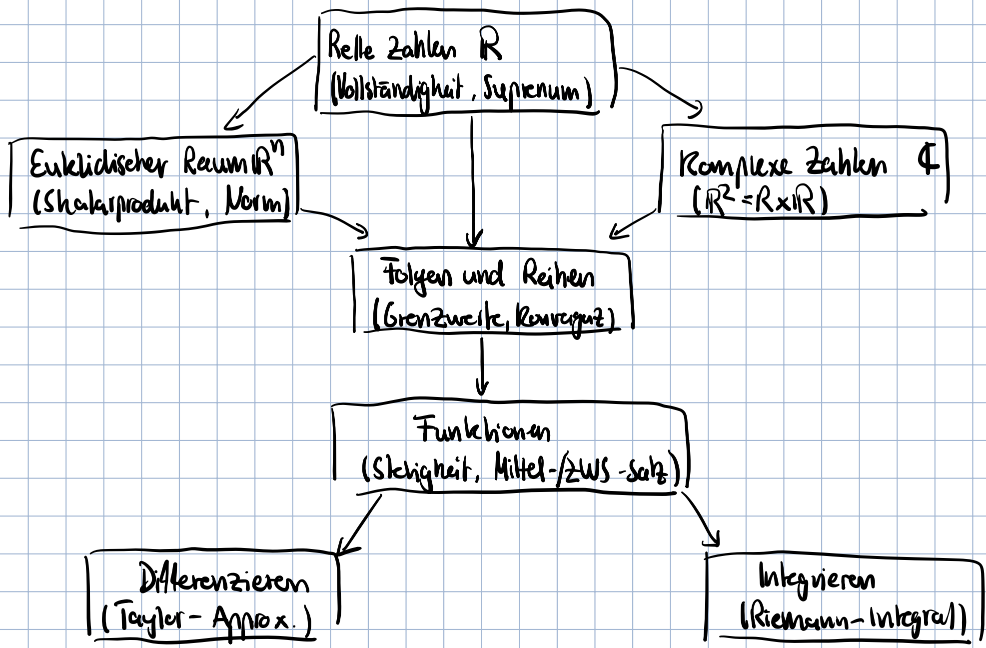
## Exercise Session 1

### Organisatorisches

- Mail: 4alkbe@ethz.ch
- Website: n.ethz.ch/~4alkbe/
- Fragen per Mail oder direkt in der Übungsstunde

### Ausblick in das Semester




### Themenübersicht: Grundlagen

1.0 Mengen

1.1 Abbildungen

1.2 $\mathbb{N}$ und vollständige Induktion

1.3 Die rellen Zahlen $\mathbb{R}$

1.4. Supremum/Infimum

## 1.0 Mengen

**Defn: (Menge)**

Zentrale Annahmen der naiven Mengenlehre (Cantorschen Mengenlehre) sind folgende Punkte

(1) Menge besteht aus beliebigen unterscheidbaren Elementen. Etwaige Vielfachheiten werden ignoriert

(2) Eine Menge ist unverwechselbar durch ihre Elemente bestimmt

(3) Jede Eigenschaft $A(x)$ defn. die Menge der Objekte $\{x \mid A(x)\}$ die diese Eigenschaft besitzen (d.h. die Aussage $A(x)$ erfüllen)

**Bem:** · Manchmal schreiben wir Mengen durch konkrete Auflistung ihrer Elemente, also bspw. $M = \{x_1, \dots, x_n\}$

- Die leere Menge ist geschrieben als $\{\}$, bzw. $\emptyset$

- Man schreibt $x \in A$ falls $x$ in der Menge $A$ enthalten ist, und $x \notin A$ falls nicht

**Defn: (Teilmenge)** Wir sagen eine Menge $A$ ist eine Teilmenge einer Menge $B$, falls für alle $x \in A$ auch $x \in B$ gilt, man schreibt $A \subset B$ (bei strikter Teilmenge, d.h. $A \subset B$ aber $A \neq B$ schreibt man $A \subsetneq B$)

**Defn: (kartesisches Produkt)**

- Für zwei Mengen $X$ und $Y$ ist das kartesische Produkt $X \times Y$ die Menge aller geordneten Paare $(x, y)$ wobei $x \in X$, $y \in Y$, d.h.

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ und } y \in Y\}$$

- Wir definieren $X^n$ ($n$ eine natürliche Zahl), als $n$-faches kartesisches Produkt mit sich selbst, d.h. $X^2 = X \times X$, $X^3 = X \times X \times X$ und so weiter

## 1.1 Abbildungen (Funktionen)

**Einführung (Abbildungen)**

- Eine Funktion $f$ von der Menge $X$ nach der Menge $Y$ eine Zuordnung, die jedem $x \in X$ ein bestimmtes $y = f(x) \in Y$ zuweist

- Wir schreiben $f: X \to Y$ für eine Funktion von $X$ nach $Y$, $x \mapsto f(x)$ für die Zuordnung, wobei $X$ der Definitionsbereich und $Y$ den Werteberich / Zielbereich von $f$ darstellt

