Ana1 Exercise Session 13

13.1. Einführung in die Integralrechnung

13.2. Unbestimmte Integrale

- 13.2.1. Fundamentalintegrale
- 13.2.2. Kettenregel Integral
- 13.2.3. Produktregel Integral (Partielle Integration)
- 13.2.4. Substitution
- 13.2.5. Partialbruchzerlegung

13.3. Bestimmte Integrale, zentrale Sätze

13.4. Uneigentliche Integrale

Abschluss: Tipps für die Examsphase

13.1. Einführung in die Integralrechnung: Zentrale Sätze

(Satz, Integrabilitätsbedingung, Skript 5.2.7)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, dann ist f integrierbar.

(Satz, Alternative Integrabilitätsbedingung, Skript 5.2.8)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton, dann ist f integrabel.

(Definition, Stammfunktion)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine Funktion. F heisst Stammfunktion von f, falls

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{für alle } x\in[a,b]$$

gilt.

Bem: Da gilt $(F(x)+C)' = (F(x))' = f(x)$, trägt F immer eine Integrationskonst. C

Bem: Nur weil f intbar ist, impliziert dies noch nicht, das auch eine Stammfunktion existieren muss

(Definition, Fundamentalsatz der Differentialrechnung, Skript 5.4.3)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, F ihre Stammfunktion, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

(Definition, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Skript 5.4.1)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Definiere F für $a\le x\le b$ als

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

so ist $F(x)$ eine Stammfunktion von f, es gilt $F'(x)=f(x)$.

13.2. Unbestimmte Integrale

Einführung in unbestimmte Integral

- Gegeben sei eine stetige Funktion f. Wir suchen F für die gilt

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

- Achtung: Jede Stammfunktion trägt die Integrationskonstante $C \in \mathbb{R}$ mit sich

13.2.1. Fundamentalintegrale

Idee Fundamentalintegrale

- Integrale, bei der die Umkehrung zur Ableitung offenbar ist

$f(x)$	$F(x)$	
x^n	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$	$(n \neq -1)$
e^x	$e^x + C$	
$\frac{1}{x}$	$\log(x) + C$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$	
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$	

Bem: Für sin, cos gilt die Umkehrung des Ableitungskreises (mit Int Konstante $C \in \mathbb{R}$)

Ableiten

$$\begin{tikzcd} \sin \arrow[r] & \cos \arrow[d] \\ -\cos \arrow[u] & -\sin \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Integrieren (mit $+C$)

$$\begin{tikzcd} \sin \arrow[d] & \cos \arrow[l] \\ -\cos \arrow[r] & -\sin \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Bsp. 13.2.1.1. Bestimme $\int \frac{1}{1+x^2} + x^5 + 42 \cdot \cos(x)\,dx$

Lös: $\int \frac{1}{1+x^2} + x^5 + 42\cos(x)\,dx$

$$\overset{\text{Lin}}{=} \int \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int x^5\,dx + 42 \int \cos(x)\,dx$$

$$= \arctan(x) + \frac{1}{6}x^6 + 42 \cdot \sin(x) + C$$

13.2.2. Kettenregel Integral

Idee Kettenregel Integrale

Haben wir die Form

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx$$

gegeben, gilt nach Kettenregel ableiten

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = F(g(x)) + C$$

da für $(F(g(x)))' = f(g(x)) \cdot g'(x)$

Bsp 13.2.2.1. Bestimme $\int \frac{1}{x \log(x)}$ $\qquad [F(g(x))]$

Lös: $\int \frac{1}{x \log(x)} = \int \frac{1}{\log(x)} \cdot \frac{1}{x} = \log(|\log(x)|) + C$

$[f(g(x)) \cdot g'(x)]$, mit $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \log(x)$, $g'(x) = \frac{1}{x}$

