Ana1 Exercise Session 12

(12.0. TA Evaluation: shamless plug)

12.1. Mittelwertsatz Recap: Examsaufgabe

12.2 Ableitung und Grenzwerte: Satz von L'Hôspital

12.3. Höhere Ableitungen: Monotonie, Konvexität, Kochrezept Extrema

12.4. Taylorapproximation

12.1. Mittelwertsatz Recap: Examsaufgabe

(Mittelwertsatz / Lagrange, Skript 4.2.4)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) diffbar, dann existiert ein $c \in (a,b)$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(FS22)

Bsp 12.1. $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, mit $f(0)=0$, $f(1)=1$, f diffbar

a) Definiere g als

$$g: [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = \arctan(f(x))$$

Begründen Sie warum auch $g(x)$ diffbar ist und bestimmen Sie $g(0)$, $g(1)$ sowie die Ableitung g' (Tipp: $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$)

b) Zeigen Sie, dass

$$\exists c \in [0,1]: \; f'(c) = \frac{\pi}{4}\left(1+f(c)^2\right)$$

Hinweis: Benutzen Sie den Mittelwertsatz und a)

Lös a) $g(x)$ ist diffbar nach Annahme, arctan nach Skript. Die Komposition diffbarer Funktionen ist diffbar (nach Kettenregel)

$$f(x) = y = \tan(x) \Rightarrow x = \arctan(y), \quad f'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(\arctan(y))}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos(\arctan(y))^2}\right)}$$

$$= \cos(\arctan(y))^2$$

$$= \left(\sqrt{\frac{1}{(\tan(\arctan(y)))^2+1}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{}$$

Es gilt $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$

$$\Rightarrow \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} + 1 = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

$$\Rightarrow \tan(x)^2 + 1 = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

$$\Rightarrow \cos(x) = \sqrt{\frac{1}{\tan(x)^2+1}} \quad = \quad 1+y^2$$

also $h(x) = \arctan(x)$, mit $h'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Daher gilt nach Kettenregel mit $h(x) = \arctan(x)$,

$$g(x) = h(f(x)), \quad g'(x) = h'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$= \frac{1}{1+f(x)^2} \cdot f'(x)$$

$$= \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$$

Lös b) g ist dillbar (nach A), nach MWS muss also hier ein $c \in (0,1)$ existieren, sodass

$$g'(c) = \frac{g(1)-g(0)}{1-0}$$

In a) haben wir gezeigt

$$g'(c) = \frac{f'(c)}{1+f(c)^2}$$

also $g'(c) = \frac{f'(c)}{1+f(c)^2} = \frac{g(1)-g(0)}{1-0} = g(1)-g(0)$

$f(1) = 1$, $f(0) = 0$ gegeben

$$= \arctan(f(1)) - \arctan(f(0))$$

$$= \arctan(1) - \arctan(0)$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(c)}{1+f(c)^2} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow f'(c) = \frac{\pi}{4}(1+f(c)^2)$$

Also wenn gilt $\exists c \in (0,1).\ f'(c) = \frac{\pi}{4}(1+f(c)^2) \Rightarrow \exists c \in [0,1].\ f'(c) = \frac{\pi}{4}(1+f(c)^2)$. qed

11.3 Ableitung und Grenzwerte: Satz von L'Hôspital

Einführung: L'hôspital

Bis jetzt hatten wir Ausdrücke wie

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

die Problematisch waren (hier bspw "$\frac{0}{0}$"), bis jetzt haben wir einfache direkte Möglichkeiten zum lösen gesehen, basierend auf Umformungen

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

(bspw. Dominanz, Sandwich Theorem, Wurzeltrick, Variablenwechsel).

