.

Zeige, dass $C_\alpha > 0$ ex. mit $\left|\int_0^1 g(x)\,dx - Q_N[g]\right| \leq C_\alpha N^{-1-\alpha}$.

<u>Lösung:</u> Es gilt $g''(x) = \underbrace{\alpha(\alpha-1)}_{\leq 0} x^{\alpha-2}$, $g'''(x) = \underbrace{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}_{\geq 0} x^{\alpha-3}$

Damit ist g'' auf $[0,1]$ monoton wachsend und immer negativ, d.h. $|g''|$ ist monoton fallend.

Wegen $g \in C^2([x_1, x_N])$ gilt

$$\sum_{j=1}^{N-1} \left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} g(x)\,dx - Q_{[x_j, x_{j+1}]}[g] \right| \leq \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\overbrace{(x_{j+1} - x_j)}^{N^{-1}}{}^3}{24} \overbrace{\|g''\|_{\infty,[x_j, x_{j+1}]}}^{\leq |g''(x_j)|}$$
$$\leq \frac{N^{-3}}{24} \sum_{j=1}^{N-1} |\alpha(\alpha-1)| x_j^{\alpha-2} = \tilde{C}_\alpha N^{-3} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{j}{N}\right)^{\alpha-2}$$
$$\leq \tilde{C}_\alpha N^{-1-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} j^{\alpha-2} = \tilde{C}_\alpha N^{-1-\alpha} \zeta(2-\alpha)$$

für $\tilde{C}_\alpha = \frac{|\alpha(\alpha-1)|}{24}$ und $|\zeta(2-\alpha)| < +\infty$ wegen $2-\alpha \neq 1$.

Zudem gilt

$$\left|\int_0^{x_1} g(x)\,dx - Q_{[0,x_1]}[g]\right| \overset{\text{Def von } Q_{[a,b]}[f]}{=} \left|\int_0^{x_1} x^\alpha\,dx - x_1 g\left(\tfrac{x_1}{2}\right)\right|$$
$$= \underbrace{x_1}_{N^{-1}}{}^{\alpha+1} \underbrace{\left|\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{2^\alpha}\right|}_{=:\bar{C}_\alpha} = \bar{C}_\alpha N^{-\alpha-1}.$$

Daraus folgt die Abschätzung für $C_\alpha := \bar{C}_\alpha + \tilde{C}_\alpha \zeta(2-\alpha)$

<u>Aufgabe.</u> Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ und $x^* \in \mathbb{R}$ zweifache NS von f. Zeige, dass Newton-Verfahren $\Phi(x)$ lokal linear gegen x^* konv.

<u>Lösung.</u> Es gilt

$$\Phi(x) = \begin{cases} x - \frac{f(x)}{f'(x)} &, x \neq x^* \\ x^* &, x = x^* \end{cases}, \quad \Phi'(x) = \begin{cases} \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} &, x \neq x^* \\ 1/2 &, x = x^* \end{cases}$$

und $\Phi \in C^1$, denn $\lim_{x \to x^*} \Phi(x) \overset{\text{H.R.}}{=} \dots = x^* = \Phi(x^*)$ und

$$\lim_{x\to x^*} \Phi'(x) = \lim_{x \to x^*} f''(x) \frac{f(x)}{(f'(x))^2} \underset{\text{H.R.}}{\overset{f \in C^2}{=}} f''(x^*) \lim_{x\to x^*} \frac{f'(x)}{2 f'(x) f''(x)} \overset{f \in C^2}{=} \frac{1}{2} = \Phi'(x^*).$$

Wegen $\Phi' \in C^0$ ex. ein $\delta > 0$, s.d. für alle $x \in U := (x^* - \delta, x^* + \delta)$ gilt $|\Phi'(x) - \Phi'(x^*)| < \frac{1}{4} = \varepsilon \Rightarrow |\Phi'(x)| < \frac{3}{4} =: L < 1$.

