Themenübersicht Exercise Session 2

2.1. Die rellen Zahlen Nachtrag: Archimedisches Prinzip

2.2. Metrische und normierte Räume

2.3 Komplexe Zahlen

2.4. Einführung: Folgen und Reihen

2.1. Relle Zahlen

Satz (Archimedischen Prinzip)
Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ sodass $n > x$. Genauso existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ sodass $\frac{1}{n} < \varepsilon$

Bem: $\varepsilon > 0$ bedeutet, dass man einen beliebig kleinen Parameter ε nimmt, der "ganz nah" an null herankommen kann. Falls man zeigen kann

$$a - b < \varepsilon$$

so gilt $a = b$.

2.2. Metrische und normierte Räume

Einführung Metrik

Ein metrischer Raum ist eine Menge X (nicht leer) mit einer Abbildung, die sog. Metrik,

$$d: X \times X \to \mathbb{R}$$

welche jedem Paar (x,y) aus $X \times X$ eine relle Zahl zuordnet. Sie muss folgende Eigenschaften erfüllen:

(i) $d(x,y) \geq 0 \ \forall x,y \in X$ und $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Positiv Definitheit)

(ii) $d(x,y) = d(y,x) \ \forall x,y \in X$ (Symmetrie)

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \ \forall x,y,z \in X$ (Dreiecksungl.)

Wir nennen $d(x,y)$ Distanz zwischen x und y (wobei $x,y \in X$). Der metrische Raum selbst wird notiert als (X,d)

Einführung normierte Räume

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, eine Abbildung

$$\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}, \ v \to \|v\|$$

heisst Norm auf V falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind

(i) $\|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$, und $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (Positiv Definitheit)

(ii) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v,w \in V$ (Dreiecksungl.)

(iii) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ für alle $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ (Positive Homogenität).

Die relle Zahl $\|v\|$ nennen wir Norm von v, intuitiv die Länge von v. Ein Vektorraum V zusammen mit einer Norm $\|\cdot\|$ definiert einen normierten Raum, wir schreiben $(V, \|\cdot\|)$.

- Jeder normierte Raum kann als metrischer Raum betrachtet werden, indem man die Norm zur Definition einer Metrik verwendet:

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

wir nennen diese Metrik die (von $\|\cdot\|$) induzierte Metrik. Es folgt: jeder normierte Raum ist automatisch ein metrischer Raum, aber nicht umgekehrt.

- Normen auf $V = \mathbb{R}$: $\|v\| = |v|$

- Normen auf $V = \mathbb{R}^n$, $v = (v_1, \dots, v_n)$:
  - Euklidische Norm: $\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2}$
  - Maximum Norm: $\|v\|_\infty = \max_{i=1}^{n} |v_i|$
  - p-Norm : $\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p \right)^{1/p}$, $p \in \mathbb{N}$

- Normen auf $V = C^0(a,b)$, d.h. $V =$ Estetige funktion $(a,b) \to \mathbb{R}$:
  - Maximum Norm: $\|f\|_\infty = \sup_{x \in (a,b)} |f(x)|$
  - L_p-Norm : $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \right)^{1/p}$, $p \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Metrische und normierte Räume sind wichtig um Strukturen zu verstehen, Abstände zu messen und Konvergenz zu definieren

2.3. Komplexe Zahlen

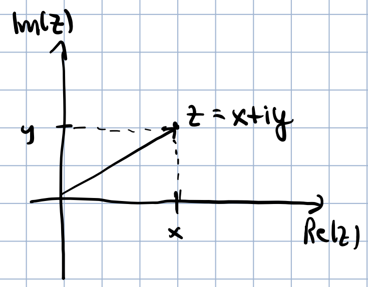
Darstellung komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen können auf drei verschiedenen Arten dargestellt werden:

I Kartesische Darstellung

Komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ wird durch ihre (reellen) Koordinaten in der komplexen Ebene charakterisiert, d.h.

