Anal Exercise Session 11

11.1. Die Ableitung: Definition, Kettenregel und Umkehrsatz

11.2. Zentrale Sätze: Satz von Rolle, Mittelwertsatz

[Herleitung "Diffbar ⇒ Stetigkeit"]

Defn. Diffbar: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

d.h. $\forall \varepsilon_A > 0.\ \exists \delta_A > 0.\ \forall x \in D.\ |x-x_0| < \delta_A \Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon_A$

Defn. Stetigkeit (bei x_0): $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

d.h. $\forall \varepsilon_S > 0.\ \exists \delta_S > 0.\ \forall x \in D.\ |x-x_0| < \delta_S \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_S$

Beweis: "f diffbar ⇒ f stetig"

Wir dürfen annehmen $\forall \varepsilon_A > 0.\ \exists \delta_A > 0.\ \forall x \in D.\ |x-x_0| < \delta_A \Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon_A$.

$$\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon_A \quad \cdot\, |\,|x-x_0|$$

$$\Leftrightarrow \quad |f(x)-f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)| < \varepsilon_A |x-x_0| \quad (1)$$

für $|x-x_0| < \delta_A$:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= |(f(x)-f(x_0)) - f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)| \\
&\leq |f(x)-f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)| + |f'(x_0)(x-x_0)| \\
&\overset{(1)}{<} \varepsilon_A |x-x_0| + |f'(x_0)(x-x_0)| \\
&= (\varepsilon_A + |f'(x_0)|)\cdot|x-x_0| \overset{!}{<} \varepsilon_S
\end{aligned}$$

mit $\delta_S = \min\left(\delta_A, \frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_A + f'(x_0)}\right)$ gilt somit

$$|x-x_0| < \delta_S \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_S$$

die Defn. der Stetigkeit bei x_0.

11.1. Die Ableitung: Definition und erste Folgerungen

(Satz, Ableitungsregeln, Skript 4.1.9)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f,g: D \to \mathbb{R}$, x_0 Häufungspunkt von D, f,g diffbar in x_0, so gilt

1) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

2) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Bem: Wichtige Ableitungen die ihr bereits gesehen habt

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$

$f(x) = x^n \qquad f'(x) = n\, x^{n-1}$

$f(x) = \ln(x) \qquad f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\begin{tikzcd} \sin(x) \arrow[r] & \cos(x) \arrow[d] \\ -\cos(x) \arrow[u] & -\sin(x) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Bsp. 11.1.1: Berechne $f'(x)$ von $f(x) = x^5 + 7x^3 + 2x + 3$

Lös: $f'(x) = 5x^4 + 21x^2 + 2$

Bsp. 11.1.2. Bestimme $f'(x)$ von $f(x) = x e^x$

Lös: Achtung: wir haben die Form $f_1(x) \cdot f_2(x)$ mit $f_1(x) = x$, $f_2(x) = e^x$, also

also $f'(x) = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x)$

$= 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x (1+x)$

Bsp. 11.1.3 Bestimme $f'(x)$ von $f(x) = \tan(x)$ (Tipp: $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$)

Lös: $f'(x) = \left(\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \dfrac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos(x)^2}$

$= \dfrac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} \overset{\sin^2 + \cos^2 = 1}{=} \dfrac{1}{\cos(x)^2}$

(Defn. Kettenregel, Skript 4.1.11)

Sei $D, E \subset \mathbb{R}$, $f: D \to E$, $g: E \to \mathbb{R}$, also $g \circ f: D \to \mathbb{R}$. Sei f in x_0 dillbar mit $y_0 = f(x_0)$ ein Häufungspunkt, so ist g in y_0 dillbar, es gilt:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Bsp 11.1.4: $f(x) = 3x$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \exp(x)$, $g: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$

also $g \circ f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$. $g \circ f = \exp(3x)$

Lös: $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$, $g'(x) = \exp(x)$, $f'(x) = 3$

$= \exp(3x) \cdot 3$

$= e^{3x} \cdot 3$

Bsp 11.1.5: $f(x) = 5x^3$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin(x)$, $g: \mathbb{R} \to [-1, 1]$

also $g \circ f: \mathbb{R} \to [0, 1]$, $(g \circ f)(x) = \sin(5x^3)$

Lös: $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ $\quad g'(x) = \cos(x)$, $f'(x) = 15x^2$