Jetzt: weiteres Kriterium basierend auf der Ableitung

(Satz L'hospital, Skript 4.2.10)

Seien $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ diffbar ($g'(x)\neq 0 \;\forall x\in(a,b)$), falls

$$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = +\infty$$

so gilt

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls der Grenzwert existiert (d.h. $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$ existiert)

Bem: Im Skript ist nur der Fall $\lim_{x\to b} f(x), g(x) = 0$ definiert, der Fall $\lim_{x\to b} f(x), g(x) = +\infty$ folgt daraus direkt (Reziprokes der Funktion)

Bsp 11.3.1. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{x}$

Lös: Form "$\frac{0}{0}$", nach l'hop gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\overbrace{\boxed{e^{-x}}}^{\to 1}}{1} = -1$$

Bsp. 11.3.2 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}}$

Lös: Form "$\frac{0}{0}$", nach l'hop gilt

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1\cdot\overbrace{\boxed{\cos(x)}}^{\to 0} + x\cdot\overbrace{\boxed{(-\sin(x))}}^{\to -1}}{1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} -x = \frac{-\pi}{2}$$

Bsp 11.3.3: $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\log(x)$ [Vgl. Beispiel bei Substitution]

Lös: Problem: "$0\cdot\infty$", können aber nur "$\frac{0}{0}$" oder "$\frac{\infty}{\infty}$" berechnen, stelle um:

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^+} x\log(x)}_{\text{"}0\cdot\infty\text{"}} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{\log(x)}{\frac{1}{x}}}_{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

Bsp. 11.3.4 (FS18): $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin(\sqrt{1+t}-1)}{t}$

Lös: Form "$\frac{0}{0}$", nach l'hop

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(\sqrt{1+t}-1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos(\sqrt{1+t}-1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+t}}}{1}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cos(\sqrt{1+t}-1)}{2\sqrt{1+t}} = \frac{\overbrace{\boxed{\cos(0)}}^{=1}}{2} = \frac{1}{2}$$

Bsp. 11.3.5 (FS18): $\lim\limits_{t\to 0} \frac{a^t-1}{b^t-1}$, $a,b>0$ konstant

Lös: Form "$\frac{0}{0}$", nach l'hop gilt

$$\lim_{t\to 0} \frac{a^t-1}{b^t-1} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{t\cdot\log(a)}-1}{e^{t\log(b)}-1} = \lim_{t\to 0} \frac{\log(a)\cdot\overbrace{\boxed{e^{t\log(a)}}}^{\to 1}}{\log(b)\cdot\underbrace{\boxed{e^{t\log(b)}}}_{\to 1}}$$

$$= \frac{\log(a)}{\log(b)}$$

Bsp. 11.3.6 (HS18): $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$

Lös: Form "$\frac{0}{0}$", l'hop

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} \overset{\text{l'hop}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2x} \overset{\text{l'hop}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\boxed{-\cos(x)}}^{\to -1}}{2} = -\frac{1}{2}$$

12.3 Höhere Ableitungen

(Defn. Höhere Ableitungen, Skript 4.3.1)

Sei $D \subset \mathbb{R}$ offen, $f: D \to \mathbb{R}$ diffbar in D, sei $f^{(1)} = f'$ die Ableitung von f

(1) f ist n-mal auf D diffbar, falls $f^{(n-1)}$ auf D diffbar, wir nennen $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ die n-te Ableitung von f.

(2) f ist n-mal stetig diffbar in D, falls sie n-mal diffbar ist und $f^{(n)}$ in D stetig. Wir schreiben $f \in C^n(D)$

(3) f ist glatt, falls für alle $n \geq 1$, f n-mal diffbar ist. Wir schreiben $f \in C^{\infty}(D)$

Bem: Der Raum C^n ist ein Vektorraum für alle $n \geq 1$

Bem: Nicht alle Funktionen sind glatt. bspw.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \quad \text{, damit} \quad f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

$f'(x)$ ist unstetig in 0, da der Graph in der Nähe von Null eine periodische Funktion mit "unendlich grosser Frequenz" ist.