Bsp. 13.2.2.2. Bestimme $\int \frac{e^x}{e^x+1}$

Lös: $\int \frac{e^x}{e^x+1} = \int \frac{1}{e^x+1} \cdot e^x = \log(|e^x+1|) + C$

$[f(g(x)) \cdot g'(x)]$, mit $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = e^x + 1$, $g'(x) = e^x$

13.2.3. Produktregel Integral (Partielle Integration)

Idee Produktregel Integral (Skript 5.4.5 mit unbestimmten Integralen)

Haben wir die Form

$$\int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

gegeben, gilt nach Produktregel

$$\int f'(x)\cdot g(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

da gilt $(f\cdot g)' = f'\cdot g + g'\cdot f$

$$\Leftrightarrow \int (f\cdot g)' = \int f'\cdot g + g'\cdot f$$

$$\Leftrightarrow f\cdot g = \int f'\cdot g + \int g'\cdot f$$

$$\Leftrightarrow \int f'\cdot g = f\cdot g - \int g'\cdot f$$

Bem: · Wir versuchen F als $f'\cdot g$ zu schreiben, dabei integrieren wir f ($\uparrow$) und differenzieren wir g ($\downarrow$)

Bem: 1. Allg (nicht IMMER!): "$\downarrow$" Polynome

"$\uparrow$" wiederholende Funktionen (sin, cos, exp)

Bem: Manchmal künstlich mit 1 multiplizieren

Bem: Wenn wir durch mehrfache part. Integration zum ursprünglichen Integral gelangen haben wir eine Gleichung die wir lösen können

Bsp 13.2.3.1 Bestimme $\int x e^x dx$

Lös: $$\int \underset{\substack{\downarrow\\ g}}{x}\ \underset{\substack{\uparrow\\ f'}}{e^x}\,dx = \underbrace{xe^x}_{g\cdot f} - \int \underbrace{1\cdot e^x}_{g'\cdot f}\,dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1)+C$$

Bsp. 13.2.3.2. Bestimme $\int \log(x)\,dx$

Lös: $$\int \log(x)\,dx = \int \underset{f'}{1}\cdot \underset{g}{\log(x)}\,dx = \underbrace{x\log(x)}_{f\cdot g} - \int \underbrace{x\cdot\frac{1}{x}}_{f\cdot g'}\,dx = x\log(x) - x + C$$

Bsp. 13.2.3.3. Bestimme $\int \cos(x)^2\, dx$

Lös: $$\int \underset{\uparrow}{\cos(x)}\cdot \underset{\downarrow}{\cos(x)} = \sin(x)\cdot\cos(x) - \int \sin(x)\cdot(-\sin(x))\,dx$$

$$= \sin(x)\cdot\cos(x) + \int \sin(x)\cdot\sin(x)\,dx$$

$\sin^2 + \cos^2 = 1$

$$\overset{\sin^2+\cos^2=1}{=} \sin(x) \cdot \cos(x) + \int 1 - \cos(x)^2 \, dx$$

$$\overset{\text{lin.}}{=} \sin(x)\cos(x) + \int 1 \, dx - \int \cos(x)^2 \, dx$$

$$= \sin(x)\cos(x) + x - \int \cos(x)^2 \, dx$$

Ursprüngliches Integral erhalten auf RHS, dies ergibt eine Gleichung

$$\int \cos(x)^2 \, dx = \sin(x)\cos(x) + x - \int \cos(x)^2 \, dx \quad \Big| + \int \cos(x)^2 \, dx$$

$$\Rightarrow 2 \int \cos(x)^2 \, dx = \sin(x)\cos(x) + x$$

$$\Rightarrow \int \cos(x)^2 \, dx = \frac{\sin(x)\cos(x) + x}{2}$$

13.2.4. Substitution

Idee Substitution (Skript 5.4.6 mit unbestimmten Integralen)

Haben wir die Form

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx$$

gegeben, gilt nach Kettenregel mit $y = g(x) \Rightarrow x = g^{-1}(y)$

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(y)\,dy$$

da nach der Kettenregel gilt

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\Rightarrow \int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) = F(y) = \int f(y)\,dy$$