$= \cos(5x^3) \cdot 15x^2$

(Korollar, Umkehrsatz, Skript 4.1.12)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \to E$, bijektiv, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt. Sei f zudem in x_0 dillbar, $f^{-1}: E \to D$ bei $y_0 = f(x_0)$ stetig. So ist y_0 ein Häufungspunkt von E, d.h. f^{-1} bei y_0 dillbar. Es gilt

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Bsp. 11.1.6: Mit $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = e^x$, berechne Ableitung von $f^{-1}: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log(x)$

Lös: Wir haben bereits gesehen, dass f bijektiv ist auf $\mathbb{R} \to (0, +\infty)$

(injektiv da $f(x) = e^x \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$, surjektiv da $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$)

Sei nun $f(x) = y = e^x \Rightarrow x = \log(y) = f^{-1}(y)$, und $f'(x) = y' = e^x$

$$\text{also } (f^{-1}(y))' \overset{\text{Satz}}{=} \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \overset{f^{-1}(y)=\log(y)}{=} \frac{1}{f'(\log(y))}$$

$$\overset{f'(x)=e^x}{=} \frac{1}{\exp(\log(y))}$$

$$= \frac{1}{y}$$

Bsp. 11.1.7: Sei $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$, $f(x) = \sin(x)$, berechne Ableitung von $f^{-1}: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$ [Tipp: $\cos^2 + \sin^2 = 1$]

Lös: (Zeige, dass f bijektiv)

$f(x) = y = \sin(x) \Rightarrow x = \arcsin(y) = f^{-1}(y)$, $f'(x) = \cos(x)$

$$\text{also } (f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(\arcsin(y))}$$

$$= \frac{1}{\cos(\arcsin(y))}$$

$$\overset{\sin^2+\cos^2=1}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\sin(\arcsin(y))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Bsp. 11.1.8: Sei $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Angenommen: i) $f(x)^2 - g(x)^2 = 1$ ii) $f' = g$, $g' = f$

iii) g bijektiv

Zeige die Ableitung von g^{-1}

$$\textbf{Lös:}\quad (g^{-1}(y))' = \frac{1}{g'(g^{-1}(y))} \overset{g'=f}{=} \frac{1}{f(g^{-1}(y))}$$

$$\overset{(f^2-g^2=1)}{=} \frac{1}{\sqrt{1+g(g^{-1}(y))^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

11.2. Zentrale Sätze: Satz von Rolle, Mittelwertsatz

(Satz: Maximum und Minimum, Skript 4.2.2)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$ und f in x_0 diffbar, so gilt

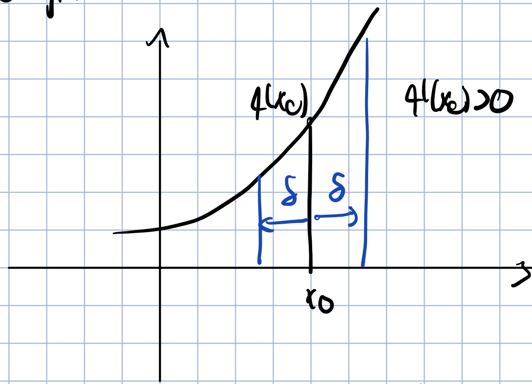
i) Falls

$$f'(x_0)>0$$

dann gibt es $\delta>0$ sodass

$$f(x_0)<f(x) \qquad \forall x\in(x_0,x_0+\delta)$$

$$f(x_0)>f(x) \qquad \forall x\in(x_0-\delta,x_0)$$



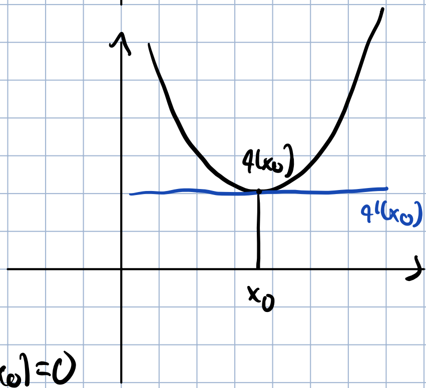
ii) Falls

$$f'(x_0)<0$$

dann gibt es $\delta>0$ sodass

$$f(x_0)>f(x) \qquad \forall x\in(x_0,x_0+\delta)$$

$$f(x_0)<f(x) \qquad \forall x\in(x_0-\delta,x_0)$$



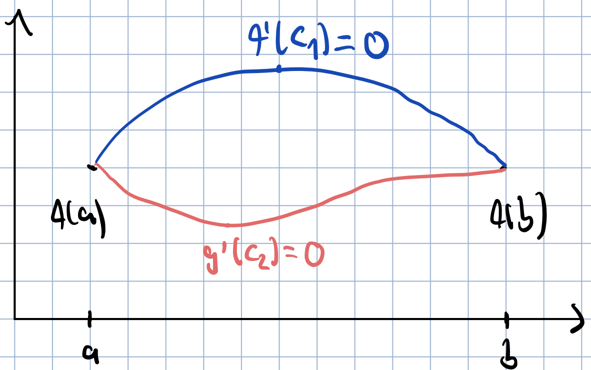
iii) Falls f in x_0 ein lokales Extremum hat, gilt $f'(x_0)=0$

