Exercise Session 10

10.1. Stetigkeit über die Grenzwertdefinition

10.2. Differenzierbarkeit: Die Ableitung [Skript 4.1]

10.1 Stetigkeit über die Grenzwertdefinition

(Anmerkung: Zusammenhang Stetigkeit und Grenzwert)

Grenzwertdefn: $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, falls $\forall \varepsilon > 0.\ \exists \delta > 0.\ \forall x \in D.\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

Stetigkeit: $f(x)$ stetig in x_0, falls $\forall \varepsilon > 0.\ \exists \delta > 0.\ \forall x \in D.\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Offenbar gilt: Eine Funktion, $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$, ist an der Stelle x_0 stetig, gdw

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

d.h. der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert und ist gleich dem Wert von f an x_0

Bem: Vor allem dann oft angewendet, wenn Stetigkeit bis auf vereinzelte Punkte klar ist

(Stückweise definierte Funktionen, hier müssen bspw nur die potentiellen Problemstellen geprüft werden)

Bsp 10.1.1: Ist $f(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ x^2 \cos(1/x) & , x \neq 0 \end{cases}$ stetig?

Lös: Für $x \neq 0$ ist $f(x)$ als Komposition stetiger Funktionen stetig, lediglich $x_0 = 0$ muss seperat untersucht werden. Benutzen wir die Grenzwertdefn. bleibt zu zeigen: $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert und ist gleich $f(x_0)$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \underbrace{x^2}_{\to 0} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\in [-1,1]} = 0 = f(0), \text{ also ist } f \text{ stetig}$$

$\Rightarrow$ Sandwich Theorem

Bsp 10.1.2 (FS19): Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^x & , x > 0 \\ 1 & , x = 0 \\ (-x)^{-x} & , x < 0 \end{cases}$, zeigen Sie das f stetig ist

Lös: $x^x = e^{x \log(x)}$ ist stetig für $x > 0$, $(-x)^{(-x)} = e^{-x \log(-x)}$ ist stetig für $x < 0$, bleibt $x_0 = 0$ zu überprüfen und zu zeigen $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(x_0) = f(0)$

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln(x)} = 1 \quad (\text{wir wissen } \lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0 \text{ vgl. oben})$$

da die Funktion gerade ist, gilt $\lim_{x\to 0^-} x^x = 1$, also damit $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ qed.

(Satz: Stetigkeit und Grenzwert, Skript 3.10.6)

Sei $D, E \subset \mathbb{R}$, $f: D \to E$, $g: E \to \mathbb{R}$, und $(g \circ f) = g(f(x)) : D \to \mathbb{R}$.

Falls $y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x)$, und g stetig in y_0 so gilt

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) = g(y_0)$$

Intuitiv: wir dürfen den Grenzwert "in stetige Funktionen ziehen"

Bsp 10.1.3: Bestimme $\lim_{x\to 1} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

Lös: $\lim_{x\to 1} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \sin\left(\lim_{x\to 1} \frac{\pi}{2}x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

10.2. Differenzierbarkeit: Die Ableitung

Definition Ableitung

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$, x_0 Häufungspunkt von D. Die Funktion f ist in x_0 diffbar, falls der Grenzwert

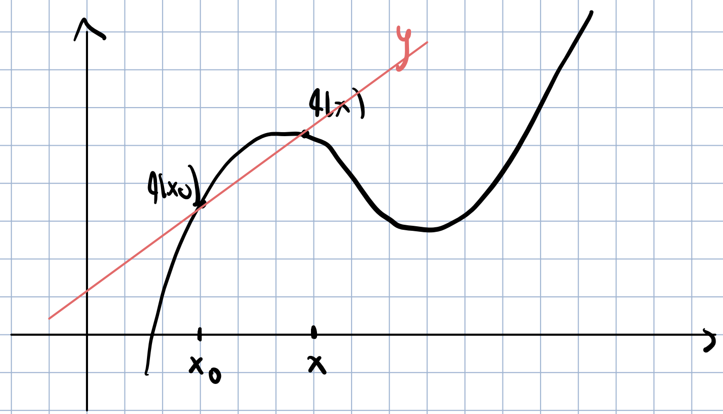
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{alternativ} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Man bezeichnet den Grenzwert als $f'(x_0)$

Bem. Notation: Für $f: D \to \mathbb{R}$, ist $f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0)$ dasselbe

(Geometrische Interpretation)

Intuitiv ist die Ableitung (das Differenzial) die Steigung der Tangenten der Funktion $f(x)$ am Punkt $(x_0, f(x_0))$. Es ist also die beste lineare approximation der Funktion am Punkt x_0.