Bem: exp, sin, cos, Polynome sind Glatt auf $\mathbb{R}$. Kompositionen, Addition, Multiplikation von glatten Funktionen sind Glatt

(Strenge Monotonie und Konvexe Funktionen)

Sei $D \subset \mathbb{R}$ offen, $f: D \to \mathbb{R}$ diffbar auf D, so gilt

1) Monoton wachsend: $\forall a,b \in D.\ a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b) \iff \forall x \in D.\ f'(x) \geq 0$

2) Streng monoton wachsend: $\forall a,b \in D.\ a < b \Rightarrow f(a) < f(b) \Leftarrow \forall x \in D.\ f'(x) > 0$

3) Monoton fallend: $\forall a,b \in D.\ a \geq b \Rightarrow f(a) \geq f(b) \iff \forall x \in D.\ f'(x) \leq 0$

4) Streng monoton fallend: $\forall a,b \in D.\ a > b \Rightarrow f(a) > f(b) \Leftarrow \forall x \in D.\ f'(x) < 0$

Bem: Streng monotone Funktionen sind immer injektiv, da aus ihrer Definition direkt folgt $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$, die Definition der Injektivität

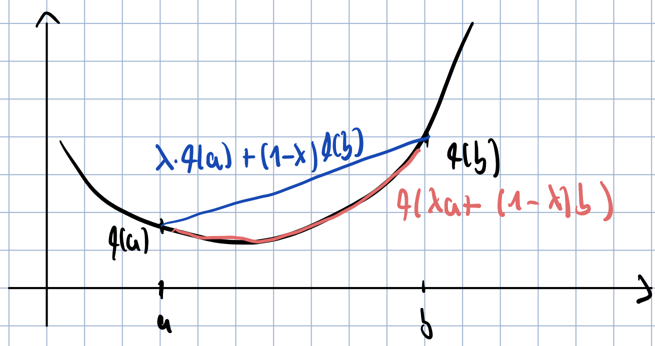
(Definition Konvexität, Skript 4.2.13)

Sei $D \subset \mathbb{R}$ offen, $f: D \to \mathbb{R}$ so gilt

1) (Streng) Konvex auf D, falls $\forall a,b \in D$, $a \leq b$ gilt

$$f(\lambda a + (1-\lambda) b) \quad (<) \leq \quad \lambda \cdot f(a) + (1-\lambda) \cdot f(b), \quad \lambda \in [0,1]$$

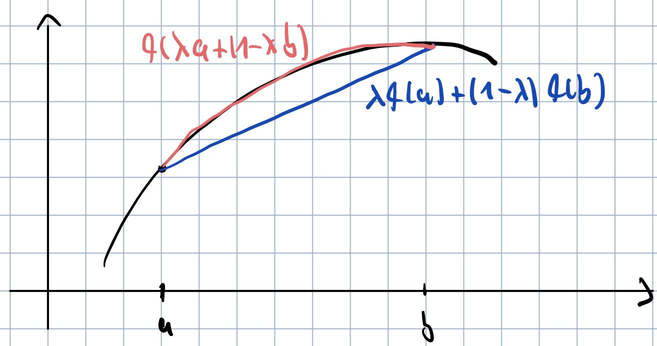
d.h. wenn für beliebige zwei Punkte $a,b \in D$, die die Punkte verbindende Gerade über der Funktion liegt.



1) (Streng) Konkav auf D, falls $\forall a,b \in D$, $a \leq b$ gilt

$$f(\lambda a + (1-\lambda) b) \quad (>) \geq \quad \lambda \cdot f(a) + (1-\lambda) \cdot f(b), \quad \lambda \in [0,1]$$

d.h. wenn für beliebige zwei Punkte $a,b \in D$, die die Punkte verbindende Gerade unter der Funktion liegt.



(Korollar Konvexität, Skript 4.2.17).

Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal diffbar auf (a,b), so gilt

1) f konvex $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$

2) f streng konvex $\Leftrightarrow$ $f''(x) > 0$

3) f konkav $\Leftrightarrow$ $f''(x) \leq 0$

4) f streng konkav $\Leftrightarrow$ $f''(x) < 0$

(Kochrezept: Extremwertaufgaben)

1. Notwendige Bedingung

Wenn f an der Stelle x_0 ein Extremum hat, so muss gelten

$$f'(x_0) = 0$$

überprüfe also f' auf potentielle Extrema, via $f'(x)=0$.