(Satz von Rolle, Skript 4.2.3)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und in (a,b) diffbar.

Gilt $f(a)=f(b)$, dann ex. ein $c\in(a,b)$, mit

$$f'(c)=0$$

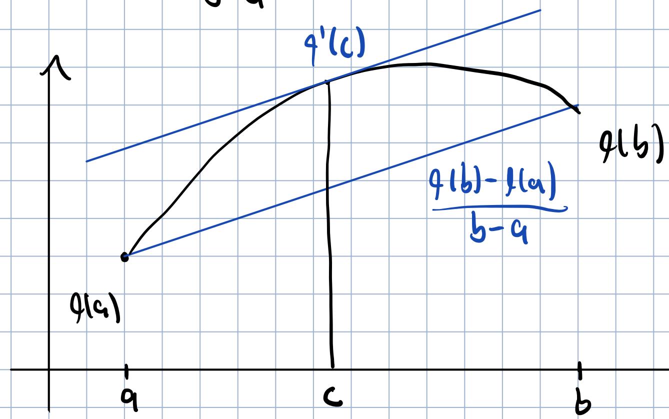


Bem: Intuitiv, wenn f und g stetig sind (also keine Sprung- oder unendlichkeitsstellen besitzen), sind sie "gezwungen" ein lokales Extremum anzunehmen.

(Mittelwertsatz / Lagrange Skript 4.2.4)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und in (a,b) diffbar, dann existiert ein $c\in(a,b)$ mit

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Bem: Intuitiv: Es gibt eine Ableitung an einem Punkt, die genau durch die Tangentensteigung des Funktionsgraphens gegeben ist.

Beweis: Sei $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, auf (a,b) diffbar

Sei $g(x):=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$ für $x\in[a,b]$, dann gilt

$$g(a)=g(b)=f(a)\quad\left\{\begin{array}{l} g(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\underbrace{(a-a)}_{=0}=f(a)\\ g(b)=f(b)-\frac{(f(b)-f(a))}{\cancel{b-a}}\cancel{(b-a)}=f(b)-(f(b)-f(a))=f(a)\end{array}\right.$$

Da $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, diffbar auf (a,b) und $g(a)=g(b)$ ex. nach Satz von Rolle ein $c\in(a,b)$, sodass

$$g'(c)=0,\qquad \text{mit } g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

folgt

$$g'(c)=0=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Bsp. 11.2.1: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, auf (a,b) diffbar. Beweise:

$$\forall x\in(a,b).\ f'(x)=0\Rightarrow f(x) \text{ konstant auf } (a,b)$$

Lös: Seien $x_1,x_2\in(a,b)$ beliebig, wende MWS an (da f stetig und auf (x_1,x_2) diffbar).

Es muss ein c geben, sodass

$$f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

aber nach Voraussetzung ($\forall x \in (a,b)$. $f'(x)=0$), also insb. $f'(c)=0$, also

$$0 = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$$

für $x_1, x_2 \in (a,b)$ beliebig, muss f auf (a,b) konstant sein.

Bsp. 11.2.2.: Beweise $|\sin(a) - \sin(b)| \leq |a-b|$

Lös: Sei $f(x) = \sin(x)$, wende MWS an (da f auf ganz $\mathbb{R}$ diffbar), wobei $a,b \in \mathbb{R}$ beliebig: so muss ein $c \in (a,b)$ existieren, sodass gilt

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

offenbar gilt $f'(x) = \cos(x)$, d.h. $|f'(x)| \leq 1$, also

$$|f'(c)| = \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| = \frac{|f(b)-f(a)|}{|b-a|} = \frac{|f(a)-f(b)|}{|a-b|}$$

also

$$|f'(c)| \leq 1 \Rightarrow \frac{|\sin(a) - \sin(b)|}{|a-b|} \leq 1 \Rightarrow |\sin(a) - \sin(b)| \leq |a-b|$$