$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

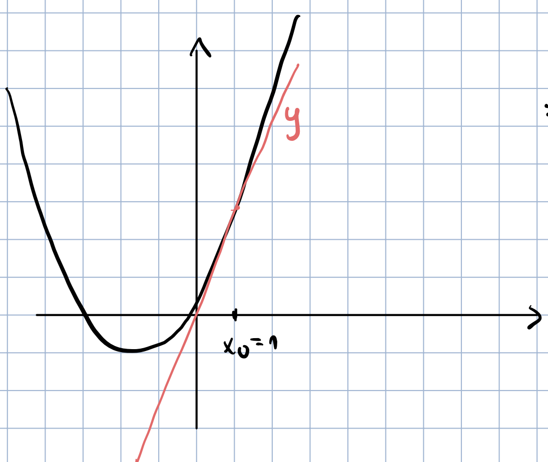
Allgemeine Tangentenformel: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ [vgl. $y = mx + c$]

Bsp 10.2.1 Berechne Ableitung $f(x) = x^2 + 2x$, $x_0 = 1$

Lös: $f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left((1+h)^2 + 2(1+h)\right) - (1+2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+2h+h^2+2+h) - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2+4h}{h} = \lim_{h \to 0} \underbrace{h}_{\to 0} + 4 = 4$$



Bsp. 10.2.2. Berechne Ableitung $f(x)=e^x$, bei $x_0=0$ (Tipp: Substitution)

Lös: $$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$$

Substitution 1. Bestimme subs: $y=g(h)=e^h-1 \Rightarrow h=\log(1+y)$

2. Grenzwert bei x_0: $y_0=\lim_{h\to 0} g(h)=\lim_{h\to 0}\log e^h-1=0$

3. Substituiere: $$\frac{e^h-1}{h}=\frac{e^{\log(1+y)}-1}{\log(1+y)}=\frac{y}{\log(1+y)}$$
$$=\frac{1}{\frac{1}{y}\cdot\log(1+y)}=\frac{1}{\log\left((1+y)^{1/y}\right)}$$

4. Grenzwert: $$\lim_{y\to 0}\frac{1}{\log\left((1+y)^{1/y}\right)}=\frac{1}{\log\left(\boxed{\underbrace{\lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y}}_{\to e}}\right)}=\frac{1}{\log(e)}=\frac{1}{1}=1$$

also $f(x)=e^x$ hat $f'(1)=1$ (bemerke: $f(x)=f'(x)$ bei $x_0=0$)

(Definition: Differenzierbarkeit auf ganz D, Skript 4.1.7)

Sei $D\subset\mathbb{R}$, $f:D\to\mathbb{R}$. Wir sagen f ist auf D diffbar, falls f für jeden Häufungspunkt $x_0\in D$ differenzierbar ist.

Bem: Um zu zeigen, dass $f:D\to\mathbb{R}$ auf ganz D diffbar ist, zeige einf. für jeden Häufungspunkt $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existiert.

Bsp 10.2.3.: Bestimme Ableitung von $f(x)=x^2$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Lös: Sei x_0 beliebiger Häufungspunkt, so gilt
$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x_0^2+2x_0h+h^2)-x_0^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2x_0h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}2x_0+h=2x_0$$

also gilt $f'(x)=2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Bsp. 10.2.4: Berechne Ableitung von $f(x)=x^n$ (Tipp: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$)

Lös: $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot h^k - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[\underbrace{\boxed{\binom{n}{0}}}_{=1} x^{n-0} \cdot h^0 + \underbrace{\boxed{\binom{n}{1}}}_{=n} x^{n-1} \cdot h^1 + h^2 \cdot \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-2}\right] - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\boxed{x^n} + n x^{n-1} \cdot h + h^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-2}\right) - \boxed{x^n}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} n x^{n-1} + h \cdot \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-2}$$

$$= n x^{n-1} + \underbrace{\lim_{h\to 0} \boxed{\underset{\to 0}{h} \cdot \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-2}}}_{\to 0}$$

$$= n x^{n-1}$$

also gilt $f(x)=x^n$ hat $f'(x)=nx^{n-1}$ als Ableitung.

(Anmerkung: Stetigkeit und Diffbarkeit)

Es gilt i. Allg. "f Diffbar $\Rightarrow$ f stetig", die Umkehrung gilt nicht: $\not\Leftarrow$

bsp. $f(x)=|x|$, f ist stetig (vgl. Vorlesung) aber bei $x_0=0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \pm 1$$

(Raum C^0, C^1)

Recap: $C(D) = C^0(D) = \{f: D\to\mathbb{R},\ f \text{ stetig}\}$, $C^0(D) \subset F(D) = \{f: D\to\mathbb{R},\ D\subset\mathbb{R}\}$

$C^1(D) = \{f: D\to\mathbb{R},\ f \text{ diffbar auf } D \text{ und } f' \text{ stetig auf } D\}$

Wir sagen, $f\in C^1(D)$ (sprich: f ist von der Klasse C^1), f diffbar und f' stetig nennt sich "stetig differenzierbar".