Bem: Dies ist eine notwendig, aber keine hinreichende Bedingung, d.h.

"f Extremum in $x_0 \Rightarrow f'(x_0)=0$"

$$\not\Leftarrow$$

2. Hinreichende Bedingung

Wenn $f \in C^2(D)$, und $f'(x_0)=0$, überprüfe mittels $f''(x)$ auf min, max:

- Maximum: wenn f streng konkav ist, d.h. $f''(x) < 0$
- Minimum: wenn f streng konvex ist, d.h. $f''(x) > 0$
- Falls $f''(x)=0$: überprüfe mittels Vorzeichenwechsel (VZW), d.h. mit einem

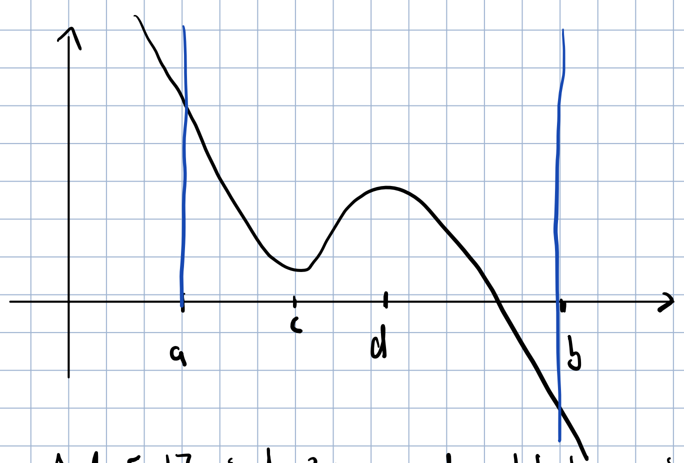
$\delta > 0$: $f'(x_0-\delta) < 0$, $f'(x_0+\delta) > 0$: lokales Minimum

$f'(x_0-\delta) > 0$, $f'(x_0+\delta) < 0$: lokales Maxium

sonst: keine Extremstelle (sondern Sattelpunkt)

3. Randwertbetrachtung (auf kompakten Intervallen)

Sollen ausschliesslich globale Extrema gefunden werden, und der Definitionsbereich D (von $f: D \to \mathbb{R}$) hat Randwerte, so überprüfe f dort.



$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

Bem: Auf $[a,b]$ sind zwar c, d lokale minima bzw. maxima, aber a, b sind die globalen Extrema. (Achtung: a, b lassen sich nicht durch $f'(x)=0$ finden).

Bsp. 12.3.1. (#S21): Sei $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\ln(x)}$

Bestimme alle Extrema und bestimme ob es sich dabei um lokale (resp. globale) Maxima oder Minima handelt.

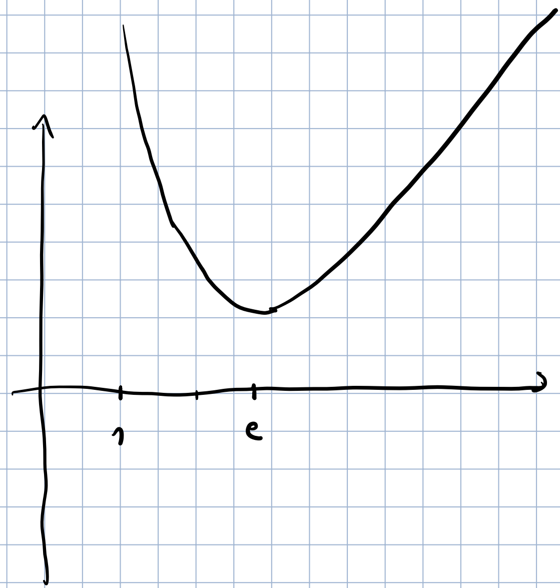
Lös: Schritt 1: Finde Extrema: $f'(x)=0$

$$f'(x)=\frac{1\cdot\ln(x)-x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}=\frac{\ln(x)-1}{\ln(x)^2}$$

$$f'(x)\overset{!}{=}0 \iff \frac{\ln(x)-1}{\ln(x)^2}=0$$

$$\Rightarrow \ln(x)=1$$

$$\Rightarrow x=e$$



Einziger Kandidat $x_0=e$, offenbar gilt

- $f'<0$ auf $(1,e)$ (strikt monoton fallend)
- $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{\overset{\to1}{\boxed{x}}}{\underset{\to0}{\ln(x)}}=+\infty$
- $f'>0$ auf $(e,+\infty)$ (strikt monoton wachsend)
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\ln(x)}\underset{\uparrow}{=}+\infty$