Bem: Mit $y = g(x)$ gilt $\frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx} g(x) = g'(x)$

$$\Leftrightarrow dy = g'(x)\,dx \Leftrightarrow dx = \frac{dy}{g'(x)}$$

D.h. ihr sucht eine Substitution (bspw. $y = x^2$), sodass wenn ihr mit dem Reziproken der Ableitung multipliziert (hier: $\frac{1}{y'} = \frac{1}{(x^2)'} = \frac{1}{2x}$) sich der Term vereinfacht (bspw. $2x\sin(x^2)\,dx$, $y = x^2$: $\boxed{2x} \cdot \sin(y) \cdot \boxed{\frac{1}{2x}} \cdot dy = \sin(y)\,dy$)

Bem: Für bestimmte Integrale (d.h. Integrale auf einem gegebenen Intervall) gilt:

1. Entweder wir lassen die Grenzen wie sie sind und rücksubstituieren
2. Wir rücksubstituieren nicht, passen stattdessen die Grenzen der Substitution an

Bsp 13.2.4.1. Bestimme $\int \underbrace{2x \sin(x^2)}_{g'(x)\cdot f(g(x))}\,dx$

d.h. $y = g(x)$ hier $y = x^2 \Rightarrow \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x \Rightarrow dy = 2x \cdot dx$

$$\Rightarrow dx = \frac{1}{2x} \cdot dy$$

damit $\int 2x\sin(x^2) \overset{y=x^2}{=} \int 2x \cdot \sin(y) \cdot \left(\frac{1}{2x} \cdot dy\right)$

$$= \int \sin(y)\,dy = -\cos(y) + C = -\cos(x^2) + C$$

Rücksubstitution $y = x^2$

Bsp. 13.2.4.2 Bestimme $\int \frac{\ln(\ln(x))}{x \cdot \ln(x)} dx$

Lös: Subs: $y = \ln(\ln(x))$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\ln(x)} \Rightarrow dx = x\ln(x) \cdot dy$

also $\int \frac{\ln(\ln(x))}{x\ln(x)} dx = \int \frac{y}{x\ln(x)} \cdot x\ln(x)\, dy = \int y\, dy$

$= \frac{y^2}{2} + C$

Bsp. 13.2.4.3 Bestimme $\int \frac{1}{x \cdot \ln(x)^4} dx$

Lös: Subs: $y = \ln(x)$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x \cdot dy$

also $\int \frac{1}{x\ln(x)^4} = \int \frac{1}{x \cdot y^4} \cdot x \cdot dy = \int \frac{1}{y^4} dy = \frac{y^{-3}}{-3} + C$

Bem: Substitution kann aber auch helfen, wenn wir nicht die "klassische" Form haben d.h. wo sich der Term direkt vereinfacht indem man mit $\frac{1}{y'}$ multipliziert: dies ist dann "nichttriviale" Subs., auf die Subs. zu kommen ist schwer!! Oftmals gibt es aber immer wiederkehrende Darstellunge (siehe bsp. wurzel unten) die man lernen kann: schaut euch dafür alte Serien + Examen + Literatur an

Bsp 13.2.4.2. Bestimme $\int \cos(\sqrt{x})\, dx$

Lös: Für Wurzeln i. Allg gilt

$y = \sqrt{x} \Rightarrow y^2 = x$, also $\frac{d}{dy}(y^2) = \frac{d}{dy}(x)$

$2y\, dy \overset{y=\sqrt{x}}{=} dx \qquad \Rightarrow 2y = \frac{dx}{dy} \Rightarrow dx = 2y \cdot dy$

Jetzt: $\int \cos(\sqrt{x})\, dx = \int \cos(y) \cdot 2y\, dy$

$= \sin(y) \cdot 2y - \int \sin(y) \cdot 2\, dy$

$= 2y\sin(y) + \cos(y) + C$

$= 2\sqrt{x}\sin(\sqrt{x}) + 2\cos(\sqrt{x}) + C$

Rücksubs.