- Oft schreibt man also kurz: $f: X \to Y$, $x \mapsto f(x)$ bspw. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

## 1.2 $\mathbb{N}$ und vollständige Induktion

### Einführung Zahlenmengen

- Intuitiv kommt man auf die folgenden Zahlenmengen, beachte, dass dies keine mathematische Definition ist

$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\dots\}$

$\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,\dots\}$ $\qquad \mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \}$

$\mathbb{Z} = \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$ $\qquad \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{alle "Lücken"}\}$

**Definition (Induktive Teilmengen)**

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heisst Induktiv, falls folgende zwei Eigenschaften gelten:

1) $1 \in M$ (Man kann auch $0 \in M$ fordern um $\mathbb{N}$ bei $0$ beginnen zu lassen. Dies ist Konvention und mathematisch unerheblich)
2) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \in M \Rightarrow x+1 \in M$

Bspw. ist $\mathbb{R}$ eine induktive Menge (gewissermassen die grösste), die "kleinste" induktive Menge soll $\mathbb{N}$ sein

**Definition (Natürliche Zahlen)**

Wir definieren die Teilmenge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ als Durchschnitt aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$

$$\mathbb{N} = \bigcap_{M \subseteq \mathbb{R} \text{ induktiv}} M$$

Es folgt: $\mathbb{N}$ ist in jeder induktiven Teilmenge von $\mathbb{R}$ enthalten und $1 \in \mathbb{N}$

**Lemma (Kleinste Induktive Menge)**

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bilden die kleinste Induktive Teilmenge der reellen Zahlen

### Beweis durch vollständige Induktion

**Einführung**

Will man eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen, bspw. dass die Summe der ersten $n$ natürlichen Zahlen gleich $n(n+1)/2$ ist

$$A(n): \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

kann man dies mit dem Prinzip der vollständigen Induktion tun

**Satz (Prinzip der vollständigen Induktion)**

Es sei die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen. Gilt

1) $A(1)$ ist wahr ("Induktionsanfang")

2) $\forall n \in \mathbb{N}: A(n)$ wahr $\Rightarrow A(n+1)$ wahr ("Induktionsschritt")

so gilt die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- Man zeigt also erst den Induktionsanfang, d.h. das $A(n)$ für (typischerweise) $n=1$ hält.
Dann den Induktionsschritt: nehmen an $A(n)$ gilt für ein allgemeines $n$, zeige, dass daraus folgt, das $A(n+1)$ hält

**Beweis:** Definiere $E = \{n \in \mathbb{N} \mid A(n)\}$, dann gilt folgendes
- $1 \in E$, da $A(1)$ aufgrund des Induktionsanfangs gilt
- Für alle $x \in \mathbb{N}$, wenn $x \in E$, dann auch $x+1 \in E$ wegen des Induktionsschritt. Also $\mathbb{N} \subset E$, also gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

**Beispiel:** Beweise $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**Lösung:** D.h. wir müssen die Aussage $A(n) = \sum_{n=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ zeigen

(1) $n=1$: $A(1)$. $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ ✓

(2) $n \Rightarrow n+1$: Induktionshypothese ist, das $A(n)$ hält d.h. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, damit zeigen wir $A(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) \overset{\text{I.H.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad ✓$$

## 1.3 Die rellen Zahlen $\mathbb{R}$

Satz: 1) $\mathbb{R}$ mit $+, \cdot, 0, 1$ ist ein kommutativer Körper

2) $\mathbb{R}$ mit $+, \cdot, 0, 1$ ist ein angeordneter Körper (d.h. ein Körper $K$ mit einer Ordnung $<$ die mit der Addition und Multiplikation verträglich ist, also: wenn $a<b$, dann $a+c<b+c$ für alle $c \in K$ und wenn $0<a$, $0<b$ dann $0<a \cdot b$)

3) $\mathbb{R}$ ist vollständig (d.h. jede Cauchy Folge konvergiert in $\mathbb{R}$ und dieser Grenzwert liegt wieder in $\mathbb{R}$)

Bem: · Die vollständigkeit zeichnet die rellen Zahlen aus

· $\mathbb{C}$ (komplexe Zahlen) ist nicht angeordnet (da es keine Ordnung auf $\mathbb{C}$ gibt die mit der Multiplikation verträglich ist)

Folge: · Daraus folgt, dass jede relle Zahl $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein eindeutig bestimmtes Multiplikatives Inverses hat: $(x^{-1}) \cdot x = x(x^{-1}) = 1$

Axiom: (Vollständigkeit)
Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ (nicht leer), dann gilt für alle $a \in A$, $b \in B$ mit $a \leq b$ das mindestens ein $c$ existiert mit $a \leq c \leq b$
d.h. die rellen Zahlen haben "keine Lücken"

## 1.4. Supremum und Infimum

Definition Obere/Untere Schranke
Für $A \subset \mathbb{R}$, gilt das $b \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke für $A$ ist, falls
für alle $a \in A$: $a \leq b$

und $c \in \mathbb{R}$ eine untere Schranke falls gilt
für alle $a \in A$: $a \geq c$

