

Informatik Übungsstunde - Woche 5

Kommazahlen in Binärdarstellung

• Dezimalzahl: 187.352_{10}

$\begin{matrix} \nearrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \nwarrow \\ 10^2 & 10^1 & 10^0 & 10^{-1} & 10^{-2} & 10^{-3} \end{matrix}$

• Binärzahl: $110.101_2 = 6.625_{10}$

$\begin{matrix} \nearrow & \nearrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \nwarrow \\ 2^2 & 2^1 & 2^0 & 2^{-1} & 2^{-2} & 2^{-3} \end{matrix}$

→ Einziger Unterschied ist die Basis!

Wie konvertiert man Kommazahlen vom Dezimal- zum Binärsystem?

Allg. Rezept: (am Bsp. 5.9_{10})

- 1) Konvertiere nur die Zahl ohne Nachkommastellen
(→ siehe dafür Notes der Woche 2).

Schreibe also $5.9_{10} = 101_2 + 0.9_{10}$.

- 2) Führe folgenden Algorithmus durch:

x_i	$\lfloor x_i \rfloor$	$x_i - \lfloor x_i \rfloor$	$2(x_i - \lfloor x_i \rfloor)$
0.9	0	0.9	1.8
1.8	1	0.8	1.6
1.6	1	0.6	1.2
1.2	1	0.2	0.4
0.4	0	0.4	0.8
0.8	0	0.8	1.6
1.6	⋮	⋮	⋮

↑ direkt durchstreichen!

↑ Lösung

3) Lese die (möglicherweise unendliche)
Binärdarstellung ab und füge alles zusammen.

$$\rightarrow 0.9_{10} = 0.11100_2$$

$$\rightarrow 5.9_{10} = 101.11100_2.$$

Fließkommazahlensystem

Def. Für $b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $p \in \mathbb{N}$, $e_{\min}, e_{\max} \in \mathbb{Z}$ mit
 $e_{\min} < 0 < e_{\max}$ def. wir die Menge

$$\mathbb{F}^*(b, p, e_{\min}, e_{\max}) := \left\{ \pm b^e \cdot \sum_{i=0}^{p-1} \frac{d_i}{b^i} \mid \begin{array}{l} d_0, \dots, d_{p-1} \in \{0, \dots, b-1\}, \\ d_0 \neq 0, e \in \mathbb{Z}, \\ e_{\min} \leq e \leq e_{\max} \end{array} \right\} \cup \{0\}.$$

• Grösste Zahl:

$$\begin{aligned} X_{\max} &= b^{e_{\max}} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{b-1}{b^i} \stackrel{\substack{\text{endl. geom.} \\ \text{Reihe}}}{=} b^{e_{\max}} (b-1) \cdot \frac{1 - b^{-p}}{1 - b^{-1}} \\ &= b^{e_{\max}} \frac{b^2 - b}{b - 1} (1 - b^{-p}) \\ &= \underline{b^{e_{\max} + 1} (1 - b^{-p})}. \end{aligned}$$

• Kleinste Zahl: $X_{\min} = -X_{\max}$.

• Kleinste positive Zahl ist $b^{e_{\min}}$ ($\rightarrow$ Wieso?).

Rechnen in $\mathbb{F}^*$

Allg. Rezept:

- 1) Bringe beide Binärzahlen auf gleichen Exponenten.
- 2) Addiere beide Zahlen schriftlich.
- 3) Normalisiere die erhaltene Zahl.
- 4) Runde die Zahl in $\mathbb{F}^*$.

Bsp. $0.5625_{10} = 1.001 \cdot 2^{-1}$ und $0.46875_{10} = 1.111 \cdot 2^{-2}$
in $\mathbb{F}^*(2, 4, -2, 2)$ addieren:

1) Exponenten anpassen: $1.111 \cdot 2^{-2} \longrightarrow 0.1111 \cdot 2^{-1}$

2) Addieren:

$$\begin{array}{r} 1.001 \cdot 2^{-1} \\ 0.1111 \cdot 2^{-1} \\ \hline 10.0001 \cdot 2^{-1} \end{array}$$

3) Normalisieren: $10.0001 \cdot 2^{-1} \longrightarrow 1.00001 \cdot 2^0$

4) Runden: $1.00001 \cdot 2^0 \longrightarrow 1.000 \cdot 2^0$

Wir erhalten dabei nicht die exakte Lösung 1.03125 , da die Mantissenlänge 4 nicht ausreicht, um diese Zahl darzustellen.