

Themenübersicht Exercise Session 3

- 3.0. Anmerkungen zur Serie, Recap Definition Folge und Folgenkonvergenz (Skript 2.1)
- 3.1. Rechnen mit Grenzwerten (Rechenregeln, Allgemeines Vergleichsprinzip) (Skript 2.1)
- 3.2. Konvergenz von beschränkten und monotonen Folgen (Rekursive Folgen) (Skript 2.2)
- 3.3. Satz von Weierstraß (Skript 2.2, 2.5)
- 3.4. Limes superior, Limes inferior (Skript 2.3)

3.0. Anmerkungen zur Serie

- Unterschied zwischen "bestimme" und "zeige"
- Bei Axiomverwendung benutze am besten direkt die Nummer der Eigenschaft aus dem Skript (K1, 02)
- Verwirrung von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$: In dieser Vorlesung $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Recap

Einführung in die Konvergenz von Folgen

Es gibt nun zwei Arten Konvergenz einer Folge zu definieren. In der Vorlesung:

Def. (Skript 2.1.4)

Die Folge (a_n) konvergiert, falls eine Zahl $l \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $\forall \varepsilon > 0$ die Menge

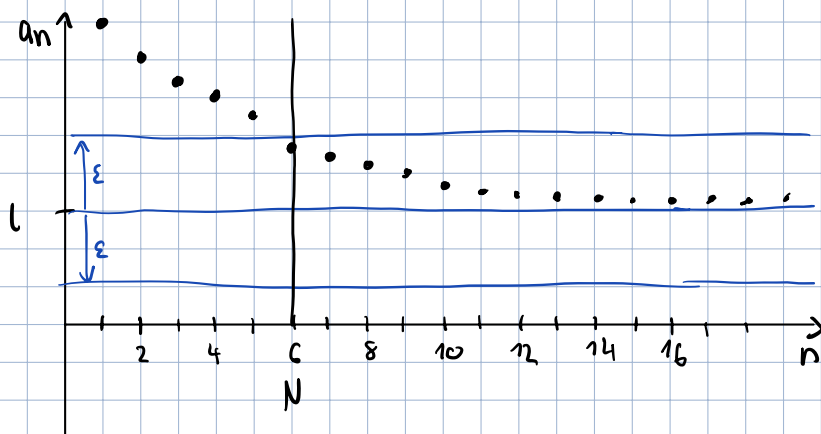
$$\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin (l - \varepsilon, l + \varepsilon)\}$$

endlich ist. Wir bezeichnen l als den Grenzwert der Folge

Alternative Definition

Die Folge (a_n) konvergiert gegen $l \in \mathbb{R}$, falls $\forall \varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert (also ein von ε abhängiges N), sodass für alle $n \geq N$ gilt: $|a_n - l| < \varepsilon$

$$\text{Kurz: } \forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |a_n - l| < \varepsilon$$



Bem: Nur wenn der Grenzwert existiert darf man $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ schreiben

Konvergenzbeweise mittels Definitionen

Bsp: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ (vgl. unsere erste Übungsstunde, wir haben mittels Widerspruchsbeweis auf $\mathbb{R}$ gezeigt, dass $\inf(\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}) = 0$)

Lösung: Wähle beliebig kleines $\varepsilon > 0$, wir müssen zeigen das ein von ε abhängiges N existiert, sodass für alle $n \geq N$ gilt: $|a_n - l| = |1/n - 0| = |1/n| < \varepsilon$

Offenbar haben wir hiermit direkt eine Ungleichung gegeben, löse nach n auf:

$$|a_n - l| = |1/n| < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Wähle $N := \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ (Aufrunden da $N \in \mathbb{N}$ sein muss).

Nach Konstruktion gilt somit $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |1/n - 0| < \varepsilon$ (d.h. $1/n$ konv. gegen 0

bzw. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$)

3.1. Rechnen mit Grenzwerten

(Satz) Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen mit Grenzwerten a, b dann gilt:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}, \text{ falls } b \neq 0$$

Bsp 3.1.1: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}$

Lös: Derzeit konvergiert weder Nenner noch Zähler, aber da $n \geq 1$ gilt

$$\frac{n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)}{n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$\text{also } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \stackrel{(1), (3)}{=} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

(Satz, Allgemeines Vergleichsprinzip, "Sandwich Lemma")

Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Angenommen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A, \quad \text{dann} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$$

Beweis des Allgemeinen Vergleichsprinzips

Da $(a_n), (c_n)$ jeweils konvergent sind (mit Grenzwert A) gilt nach Definition:

$$i) \text{ defn. Folgenkonvergenz } (a_n): \forall \varepsilon > 0. \exists N_a \in \mathbb{N}. \forall n \geq N_a \quad |a_n - A| < \varepsilon \quad (\Leftrightarrow A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon)$$

$$ii) \text{ defn. Folgenkonvergenz } (c_n): \forall \varepsilon > 0. \exists N_c \in \mathbb{N}. \forall n \geq N_c \quad |c_n - A| < \varepsilon \quad (\Leftrightarrow A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon)$$

Vereinige Bedingungen i), ii) für N_a, N_c , also definiere $N_b := \max(N_a, N_c)$, dann gelten $\forall n \geq N_b$ beide Bedingungen, also gilt für $N = N_b$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N: A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon \quad (\Leftrightarrow |b_n - A| < \varepsilon)$$

was der Definition einer konvergenten Folge entspricht, d.h. (b_n) ist konvergent mit Grenzwert A .