· Obere-/Untere Schranke von $A$ müssen keine Elemete von $A$ sein, bspw.
$A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$
ist von oben durch $b=1$ beschränkt, aber bspw auch $2, \pi, 42$ etc. sind obere Schranken (d.h. diese sind nicht eindeutig)

Definition Supremum, Infimum
· Sei $A \subset \mathbb{R}$. Das Supremum von $A$ ist die kleinste obere Schranke von $A$, man schreibt $\sup A$
Das Infimum von $A$ die grösste untere Schranke von $A$, man schreibt $\inf A$

· Sollte $A$ nach oben bzw. unten unbeschränkt sein, definieren wir $\sup A = +\infty$, $\inf A = -\infty$

Bemerkungen
· Während Obere/untere Schranke nicht immer eindeutig sind, sind $\sup A$, $\inf A$ immer eindeutig!

· Das Suprenum und Infimum müssen aber keine Elemente von $A$ sein, sind sie es aber doch also $\sup A \in A$ (bzw $\inf A \in A$) definieren diese das Maximum bzw. Minimum der Menge
Bsp: $\sup (42, 43) = \sup [42, 43] = 43$, aber $\max (42, 43)$ ex. nicht, während $\max [42, 43] = 43$, da $43 \in [42, 43]$

Beispiel: Bestimme Supremum, Infimum von $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$

Lösung: $\sup A = 1$ da $b=1$ die kleinste obere Schranke ist, gleichzeitig $\sup A \in A \Rightarrow \sup A = \max A = 1$
Offenbar konvergiert $1/n$ zu $0$, bleibt zu zeigen das $c=0$ die grösste obere Schranke ist:
Angenommen es existiert $c' > c$ s.d. $c'$ auch eine untere Schranke ist, dann gilt aber
$c' < 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow n < 1/c'$ $\forall n \in \mathbb{N}$, was impliziert, dass $\mathbb{N}$ beschränkt ist. Widerspruch! $\inf A = 0$

Beispiel: Bestimme $\sup A$, $\inf A$ ($\max A$, $\min A$ falls existent), der Menge $A = \{\frac{n-3}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup (-1, 1)$

Lösung: $A = \{\frac{n-3}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup (-1, 1) = \{-2, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{16}, \frac{2}{25}, \dots\} \cup (-1, 1)$, d.h. ab $n=2$ liegen alle Terme

$(n-3)/n^2$ im Intervall $(-1, 1)$, d.h. $A$ kann geschrieben werden als $A = \{-2\} \cup (-1, 1)$. Offenbar ist $A$ nach unten beschränkt mit $\inf A = -2$, da $-2 \in A$ ist $\min A$ existent und gegeben mit $\min A = -2$. Die Menge ist nach oben beschränkt mit $\sup A = 1$, da aber $1 \notin A$ existiert das Maximum nicht

**Lemma** (Eigenschaften des Supremums/Infimums)

Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ (nicht leer), sei $A+B$ definiert als $\{a+b \mid a \in A, b \in B\}$, so gilt

- $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ , $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$
- $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ , $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$

**Beispiel:** Bestimme sup/inf (max/min falls existiert) der folgenden Menge $A = \{3n + \frac{2}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

**Lösung:** Fasse Menge als Vereinigung auf, d.h. $A = B \cup C$ mit $B = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $C = \{\frac{2}{m} \mid m \in \mathbb{N}\}$
Offenbar $\inf B = 3$, $\sup B = +\infty$ (d.h. unbeschränkt) und $\inf C = 0$, $\sup C = 2$, mit den Formeln:

$$\sup(A) = \sup(B+C) = \sup B + \sup C = +\infty + 2 = +\infty$$
$$\inf(A) = \inf(B+C) = \inf B + \inf C = 3 + 0 = 3$$

Offenbar existiert kein Maximum und da $3 \notin A$ auch kein Minimum

**Beispiel:** Berechne sup/inf (max/min falls ex.) der Menge $A = \{\frac{(-1)^n}{n+2} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

**Lösung:** Iteriere die Formel etwas, also $A = \{\frac{(-1)^n}{n+2} \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \ldots\}$

offenbar gilt wieder das wir eine Vereinigung zweier Mengen haben die wir seperat betrachten können,
Konkret: $B = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\}$ , $C = \{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \ldots\}$ offenbar gilt $\sup B = \frac{1}{2}$, $\inf B = 0$, $\sup C = 0$, $\inf C = -\frac{1}{3}$

Total (nach Formel oben): $\sup A = \sup(B \cup C) = \max(\sup B, \sup C) = 1/2$
$\inf A = \inf(B \cup C) = \min(\inf B, \inf C) = -1/3$

Da $1/2$ und $-1/3$ von $A$ angenommen werden (also $1/2, -1/3 \in A$) gilt $\max A = \frac{1}{2}$, $\min A = -\frac{1}{3}$