Mit Taylor um x^* folgt für $x \in U$

$$\Phi(x) = \Phi(x^*) + (x - x^*)\Phi'(\xi_x) \quad \text{für } \xi_x \in U.$$

Also gilt für $x^{(0)} \in U$ beliebig und $x^{(k+1)} := \Phi(x^{(k)})$ nun

$$|x^{(1)} - x^*| = |(x^{(0)} - x^*) \cdot \Phi'(\xi_{x^{(0)}})| \leq \sup_{x \in U} \Phi(x) |x^{(0)} - x^*| \leq L |x^{(0)} - x^*|$$

Und induktiv damit

$$|x^{(k+1)} - x^*| \leq L |x^{(k)} - x^*|. \quad \square$$

<u>Trigonometrie</u>

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta}$$
$$\sin^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha)), \quad \cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$$

<u>Ungleichungen</u> $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Für $x, y \geq 0$: $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$. Für $x_i \geq 0$: $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$.

Für $x > -1$, $n \in \mathbb{N}$: $(x+1)^n \geq nx + 1$.

Cauchy-Schwarz: $\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)$.

Fakultät: $\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} \leq n! \leq n^n$.

<u>Bew. S. 4.2</u> Sei $p_1(x) := f(a) + \frac{x-a}{b-a}(f(b) + f(a)) \in \mathbb{P}_1$ Int.poly von f für $x_0 = a$, $x_1 = b$. Dann gilt

1) $\int_a^b f(x) - p_1(x) = \dots = \int_a^b f(x)\,dx - Q^{(1)}_{[a,b]}[f] \leftarrow = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$.

Zudem gilt nach Satz 3.6

$$f(x) - p_1(x) = \tfrac{1}{2} f''(\xi_x)\omega_2(x), \quad \xi_x \in [a,b], \qquad \omega_2(x) = (x-a)(x-b)$$

Daraus folgt

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - Q^{(1)}_{[a,b]}[f]\right| = \left|\int_a^b \tfrac{1}{2} f''(\xi_x)\omega_2(x)\,dx\right| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{2} \int_a^b |\omega_2(x)|\,dx$$
$$= \dots = \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_\infty$$

2) Sei OBdA $a = -1$, $b = 1$ und def.

$$\mathcal{L}(f) := \int_{-1}^1 f(x)\,dx - \tfrac{1}{3}(f(-1) + 4f(0) + f(1)).$$

Da Simpsonregel exakt für kubische Polynome ist, gilt $\mathbb{P}_3 \subseteq \mathrm{Kern}(\mathcal{L})$.

Anwenden von Satz 3.16 ergibt

$$K(t) = \tfrac{1}{6}\mathcal{L}_x[(x-t)_+^3] = \begin{cases} -\frac{1}{72}(1-t)^3(3t+1), & 0 \leq t \leq 1 \\ K(-t), & -1 \leq t \leq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \forall t \in [-1,1]: K(t) \leq 0 \Rightarrow K(t)$ hat kein Vorzeichenwechsel.

Nach Kor. 3.17 ex. somit ein $\xi \in [-1,1]$ mit

$$\mathcal{L}(f) = \tfrac{1}{4!} f^{(4)}(\xi)\mathcal{L}(x^4) = \tfrac{1}{4!} f^{(4)}(\xi)\left(\tfrac{-4}{15}\right) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}.$$

Nach affiner Variablentransformation folgt die Aussage. $\square$

<u>Aufgabe.</u> Für $f \in C([-1,1])$ betrachte $I(f) := \int_{-1}^1 f(x)(x^2+2)\,dx$.

Bestimme c_1, c_2, x_1, x_2 mit $x_1 \leq x_2$, s.d. $G^{(3)}[f] := c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$ Ordnung 4 hat, d.h. exakt auf $\mathbb{P}_3$ ist.

<u>Lösung.</u> Da $x^2 + 2$ gerade ist, gilt für alle $g \in \mathbb{P}_3$

$G^{(3)}(g(x)) = G^{(3)}(g(-x)) = I(g)$. Daraus folgt (wie in Serie gezeigt) $c_1 = c_2$ und $x_1 = -x_2$.