  Dominanz

also muss $x_0=e$ lokales Minimum sein

Bem: Das es sich um ein Minimum handelt hätte man zeigen können, dass f konvex ist d.h. $f''(e)>0$

$$f''(x)=\frac{2-\ln(x)}{\ln(x)^3\,x},\quad f''(e)=\frac{2-1}{e}>0 \quad ($$

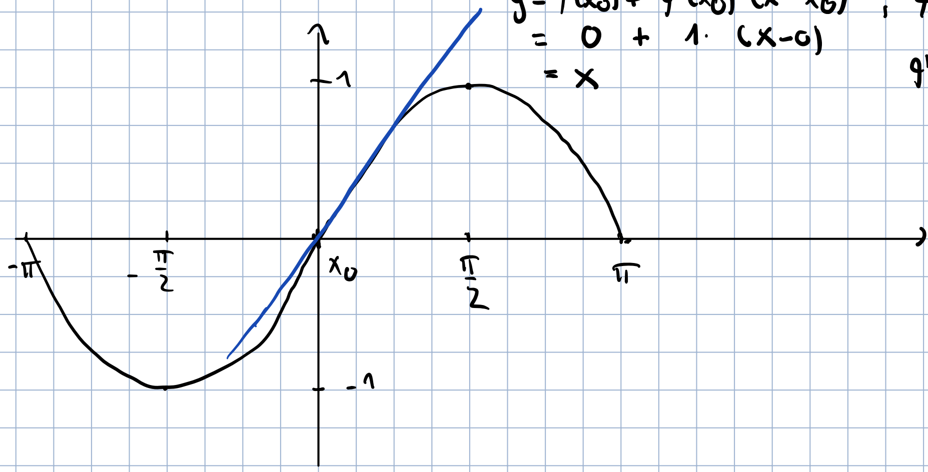
aber für Entscheidung ob globales Minimum oder lokal muss die Grenzwertbetrachtung (vgl. oben) dennoch gemacht werden

12.4. Taylor Approximation

Einführung in Taylorreihen

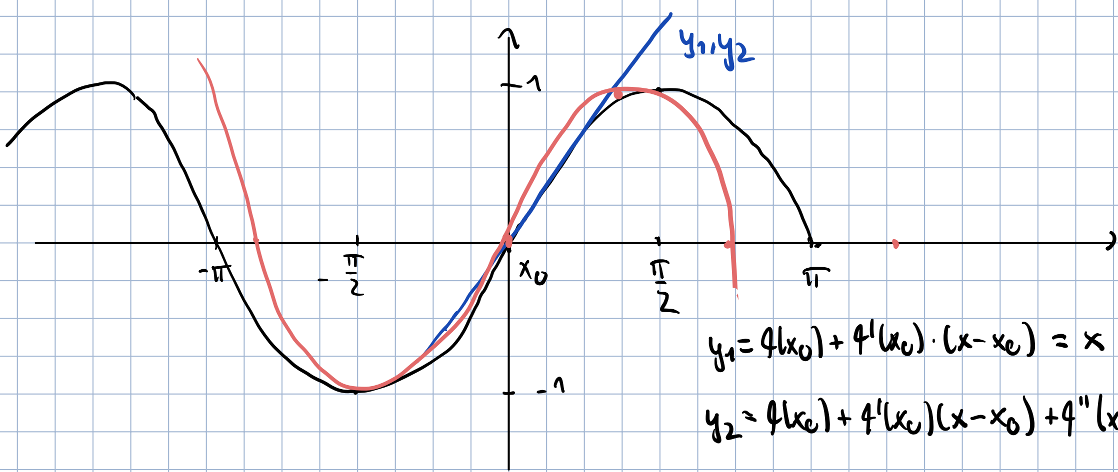
- Die Ableitung gibt die Steigung der Tangente am Punkt x_0 an, die Formel für die gesamte Tangente lautete