$z = x + i \cdot y$, wobei



- $x = Re(z)$ = Realteil von z
- $y = Im(z)$ = Imaginärteil von z
- i, die imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$, $i = \sqrt{-1}$

II Polare/ Trigonometrische Darstellung

Komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ wird durch Betrag $|z| = r$ und Argument $Arg(z) = \theta$ bestimmt

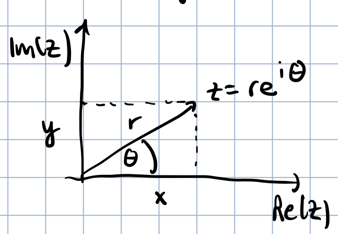
$z = r \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$, wobei

- $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ = Betrag von z (Abstand von z zum Ursprung)
- $\theta = Arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ = Argument von z (θ im Gegenuhrzeigersinn)
(normalerweise $\theta \in [0, 2\pi]$ wobei natürlich $\theta [0, 2\pi + \pi k]$ $k \in \mathbb{N}$ geht)

III Eulersche / Exponentialdarstellung

Komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ wird durch Betrag $|z| = r$ und Argument $Arg(z) = \theta$ bestimmt

$z = re^{i\theta} \overset{\text{Euler}}{=} r(\cos\theta + i\sin\theta)$,



r und θ analog zu II also $r = |z|$ als Betrag von z und θ als Argument.

Umwandlung zwischen den Darstellungen

Kartesisch (I) zu Polar (II) / Euler (III)

- Gegeben: $z = x+iy$ Gesucht: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ bzw. $z = re^{i\theta}$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

Bsp: $z = 1+i$

Lös: $r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $\theta = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$ also $z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

Polar (II) / Euler (III) zu Kartesisch (I)

- Gegeben: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ bzw. $z = re^{i\theta}$ Gesucht: $z = x+iy$

$x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin\theta$

Bsp: $z = 2e^{i\pi}$

Lös: $x = 2 \cdot \cos(\pi) = -2$, $y = 2\sin(\pi) = 0$ also $z = -2 + i \cdot 0 = -2$

Operationen auf $\mathbb{C}$: Addition, komplexe Konjugation, Multiplikation,

Addition

Man addiert einfach Realteil und Imaginärteil seperat, d.h. $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Haben wir z_1 bzw. z_2 in Polarform gegeben transformieren wir diese in kartesische Form

Bsp: $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Lös: z_1 ist bereits in kartesischer Form, für z_2 gilt $x_2 = 2\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$, $y_2 = 2\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

also $z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, total: $z_1 + z_2 = (1+i) + (-\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2} + i(1+\sqrt{2})$

Komplexe Konjugation

Für ein $z = x + iy = re^{i\theta}$ ist die konjugierte komplexe Zahl definiert als

$$\bar{z} = x - iy = re^{-i\theta}$$

Multiplikation (Kartesische Form)

Sei $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ sowie $i^2 = -1$ so gilt

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

· Bemerke: $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 - ixy + ixy = x^2 + y^2 = |z|^2$, also $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

Multiplikation (Eulersche Form)

Sei $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ dann gilt

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Division (Kartesisch)

Durch $z\bar{z} = |z|^2$ (vgl. oben) gilt für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (wobei $z_2 \neq 0$)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

Division (Euler)

Division in Eulerscher Form für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (wobei $z_2 \neq 0$) sowie $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

Bsp: $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$, dann $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\pi/2}}{\sqrt{2}\, e^{i\pi/3}} = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$

Potenzen

Potenzen berechnet man am besten in Euler-Form für ein $z \in \mathbb{C}$ gilt dann $z = re^{i\theta}$

$$z^n = r^n e^{in\theta} \quad \text{bspw.} \quad z^2 = r^2 e^{2i\theta}$$

Bsp: $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$, berechne $z^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$

Lös: Schreibe kart → Euler: $r = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$, $\theta = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$, also $z = e^{i\pi/4}$

also $z^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \left(e^{i\pi/4}\right)^3 = e^{i\,3\pi/4}$, kart: $z = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

Der Fundamentalsatz der Algebra (Gleichungen in $\mathbb{C}$)

Für Nullstellen des Polynoms: $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$

kann höchstens n-Lösungen über $\mathbb{R}$ haben (insb. für n ungerade mindestens eine relle Lösung, für n gerade kann p(x) unlösbar sein)

· Über $\mathbb{C}$ (im vgl zu $\mathbb{R}$) gilt: Alle Polynome vom Grad $n \geq 1$ haben genau n komplexe NST, das ist der Fundamentalsatz der Algebra.