Zudem gilt

$$2c_1 = I(1) \overset{1 \in \mathbb{P}_3}{=} \int_{-1}^1 (x^2+2)\,dx = \frac{14}{3} \Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{7}{3}.$$

Und

$$2c_1(2 - x_1^2) = G^{(3)}[2 - x^2] \overset{\text{exakt auf } \mathbb{P}_3}{=} I(2 - x^2) = \int_{-1}^1 (4 - x^4)\,dx = \frac{38}{5}$$
$$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{\tfrac{13}{35}}, \quad x_2 = \sqrt{\tfrac{13}{35}}.$$

5. Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme

Problem: Für $F: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ finde ein $x^* \in D$ mit $F(x^*) = 0$.

Def. Ein Iterationsverfahren heisst konvergent (abhängig vom Startwert $x^{(0)}$), wenn die Folge $(x^{(k)})_k$ der Iterierten gegen ein $x^* \in D$ mit $F(x^*) = 0$ konvergiert.

Def. It.verfahren heisst lokal konvergent gegen x^*, falls eine offene Umgebung $U \subseteq D$ um x^* ex., s.d. $\forall x^{(0)} \in U: x^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} x^*$. It.verfahren heisst global konvergent, falls $\forall x^{(0)} \in D: x^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} x^*$.

Def. Eine Folge $(x^{(k)})_k$ konvergiert linear gegen x^* falls $\exists L < 1\ \exists k_0 \in \mathbb{N}_0$, s.d.
$$\forall k \ge k_0: \|x^{(k+1)} - x^*\| \le L \cdot \|x^{(k)} - x^*\|.$$

Def. Eine Folge $(x^{(k)})_k$ konvergiert von p-ter Ordnung mit $p > 1$ gegen x^*, falls ein $C > 0$ ex., s.d.
$$\forall k \in \mathbb{N}: \|x^{(k+1)} - x^*\| \le C \|x^{(k)} - x^*\|^p$$
gilt und $x^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} x^*$.

Def. Für geg. Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst eine Fixpunktgleichung konsistent, wenn $f(x) = 0 \Leftrightarrow \Phi(x) = x$ gilt.

Newton-Verfahren. Agn. $f'(x^*) \neq 0$. Betrachte Fixpunktiteration geg. durch Fixpunktgleichung
$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$
Dann gilt für Fixpunkt x^* von Φ:
$$\Phi'(x^*) = 1 - \frac{f'(x^*) f'(x^*) - f(x^*) f''(x^*)}{(f'(x^*))^2} = 0,$$
somit konvergiert die Newton-Iteration nach Satz 5.9 lokal quadratisch, falls $f'(x^*) \neq 0$! (Sonst nur Konvergenz erster Ordnung)

Sekantenverfahren. (Mehrschrittverfahren)
Iteration: $$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)}) \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}$$

Satz 5.18 Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f(x^*) = 0$ und $f'(x^*) \neq 0$. Dann konvergiert das Sekantenverfahren lokal gegen x^* mit Ordnung $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62\ldots$ (Goldener Schnitt)

Satz 5.8 Sei $\Phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\Phi(x^*) = x^*$. Ist Φ in einer Umgebung von x^* stetig diffbar. mit $|\Phi'(x^*)| < 1$, dann ex. ein $\varepsilon > 0$, s.d. die Fixpunktiteration $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$ für jeden Startwert $x^{(0)} \in B_\varepsilon(x^*)$ linear gegen x^* konvergiert. (Bew. mit Mittelwertsatz)

Satz 5.9 Sei $\Phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\Phi(x^*) = x^*$ und $(m+1)$-mal stetig diffbar. in einer Umgebung von x^* mit $\Phi'(x^*) = \ldots = \Phi^{(m)}(x^*) = 0$. Dann konvergiert die Fixpunktiteration lokal von $(m+1)$-ter Ordnung.