13.2.5. Partialbruchzerlegung

Einführung

Geeignet für rationale Funktionen, wie bspw.

$$\int \frac{1}{x^2-1}\, dx$$

Bsp. 13.2.5.1. Bestimme $\int \frac{1}{x^2-1}\, dx$

Lös: Offenbar gilt $(x^2-1) = (x+1)(x-1)$, schreibe also

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}. \text{ für } A,B \in \mathbb{R}$$

haben wir diese Form, ist das Integral einfach

$$\int \frac{1}{x^2-1}\, dx = \int \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)}\, dx = A \cdot \log(|x+1|) + B \cdot \log(|x-1|) + C$$

Löse für A,B auf:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = A(x-1) + B(x+1)$$

Setze nun die Nullstellen von x^2-1, d.h. $x^2-1=0$ $(x_{1/2} = \pm 1)$ in die obige Gleichung ein

$x=1$: $\quad 1 = A(1-1) + B(1+1) = 2B \Rightarrow B = 1/2$

$x=-1$: $\quad 1 = A(-1-1) + B(1-1) = -2A \Rightarrow A = -1/2$

also: $\quad \frac{1}{x^2-1}\, dx = \frac{-1/2}{x+1} + \frac{1/2}{x-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\, dx = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\log(|x-1|) - \frac{1}{2}\log(|x+1|) + C$$

wie erwartet (vgl. Ausdruck oben mit gelösten A,B)

Bsp. 13.2.5.2. Bestimme $\int \frac{3x+4}{x(x+2)} dx$

Lös: Falls ihr die Faktorisierung bemerkt, ist das Integral einfach:

$$\int \frac{3x+4}{x(x+2)} dx = \int \frac{2(x+2)+x}{x(x+2)} dx =$$

$$= \int \frac{2(x+2)}{x(x+2)} + \frac{x}{x(x+2)} dx$$

$$= 2\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{(x+2)} dx = 2\log(|x|) + \log(|x+2|) + C$$

Ansonsten, typische PBZ Aufgabe:

$$\frac{3x+4}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$$

$$\Rightarrow \quad 3x+4 = A\cdot(x+2) + B\cdot(x)$$

$x=0$: $\quad 4 = 2A \Rightarrow A = 2$

$x=(-2)$: $\quad -6+4 = -2 = -2B \Rightarrow B = 1$

d.h. $$\int \frac{3x+4}{x(x+2)} dx = \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{1}{x+2} dx = 2\log(|x|) + \log(|x+2|) + C$$

13.3. Bestimmte Integrale, wichtigste Sätze

Einführung in bestimmte Integrale

Bisher haben wir nur i. Allg. Stammfunktionen bestimmt. Nun können wir diese mittels dem Fundamentalsatz auf einem gewissen Intervall auswerten, d.h.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

(Satz, Linearität, Skript 5.2.10)

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt

$$\int_a^b A \cdot f(x) + B \cdot g(x)\,dx = A \cdot \int_a^b f(x)\,dx + B \int_a^b g(x)\,dx$$

(Satz, Monotonie, Skript 5.3.1)

Seien $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Bem: Insb. gilt für $f(x) = 0$, d.h. $g(x) \geq 0$, dass $\int_a^b g(x)\,dx \geq 0$

(Korollar, Dreiecksungleichung, Skript 5.3.2)

Falls $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

(Satz, Cauchy-Schwarz Ungleichung, Skript 5.3.3.)