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) \quad , \quad f(x) = \sin(x)$$
$$= 0 + 1\cdot(x-0) \qquad f'(x) = \cos(x)$$
$$= x$$



- Wir haben gesagt: dies ist die beste lineare Approximation von f
- Idee: Benutze Polynome höheren Grades $(n\geq 2)$ für Approximation der Funktion an einem Punkt

$$f(x) = \sin(x)$$
$$f'(x) = \cos(x)$$
$$f''(x) = -\sin(x)$$
$$f'''(x) = -\cos(x)$$



$$y_1 = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) = x$$
$$y_2 = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2}$$
$$= 0 + 1\cdot(x-0) + 0\cdot\frac{(x-0)^2}{2} = x$$
$$y_3 = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$
$$+ f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}$$
$$+ f'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{6} = x - \frac{x^3}{6}$$

- Offenbar approximiert unsere Approximation höheren Grades besser, aber nur lokal um x_0. Es gibt aber einen Fehler (wie bei der Ableitung), wir erwarten aber das der Fehler bei x_0 gegen 0 strebt.

(Satz, Taylorapproximation, Skript 4.4.6)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, auf (a,b) $(n+1)$-mal diffbar, so gilt

es existiert ein $S\in(a,b)$ mit

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\cdot(x-a)^k+\left(\frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right)$$

$$=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)\cdot\frac{(x-a)^2}{2}+f'''(a)\cdot\frac{(x-a)^3}{6}+\dots f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

$$+\left(\frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right)$$

Bem: Die Stelle a heisst "Entwicklungspunkt"

Bem: Der letzte Term ist der Fehler der Approximation. Wie oben erwaehnt geht der Fehlerterm bei x_0 gegen 0 (für unsere Approx. n-ter Ordnung)

$$\frac{\text{Fehler}}{(x-a)^n}=\frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}\cdot\frac{(x-a)^{n+1}}{(x-a)^n}=\frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}\cdot(x-a)$$

also $$\lim_{x\to a}\frac{\text{Fehler}}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\underbrace{\left|\frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}\right|}_{\in\mathbb{R}}\cdot\underbrace{|(x-a)|}_{\to 0}=0$$

Bem: Wir können glatte Funktionen beliebig genau durch die Taylorapproximation approximieren (je höher der Grad des Taylorpolynoms desto besser die Abschätzung)

(Korollar, Abschätzung des Fehlerterms, Vorlesung 12.5.)

Wir können den Fehler Abschätzen, es gilt

$$|R_n(f,x,a)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(s)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right|\le\sup_{a<c<x}\left(\left|f^{(n+1)}(c)\right|\cdot\left|\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right|\right)$$

Bsp. 12.4.1. Bestimme Taylorapprox: n-ter Ordn. $f(x)=e^x$, Entwicklungsstelle: $a=0$

$$T_1(x) = f(0) + f'(0)\cdot(x-0) = 1+x$$

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)\cdot(x-0) + f''(0)\cdot\frac{(x-0)^2}{2!} = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$\vdots$

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n}$$

Bsp. 12.4.2. Bestimme Taylorapprox. n-ter Ordnung $f(x)=\cos(x)$, Entwicklg: $a=0$

Lös: $f(x)=\cos(x)$, $f(0)=1$, Erinnerung

$$\begin{array}{ccc} \sin & \rightarrow & \cos \\ \uparrow & & \downarrow \\ -\cos & \leftarrow & -\sin \end{array}$$