Satz 5.10 (Fixpunktsatz). Sei $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und sei $\Phi: E \to E$ eine Selbstabbildung. Ferner sei Φ eine Kontraktion auf E, d.h. es ex. eine Konst. $L < 1$, s.d. $\forall x, y \in E: \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \le L \|x - y\|$.
Dann gelten folgende Aussagen:
1) Es ex. genau ein $x^* \in E$ mit $\Phi(x^*) = x^*$.
2) Für beliebiges $x^{(0)} \in E$ konvergiert $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$ gegen x^*.
3) Es gilt die a-priori Fehlerabschätzung: $\|x^{(k)} - x^*\| \le \frac{L^k}{1-L} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$
4) Es gilt die a-posteriori Fehlerabschätzung: $\|x^{(k)} - x^*\| \le \frac{L}{1-L} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$

Kor. 5.11 Sei $\Phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\Phi(x^*) = x^*$ und Φ in einer Umgebung von x^* stetig diffbar. Agn. für eine mit einer Vektornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ verträgliche, submultiplikative Matrixnorm gelte $\|\Phi'(x^*)\| = \|D_{x^*}\Phi\| < 1$. Dann ex. ein $\varepsilon > 0$, s.d. mit $E := B_\varepsilon(x^*)$ die Voraussetzungen von Satz 5.10 erfüllt sind.

Newton-Iteration im Mehrdim. Agn. $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist C^2.
Newton-Iteration: $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}) := x^{(k)} - (F'(x^{(k)}))^{-1} \cdot F(x^{(k)})$. (Agn. $F'(x^{(k)}) = D_{x^{(k)}}F$ ist invbar)

Satz 5.20 Sei $F: D \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar, $x^* \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $F(x^*) = 0$. Agn. $F'(x^*) = D_{x^*}F$ ist regulär und es ex. Konstanten $L, R \in \mathbb{R}$ mit
$$\forall x, y \in B_R(x^*): \|F'(x) - F'(y)\| \le L \cdot \|x - y\|.$$
Setze $r := \min\{R, \frac{1}{2CL}\}$ mit $C = \|(F'(x^*))^{-1}\|$. Dann ist für jeden Startwert $x^{(0)} \in B_r(x^*)$ die Newton-Iteration wohldefiniert und konvergiert quadratisch gegen x^*, d.h. es ex. Konst. $\tilde{C} > 0$, s.d. $\|x^{(k+1)} - x^*\| \le \tilde{C} L \|x^{(k)} - x^*\|$

gedämpftes Newton-Verfahren (Globalisierungstechnik). Für Dämpfungsfaktor $0 < \lambda_k \le 1$ hat das gedämpfte Newton-Verfahren die Form
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda_k \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}.$$
Wahl von λ_k: λ_k so wählen, dass natürliche Monotonietest für $\Theta_k = 1 - \frac{\lambda_k}{2} < 1$ erfüllt ist, d.h. es gelte $\left| \frac{f(x^{(k+1)})}{f'(x^{(k)})} \right| \le \Theta_k \left| \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \right|$. ($x^{(k+1)}$ hängt von λ_k ab!)
Üblicherweise wählt man λ_k aus eine Folge $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \lambda_{min}\}$. Falls $\lambda_k < \lambda_{min}$, wird die Iteration abgebrochen. Wir ersetzen λ_k durch $\lambda_k/2$, bis der Monotonietest erfolgreich ist. Dann verwenden wir $\lambda_{k+1} = \min\{1, 2\lambda_k\}$ im nächsten Iterationsschritt.

Residuenschätzer. Sei $\Theta < 1$.
- Monotonietest: $\|F(x^{(k+1)})\| \le \Theta \|F(x^{(k)})\|$ ← nicht affin invariant!
- Natürlicher Monotonietest: $\|(F'(x^{(k)}))^{-1} \cdot F(x^{(k+1)})\| \le \Theta \|(F'(x^{(k)}))^{-1} F(x^{(k)})\|$ ← affin invariant!