Bem: Oftmals kann man die eigene Folge approximieren um geeignete Folgen $(a_n), (c_n)$ zu finden

Bsp 3.12: Gegen was konvergiert $\frac{1}{n^2}$

Lös: Offenbar gilt $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$

Bsp 3.1.3: Gegen was konvergiert $\sqrt[n]{3^n + 5^n}$

Lös: $3^n \geq 0$ also $\sqrt[n]{3^n + 5^n} \geq \sqrt[n]{0 + 5^n} = \sqrt[n]{5^n} = 5$

$5^n \geq 3^n$ also $\sqrt[n]{3^n + 5^n} \leq \sqrt[n]{5^n + 5^n} = 5\sqrt[n]{2}$

aber mit $n \geq 2$ $\sqrt[n]{2} \leq \sqrt[n]{n} = n^{1/n}$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$, siehe Bsp 2.2.5 Skript)

also $5 \leq \sqrt[n]{3^n + 5^n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 5\sqrt[n]{n} = 5 \underbrace{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \right)}_{=1} = 5$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n} = 5$

3.2. Konvergenz von beschränkten und monotonen Folgen

(Definition 2.2.1. Monotone Folgen)

Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ ist monoton wachsend falls:

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \geq 1$$

und monoton fallend falls

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \geq 1$$

(Man kann analog streng monoton wachsend und streng monoton fallend mit $<$ bzw $>$ definieren)

(Definition Beschränktheit)

Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ ist nach oben beschränkt, falls es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$a_n \leq C \quad \forall n \geq 1$$

und nach unten beschränkt, falls es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$a_n \geq C \quad \forall n \geq 1$$

(Korollar)

Konvergente Folgen sind immer beschränkt.

Bem: Die Umkehrung gilt nicht, bspw ist $((-1)^n)_{n \geq 1}$ beschränkt aber nicht konvergent.

(Beweis) Serie 2, Aufgabe 2.2.

(Satz)

Ist die Folge (a_n) nach oben (bzw. unten) beschränkt und monoton wachsend

(bzw. monoton fallend) dann ist (a_n) konvergent.

Bem: Oftmals ist dieser Satz bei rekursiv definierten Folgen nützlich

Bsp 3.2.1. Konvergiert die rekursive Folge $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6)$, und falls ja wohin

Lös: Teleskopiere etwas, d.h. $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 5$, $a_4 = 5.5$, $a_5 = 5.75$, ...

Schritt 1: Monotonie via vollständiger Induktion zeigen, also $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_{n+1}$

Induktions Anfang ($n=1$): $a_1 = 2 \leq 4 = a_2$ ✓

Induktionsschritt (" $n \Rightarrow n+1$ ") : Nehme als Induktionshypothese an, dass $a_n \leq a_{n+1}$ gilt.

$$a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow a_n + 6 \leq a_{n+1} + 6 \Rightarrow \underbrace{\left| \frac{1}{2}(a_n + 6) \right|}_{:= a_{n+1}} \leq \underbrace{\left| \frac{1}{2}(a_{n+1} + 6) \right|}_{:= a_{n+2}} \Rightarrow a_{n+1} \leq a_{n+2}$$

Per mathematischer Induktion gilt somit, dass $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_{n+1}$ gilt

Schritt 2: Beschränktheit mittels vollständiger Induktion zeigen

Induktionsanfang ($n=1$): $a_1 = 2 \leq 6$ ✓

Induktionsschritt (" $n \Rightarrow n+1$ ") : Nehme als Induktionshypothese an, dass $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq 6$ gilt.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6) \stackrel{\text{I.H.}}{\leq} \frac{1}{2}(6 + 6) = 6$$

Per mathematischer Induktion gilt somit, dass $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq 6$ gilt

Schritt 3: Schlussfolgerung über Konvergenz und Bestimmung des Grenzwerts

Da (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, konvergiert a_n .

Der Grenzwert entspricht:

$$\underbrace{\left| a_{n+1} \right|}_{\rightarrow a} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\left| a_n \right|}_{\rightarrow a} + 6 \right) \Rightarrow a = \frac{1}{2}(a + 6) \Rightarrow a = 6$$

Bsp. 3.2.3. (FS20, Aufgabe 3) Sei $(a_k)_{k \geq 1}$ die rekursive definierte Folge $a_1 = -\ln(2)$

$$a_{k+1} = e^{a_k} - 1, k \geq 1$$

Überprüfen Sie ob (a_k) konv. oder nicht. Falls (a_k) konv. zeigen Sie dies

und berechne seinen Grenzwert. Wenn die Folge nicht konv. begründen Sie die Divergenz.