$f'(x) = -\sin(x)$, $f'(0)=0$

$f''(x) = -\cos(x)$, $f''(0) = -1$

$f'''(x) = -\sin(x)$, $f'''(0) = 0$

$\vdots$

Offenbar fallen alle "ungeraden" Ableitungen weg. Für die "geraden" Ableitungen alterniert das Vorzeichen

$$T_n(x) = \underbrace{\boxed{f(0)}}_{=1} + \underbrace{\boxed{f'(0)}}_{=0}(x-0) + \underbrace{f''(0)}_{=-1}\frac{(x-0)^2}{2!} + \underbrace{f'''(0)}_{=0}\frac{(x-0)^3}{3!} + \underbrace{f''''(x)}_{=1}\frac{(x-0)^4}{4!} + \ldots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

(Defn. Taylorreihe)

Sei $D\subset\mathbb{R}$, $f: D\to\mathbb{R}$, und an der Entwicklungsstelle a gilt $f\in C^\infty(D)$, so nennen wir

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\cdot\frac{(x-a)^n}{n!}$$

die Taylorreihe von f am Entwicklungspunkt a.

Bem: Mit der Taylorreihe können wir Funktion exakt darstellen (solang die Reihe konvergiert, d.h. auf ihrem Konvergenzradius)

Bem: Taylorapprox. ist die Summe der ersten n-Glieder der Taylorreihe

(Substitution für die Taylorapproximation)

Da die Taylorreihe selbst wieder nur eine Potenzreihendarstellung ist, können wir die Potenzreihendarstellung von exp, sin, cos für unsere Taylor approx. benutzen, FALLS entwicklungsstelle $a=0$.

Bsp 12.4.3. Bestimme Taylorapprox. beliebiger Ordnung (i.e. Taylorreihe) von

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Lös: In der VL haben wir gesehen: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$

substituieren x mit $(-x^2)$ so gilt

$$\frac{1}{1-x} \text{ wird zu } \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

Bsp 12.4.4 (FS22): Sei $f(x) = x \cdot \cos(x^3)$. Die Taylorentwicklung von f mit Entwicklungsstelle 0 bis zur 3. Ordnung ist

$$\sum_{n=0}^{3} \alpha_n \cdot x^n + f^{(4)}(s) \cdot \frac{x^4}{4!}$$

Berechnen sie α_3

Lös: $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^4)$

also $\cos(x^3) = 1 - \frac{(x^3)^2}{2} + o((x^3)^4)$

also $x \cdot \cos(x^3) = x - \frac{x^7}{2} + o(x^{13}) = \underbrace{\boxed{\alpha_0}}_{=0} \cdot x^0 + \underbrace{\boxed{\alpha_1}}_{=1} x^1 + \underbrace{\boxed{\alpha_2}}_{=0} x^2 + \underbrace{\boxed{\alpha_3}}_{=0} x^3 + \dots + \underbrace{\boxed{\alpha_7}}_{=1/2} \cdot x^7 + \dots$

also muss der koeff von x^3 $\alpha_3 = 0$ sein

Bsp 12.4.6 (HS20): Das Taylorpolynom 3. Ordnung mit Restglied der Funktion $f(x) = \exp(x^2+1)$ auf $[0,1]$ um den Punkt $x=0$ sei gegeben durch

$$f(x) = \sum_{n=0}^{3} \alpha_n x^n + \frac{f^{(4)}(s)}{24} \cdot x^4 \quad \text{für geeignetes } s \in (0,1)$$

Bestimme α_2 ohne Begründung

Lös: Vorsichtig! Substitution funktioniert hier nicht, da die resultierende Taylorreihe $\left(\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right.$, also $\left. \exp(x^2+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2+1)^n}{n!} \right)$ NICHT von der gegebenen Form ist $\left(\sum_{n=0}^{3} \alpha_n \cdot x^n \right)$ Wir müssen den direkten Weg gehen,

$f(x) = e^{x^2+1}$, $f'(x) = 2x e^{x^2+1}$, $f''(x) = 2e^{x^2+1} + 4x^2 e^{x^2+1}$

$$\Rightarrow f''(0) = 2 \cdot e^{0^2+1} + 4 \cdot 0^2 \cdot e^{0^2+1}$$

$$= 2e$$

also $\alpha_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{2e}{2!} = e$