MATLAB. (Newton im Mehr-dim. mit natürlichem Konvergenztest) $\Theta := \frac{1}{2}$.

```
function x = newtonnat(fun, jac, x0, tol)
x = x0; f = feval(fun, x);   ← F  ← F'
while (1 == 1)
  J = feval(jac, x); [L, U] = lu(J);
  x = x - U\(L\f);
  fold = f;  f = feval(fun, x);
  resold = norm(U\(L\fold));
  resnew = norm(U\(L\f));
  if resnew <= tol, return; end
  if resnew / resold > 1/2,
     warning('konv. nicht zur vorgeg. Genauigkeit');
     return;
  end
end
```

6. Ausgleichsrechnung

Def. Sei $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|_q$ eine Norm auf $\mathbb{R}^m$. Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und ein $b \in \mathbb{R}^m$ heisst das Problem "Finde $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| \stackrel{!}{=}$ minimal derart, dass $\forall y \in \mathbb{R}^n$: $\|Ax-b\|_q \leq \|Ay-b\|_q$ gilt" Ausgleichsproblem. (Im folgenden gilt immer $p=q=2$)

Satz 6.3 Sei $m \geq n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $n = \text{rang}(A) \leq m$. Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ ist Lösung des Ausgleichsproblems (für $p=q=2$) g.d.w. x die Normalengleichung
$$A^TAx = A^Tb \quad (\rightsquigarrow \text{schlecht konditioniert, da } \kappa(A^TA) = \kappa(A)^2)$$
löst. (Eindeutig lösbar, da A^TA SPD ist).

Satz 6.9 Sei $m \geq n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $n = \text{rang}(A) \leq m$. Sei $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ orthogonal und $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obere Dreiecksmatrix, s.d. $A = Q\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}\begin{matrix}\}n \\ \}m-n\end{matrix}$ gilt. Sei ferner der Vektor $\tilde{b} := Q^Tb \in \mathbb{R}^m$ wie folgt partitioniert:
$Q^Tb = \tilde{b} =: \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{pmatrix}\begin{matrix}\}n \\ \}m-n\end{matrix}$. Dann ist die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ des Ausgleichsproblems die eindeutige Lösung des Dreieckssystems $Rx = \tilde{b}_1$.

Satz 6.13 Sei $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Dann hat die Householder-Reflexion $Q := I_m - \frac{2}{v^Tv}vv^T$ die Eigenschaften:
1) $Q^T = Q$ 2) Q ist orthogonal, d.h. $Q^T = Q^{-1}$
3) Q ist involutorisch, d.h. $Q^2 = I_m$.

$\rightarrow$ geometrische Interpretation: Q ist Spiegelung an der Hyperebene $(\text{span}\{v\})^\perp = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x^Tv = 0\}$.

Lemma 6.15 Sei $a \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ nicht kolinear zu $e_1 \in \mathbb{R}^m$. Sei $\alpha := \pm\|a\|_2$ ($\rightarrow$ in der Praxis $\alpha := -\text{sign}(a_1)\cdot\|a\|_2$). Dann gilt für $v := a - \alpha e_1$; $Q := I_m - \frac{2}{v^Tv}vv^T$:
$$Qa = \alpha e_1.$$

Def. Sei $A = U\Sigma V^T$ eine SVD von $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dann heisst $A^+ := V\Sigma^+U^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ (Moore-Penrose) Pseudoinverse von A mit $\Sigma^+ = \left(\begin{array}{ccc|c} 1/\sigma_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1/\sigma_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

Bsp. Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $\text{rang}(A) = n$ gilt $A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$

Rechteckmatrizen mit Randeffekt. Agn. wir haben nun $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $r = \text{rang}(A) < \min\{n,m\}$. Sei dann $A = U\Sigma V^T$, $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ortho., $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortho. die SVD von A. Dann können wir das Ausgleichsproblem (siehe Def. oben links) wie folgt umschreiben:
"Finde $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\tilde{x}\| \stackrel{!}{=}$ minimal derart, dass $\forall y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|\Sigma\tilde{x} - \tilde{b}\|_2 \leq \|\Sigma y - \tilde{b}\|_2$, wobei $\tilde{b} := U^Tb$."
Dies wird von $\tilde{x}$ gelöst g.d.w. $x := V\tilde{x}$ das ursprüngliche Ausgleichsproblem löst.