2.4. Folgen und Reihen

Einführung Folgen

Eine Folge ist eine geordnete Liste von Zahlen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

Formal: Eine relle Folge ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{R}$, wobei jeden $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet wird, d.h.

$$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto a(n)$$

wir schreiben a_n statt $a(n)$ und bezeichnen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$ als die Folge (bzw. $(a_n)_{n\geq 1}$)

Man kann Folgen definieren, indem man das n-te Folgenglied explizit schreibt, d.h.

$$(a_n)_{n\geq 1} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} \quad \text{bspw.} \quad \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$$

Alternativ kann man Folgen rekursiv definieren, mit Anfangswert und Vorschrift um weitere Folgenglieder aus vorherigen zu bestimmen, bspw. die Fibonacci-Folge.

Anfangswerte: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$

Vorschrift: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

damit hat man die Folge $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots\}$

Einführung in die Konvergenz von Folgen

Es gibt nun zwei Arten Konvergenz einer Folge zu definieren. In der Vorlesung:

Def. (Skript 2.1.4)
Die Folge (a_n) konvergiert, falls eine Zahl $l \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $\forall \varepsilon > 0$ die Menge

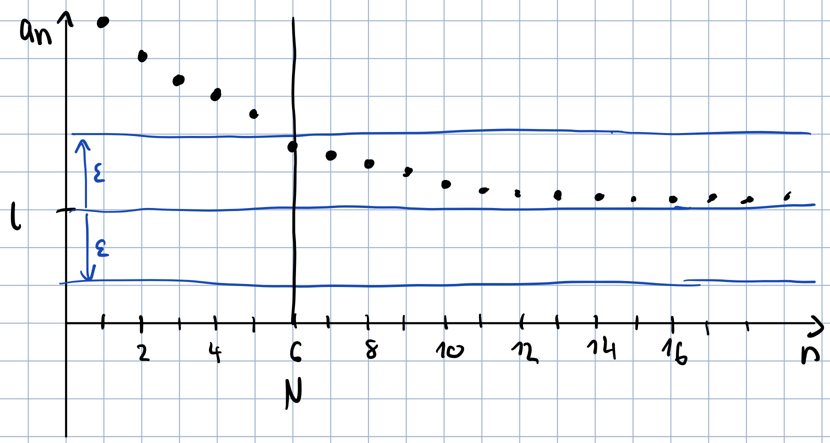
$$\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin (l-\varepsilon, l+\varepsilon)\}$$

endlich ist. Wir bezeichnen l als den Grenzwert der Folge

Alternative Definition

Die Folge (a_n) konvergiert gegen $l \in \mathbb{R}$, falls $\forall \varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert (also ein von ε abhängigen N), sodass für alle $n \geq N$ gilt: $|a_n - l| < \varepsilon$

Kurz: $\forall \varepsilon > 0.\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N : |a_n - l| < \varepsilon$



Bem: Nur wenn der Grenzwert existiert darf man $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ schreiben

Konvergenzbeweise mittels Definition

Bsp: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (vgl. unsere erste Übungsstunde, wir haben mittels Widerspruchsbeweis auf $\mathbb{R}$ gezeigt, dass $\inf(\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}) = 0$)

Lösung: Wähle beliebig kleines $\varepsilon > 0$, wir müssen zeigen das ein von ε abhängigen N existiert, sodass für alle $n \geq N$ gilt: $|a_n - l| = |1/n - 0| = |1/n| < \varepsilon$

Offenbar haben wir hiermit direkt eine Ungleichung gegeben, löse nach n auf:

$$|a_n - l| = |1/n| \overset{!}{<} \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Wähle $N := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ (Aufrunden da $N \in \mathbb{N}$ sein muss).

Nach Konstruktion gilt somit $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}.\ \forall n \geq N : |1/n - 0| < \varepsilon$ (d.h. $1/n$ konv. gegen 0 bzw. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$)