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2\,dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g(x)^2\,dx}$$

(Satz, Mittelwertsatz, Skript 5.3.4)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es ein $c \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b-a)$$

(Satz, Cauchy, Skript 5.3.6)

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, f stetig, $g(x) \geq 0$ integrierbar, so existiert ein $c \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x)\, dx$$

(Korollar, Symmetrisches Intervall über einer ungeraden Funktion)

Sei $f: [-a,a] \to \mathbb{R}$, f intbar und ungerade, d.h. $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in [-a,a]$

so gilt

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$$

(Korollar, Nullintegral)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f intbar so gilt für alle $c \in [a,b]$

$$\int_c^c f(x)\, dx = 0$$

Bem: Die Fläche an einem Punkt ist stets null

(Korollar, Grenzverschiebung)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f intbar und $a \leq b$ so gilt

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$$

Bsp. 13.3.1 (HS18): Bestimme $\int_0^1 x e^{-2x}\, dx$

Stammfunktion:
$$\int \underset{\downarrow}{x}\, \underset{\uparrow}{e^{-2x}}\, dx = x \frac{e^{-2x}}{-2} - \int 1 \cdot \frac{e^{-2x}}{-2}\, dx$$
$$= \frac{-x e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2} \int e^{-2x}\, dx$$
$$= \frac{-x e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{-2x}}{-2} \right)$$
$$= \frac{-x e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4}$$

also $$\int_0^1 x e^{-2x}\, dx = F(1) - F(0) = \left(\frac{-e^{-2}}{2} - \frac{e^{-2}}{4} \right) - \left(-\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}$$

Bsp. 13.3.2. Bestimme $\int_0^y x\cos(x^2)\,dx$

Substitution $y=x^2$ $\quad \frac{d(y)}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}\cdot dy$

$$\int x\cos(x^2)\,dx = \int x\cdot\cos(y)\cdot\frac{1}{2x}\cdot dy$$
$$= \frac{1}{2}\int \cos(y)\,dy$$
$$= \frac{1}{2}\sin(y) = \frac{1}{2}\sin(x^2)$$

Rücksub. $y=x^2$

also: $\int_0^y x\cos(x^2)\,dx = F(y) - F(0) = \frac{1}{2}\sin(y^2) - \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}\sin(0^2)}}^{=0} = \frac{1}{2}\sin(y^2)$

Bsp. 13.3.3 (HS19): Bestimme $\int_3^{10} \frac{1}{x\cdot\ln(x)^4}\,dx$

Substituiere $y=\ln(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\cdot dy$

$$\int \frac{1}{x\ln(x)^4}\,dx = \int \frac{1}{x\,y^4}\cdot x\,dy = \int \frac{1}{y^4}\,dy$$
$$= \frac{y^{-3}}{-3}$$
$$= \frac{\ln(x)^{-3}}{-3}$$

Rücksubst.

also $\int_3^{10} \frac{1}{x\ln(x)^4}\,dx = \left[\frac{\ln(x)^{-3}}{-3}\right]_3^{10} = \frac{\ln(10)^{-3}}{-3} - \frac{\ln(3)^{-3}}{-3}$

Bsp. 13.3.4. (HS20) Bestimme $\int_e^{e^e} \frac{\ln(\ln(x))}{x\cdot\ln(x)}\,dx$

Lös: Substitution bei bestimmtem Integral heisst: entweder 1) rücksubs oder 2) grenzen subs.
(siehe Bemerkung bei der Substitution)

Substituiere: $y=\ln(\ln(x))$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\ln(x)} \Rightarrow dx = x\ln(x)\cdot dy$

$$\int_e^{e^e} \frac{\ln(\ln(x))}{x\ln(x)}\,dx = \int_{\ln(\ln(e))}^{\ln(\ln(e^e))} \frac{y}{x\cdot\ln(x)}\cdot x\cdot\ln(x)\,dy = \int_0^1 y\,dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

13.4. Uneigentliche Integrale

Einführung uneigentliche Integrale

Bisher haben wir Integrale auf einem endlichen Intervall gesehen, Bspw.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ und $\int_a^b f(x)\,dx$, was wenn das Integral unendlich ist?