Lemma. Die Lösung $\tilde{x}$ ist eindeutig und explizit gegeben durch $\tilde{x} := \Sigma^+\tilde{b} = \Sigma^+U^Tb$.

Algo. (Methode der Normalengleichungen)
1) Setze $C := A^TA$. (in $m\cdot n^2$)
2) Bestimme Cholesky Faktor R von C, d.h. $R^TR = C$. (in $\frac{1}{3}n^3$)
3) Setze $b' := A^Tb$ (in $2mn$)
4) Löse $R^Ty = b'$ mit Vorwärtssubst. (in n^2)
5) Löse $Rx = y$ mit Rückwärtssubst. (in n^2)

MATLAB. (QR-Householder)

```
function [Q,R] = QR_Householder(A)
  [m,n] = size(A);
  Q = eye(m);
  for k = 1:min(n, m-1)
    alpha = -sign(A(k,k))*norm(A(k:m,k));
    V = A(k:m,k) - alpha * eye(m-k+1,1);   % first basic vector e1
    Qk = eye(length(v)) - 2/(v'*v) * (v*v');
    A(k:m,k:n) = Qk * A(k:m,k:n);
    Q = Q * blkdiag(eye(k-1), Qk);
  end
  R = A(1:n,1:n);
```

Algo. (Ausgleichsproblem mittels QR-Zerlegung)
Input: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $\text{rang}(A) = n$, $b \in \mathbb{R}^m$
Output: Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ des Ausgl.problems $\min\|Ax-b\|_2$

for $k = 1,\dots,\min\{n, m-1\}$ do
  Bestimme Householder-Reflexion $Q^{(k)}$, s.d. letzte $m-k$ Einträge in k-ter Spalte von $Q^{(k)}A$ Null werden
  $A \leftarrow Q^{(k)}A$
  $b \leftarrow Q^{(k)}b$
end for
Partitioniere $A = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.
Löse $Rx = b_1$ mit Rückwärtssubst.

Laufzeit: $\mathcal{O}(2mn^2 - \frac{2}{3}n^3)$

Herleitung der Normalengleichung:
Sei für bel. $z \in \mathbb{R}^n$
$\Phi_z(t) := \|A(x+tz) - b\|_2^2$.
Dann ist x Lösung des Ausgl.-problems g.d.w. Φ_z für alle $z \in \mathbb{R}^n$ bei $t=0$ ein (lokales) Minimum annimmt. Betrachte:
$$\Phi_z(t) = (A(x+tz)-b)^T(A(x+tz)-b) = \dots = t^2(z^TA^TAz) + 2t(z^TA^TAx - z^TA^Tb) + (x^TA^TAx + b^Tb - 2x^TA^Tb)$$
$$\Rightarrow \Phi'(0) = 2z^T(A^TAx - A^Tb) \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Leftrightarrow A^TAx = A^Tb, \text{ da } \forall z \in \mathbb{R}^n \text{ gilt}$$

Aufgabe. Daten (x_i, y_i), $i = 1,\dots,n$ sollen durch $f(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$ approximiert werden. Leite Ausgl. Problem $\min_c \|Ac - b\|_2^2$ her.
Lösung. Abstand von f zu den Daten ist geg. durch $d_i := |f(x_i) - y_i|$. Die Quadratsumme davon soll minimiert werden:
$$\min_{c\in\mathbb{R}^2}\sum_{i=1}^n d_i^2 = \min_{c\in\mathbb{R}^2}\sum_{i=1}^n (c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) - y_i)^2$$
$$= \min_{c\in\mathbb{R}^2}\sum_{i=1}^n ((\phi_1(x), \phi_2(x))\cdot c - y_i)^2 = \min_{c\in\mathbb{R}^2}\|Ac - b\|_2^2$$
durch für $A \in \mathbb{R}^{n\times 2}$ geg. durch $A := (\phi_j(x_i))_{i=1,\dots,n;\ j=1,2}$ und $b := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$