Aufgaben Folgen

A1.1. MC Fragen

(Mehrere richtige Antwortmöglichkeiten)

FS18

(a) Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist die Aussage $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ äquivalent zu

- ☐ $\forall\, K \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N},$ so dass $\forall\, n \geq N:\ a_n \leq -K.$
- ☐ $\forall\, \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N},$ so dass $\forall\, n \geq N:\ |a_n| < \epsilon.$
- ☐ $\forall\, N \in \mathbb{N}\ \exists K \in \mathbb{N},$ so dass $\forall\, n \geq N:\ a_n \leq -K.$
- ☐ $\forall\, N \in \mathbb{N}\ \exists \epsilon > 0,$ so dass $\forall\, n \geq N:\ |a_n| < \epsilon.$

FS18

(e) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Antwortmöglichkeiten sind korrekt?

- ☐ Wenn $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, dann ist auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.
- ☐ Wenn $0 \leq b_n \leq a_n^3$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_n \to 0$ für $n \to \infty$, dann konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- ☐ Wenn $|a_n - b_n| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann konvergieren beide Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- ☐ Wenn $(b_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

HS18

(d) Es gilt $x_n \to x_0$ genau dann wenn,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \geq 1,\ \forall n \geq N,\ |x_n - x_0| < \varepsilon.$$

Wahr ☐ Falsch ☐

FS20

(d) Seien $(a_k)_{k\geq 1}, (b_k)_{k\geq 1}$ und $(c_k)_{k\geq 1}$ drei Folgen. Sei $(d_k)_{k\geq 1}$ definiert durch

$$d_k = \frac{(a_k)^2 + \sin(b_k)}{1 + \exp(c_k)}.$$

Geben Sie für jede folgender Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist.

(i) **[2 pkt]** Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ absolut konvergieren, gilt $\lim_{k\to\infty} d_k = 0$.

(A) wahr.

(B) falsch.

(ii) **[2 pkt]** Wenn $(d_k)_{k\geq 1}$ beschränkt ist, muss mindestens eine der Folgen $(a_k)_{k\geq 1}$, $(b_k)_{k\geq 1}$ und $(c_k)_{k\geq 1}$ beschränkt sein.

(A) wahr.

(B) falsch.

1.MC1 [1 Punkt] Sei (a_n) eine reelle Folge. Was ist die konkrete Bedeutung der folgenden Aussage?

FS23

$$\forall T \geq 1, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, a_n < -T.$$

(A) $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

(B) $\lim_{n\to+\infty} a_n$ existiert nicht.

(C) $\lim_{n\to+\infty} a_n > 0$.

(D) $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$.

FS23

1.MC2 [1 Punkt] Sei (a_n) eine reelle Folge. Welche mathematische Aussage bedeutet, dass (a_n) das Cauchy-Kriterium erfüllt?

(A) $\exists \varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, \forall m \geq N, |a_n - a_m| < \varepsilon$.

(B) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, \exists m \geq N, |a_n - a_m| < \varepsilon$.

(C) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, \forall m \geq N, |a_n - a_m| < \varepsilon$.

(D) $\forall \varepsilon > 0, \forall N \geq 1, \forall n \geq N, \forall m \geq N, |a_n - a_m| > \varepsilon$.

1.MC5 [1 Punkt] Sei (a_n) eine Folge von positiven reellen Zahlen, die das Cauchy-Kriterium erfüllt. Welche der folgenden Aussagen trifft zu? FS23

(A) Die Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n$ ist konvergent.

(B) Die Folge (a_n) konvergiert gegen 0.

(C) Die Folge $(1/a_n)$ ist beschränkt.

(D) Die Folge (a_n) hat eine konvergente Teilfolge.

A.1.2 (PVW Hands-on 2)

Sei $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ mit: $a_1 = \sqrt{6}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$ $(\forall n \geq 1)$

Untersuche Folge auf Konv. und bestimme Grenzwert (falls existiert)