(Definition, Uneigentliches Integral, Skript 5.8.1)

Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, und auf allen Intervallen $[c,d]\subset(a,b)$ intbar. so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \lim_{d\to b^-} \int_c^d f(x)\,dx$$

Insbesondere gilt also

1. $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $\quad \int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\,dx$
2. $f:(-\infty,0]\to\mathbb{R}$, $\quad \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 f(x)\,dx$
3. $f:(-\infty,\infty)\to\mathbb{R}$, $\quad \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$

Bem: Vorsicht in Fall 3: Es braucht zwei limes, der Ausdruck ist nicht gleich zu

$$\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} f(x)\,dx$$

Bsp. 13.4.1. (HS18) Bestimme $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ (Tipp: Fundamentalintegral, $\lim_{x\to\infty}\arctan(x)=\frac{\pi}{2}$)

Lös:
$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx$$
$$= \lim_{b\to\infty} [\arctan(x)]_0^b = \lim_{b\to\infty} \left(\arctan(b) - \underbrace{\arctan(0)}_{=0}\right)$$
$$= \lim_{b\to\infty} \arctan(b) = \frac{\pi}{2}$$

Bsp 13.4.2 (FS20): Bestimme $\int_e^{+\infty} \frac{\ln(x)^{-100}}{x}\,dx$

Lös: Subs $y=\ln(x)$, $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\cdot dy$

$$\int_e^{+\infty} \frac{\ln(x)^{-100}}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_e^b \frac{\ln(x)^{-100}}{x}\,dx$$
$$= \lim_{b\to\infty} \int_{\ln(e)}^{\ln(b)} \frac{y^{-100}}{x}\cdot x\,dy$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_1^{\ln(b)} y^{-100}\, dy$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{y^{-99}}{-99} \right]_1^{\ln(b)}$$

$$= -\frac{1}{99} \cdot \lim_{b\to\infty} \left(\underbrace{\boxed{\ln(b)^{-99}}}_{\to 0} - 1^{-99} \right)$$

$$= \frac{1}{99}$$

Bsp. 12.4.3.(FS20) Bestimme $\int_{-\infty}^{0} x \cdot e^{3x}\, dx$

Lös: Part. Integration: $\int_{-\infty}^{0} x e^{3x} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \underset{\downarrow}{x}\, \underset{\uparrow}{e^{3x}}\, dx$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[x \frac{e^{3x}}{3} \right]_a^0 - \int_a^0 1 \cdot \frac{e^{3x}}{3}\, dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \underbrace{\boxed{\left(-\frac{e^{3a}}{3} \right)}}_{\to 0} - \left[\frac{e^{3x}}{9} \right]_a^0 dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} -\left(\frac{e^0}{9} - \underbrace{\boxed{\left(\frac{e^{3a}}{9} \right)}}_{\to 0} \right) = -\frac{1}{9}$$

Exams-Tipps

- Schreibt euer Cheat-Sheet, am besten nachdem ihr ein Thema fertig habt auf dem CS löst die entsprechenden Serie Aufgaben + alte Examensaufgaben in dem Themenbereich
- Wichtig: Aufgaben lösen hilft dabei die Theorie zu verstehen und ist das Wichtigste in der Analysis.
- Versteht zudem die Theorie soweit das ihr ein intuitives Verständnis für die Sätze / Korollare habt (d.h. wisst was der Satz aussagt und warum)

  $\Rightarrow$ Versucht dann damit alte Beweise aus Serien + Examen zu lösen (oftmals einfach Definition + gegebene Einschränkung in der Aufgabenstellung dann noch ein paar Äquivalenzumformungen und ihr seid fertig!)

- Noch sehr unsicher? Eventuell PVW (wird aber ähnlich sein zu den Übungsstunden: wir werden aber noch mehr alte Examensaufgaben etc. lösen und ihr könnt Fragen bei Unklarheiten stellen)

Viel Glück, ihr schafft das!!