Lös: Teleskopiere: $a_1 = -\ln(2)$, $a_2 = e^{-\ln(2)} - 1 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = e^{-1/2} - 1 \approx \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \approx \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}, \dots$

Schritt 1: Monotonie (Normalerweise Induktion, man sieht hier aber direkt mit Korollar 3.6.4 d.h. $e^x \geq 1+x$ das folgende)

$$x+1 \leq e^x$$

$$\Rightarrow x \leq e^x - 1$$

$$\Rightarrow a_k \leq a_{k+1}$$

Schritt 2: Beschränktheit mittels vollständiger Induktion

$$IA(n=1): a_1 = -\ln(2) \leq 0$$

IS ("n $\Rightarrow$ n+1"): Wir nehmen als IH an $a_k \leq 0$, damit gilt

$$a_{k+1} = e^{a_k} - 1 \stackrel{IH}{\leq} e^0 - 1 = 0 \leq 0 \quad \checkmark$$

Schritt 3: Schlussfolgerung und Grenzwert

Da (a_k) monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, konvergiert (a_n) gegen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{a_k} - 1 \rightarrow a = e^a - 1 \rightarrow a = 0$$

Grenzwert $a=0$.

Bsp. 3.2.3. (HS20, Aufgabe 3) Es sei $(a_k)_{k \geq 1}$ gegeben durch $a_1 = \ln(4)$

i) Beweisen Sie, dass $(a_k)_{k \geq 1}$ monoton wachsend ist $a_{k+1} = e^{a_k} - 1, k \geq 1$

ii) Bestimmen Sie, ob $(a_k)_{k \geq 1}$ konv. für $k \rightarrow \infty$. Falls die Folge konv., beweisen Sie dies und bestimmen Sie den Grenzwert. Andernfalls, argumentieren Sie warum $(a_k)_{k \geq 1}$ divergiert.

Lös: Versuche die Aufgabe selber zu lösen (Lösungen auf exams.vis.ethz.ch)

3.3. Satz von Weierstrass

(Defn. 2.5.7 Teilfolge)

Sei (a_n) eine Folge und $X \subset \mathbb{N}$ eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$, bspw. $X = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \bmod 2 = 0\} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$

Die Folgenglieder (a_n) mit $n \in X$ bilden eine Teilfolge von (a_n) .

Bsp: Bestimme Teilfolgen von $a_n = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$

Lös: $X = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \bmod 2 = 0\}: \{a_0, a_2, a_4, a_6, \dots\}$

$X = \{n \mid n = 4 \cdot m + 1, m \in \mathbb{N}\}: \{a_1, a_5, a_9, a_{13}, \dots\}$

(Satz 2.5.9 Weierstrass)

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ hat mindestens eine konvergente Teilfolge $(a_k)_{k \in X}$ ($X \subset \mathbb{R}$, X unendl.)

3.4. Limes inferior, Limes superior

(Definition Limes inferior, Limes superior, vgl. Skript 2.3)

Sei (a_n) eine beschränkte Folge. Definiere eine Teilfolge (b_n) aus (a_n) mit

$$b_n := \inf \{ a_k : k \geq n \} = \inf \{ a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots \}$$

etwas teleskopiert

$$b_0 = \inf \{ a_0, a_1, a_2, a_3, \dots \}, b_1 = \inf \{ a_1, a_2, a_3, \dots \}, b_2 = \inf \{ a_2, a_3, \dots \}$$

da wir eine immer kleineren Anzahl an Elementen für das $\inf$ anschauen gilt $b_n \leq b_{n+1}$.

Da nach Voraussetzung (a_n) beschränkt ist, und (b_n) als Teilfolge ebenfalls beschränkt ist gilt nach dem Satz über monotone Konvergenz dass (b_n) konvergiert, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

wir nennen diesen Grenzwert Limes inferior von (a_n) d.h. $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

Analog, definiert man die Teilfolge (c_n) mit

$$c_n := \sup \{ a_k : k \geq n \} = \sup \{ a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots \}$$

wobei gilt $c_{n+1} \leq c_n$, nach dem monoton Konvergenzsatz (da auch (c_n) als Teilfolge von (a_n) beschränkt ist), dass (c_n) konvergiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$$

wir nennen diesen Grenzwert Limes superior von (a_n) , d.h. $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$

Bsp: Bestimme $\limsup$, $\liminf$ für $(a_n)_{n \geq 1} = (-1)^n$

Lös: Nach Definition $c_n = \sup \{ (-1)^k \mid k \geq n \}$

$$\text{Teleskopiere: } c_1 = \sup \{ a_1, a_2, a_3, \dots \} = \sup \{ -1, 1, -1, \dots \} = 1$$

$$c_2 = \sup \{ a_2, a_3, a_4, \dots \} = \sup \{ 1, -1, 1, \dots \} = 1$$

⋮

$$c_n = 1 \quad , \quad \text{also} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1$$

$$\text{Nach Definition } b_n = \inf \{ (-1)^k \mid k \geq n \}$$

$$\text{Teleskopiere: } b_1 = \inf \{ a_1, a_2, a_3, \dots \} = \inf \{ -1, 1, -1, \dots \} = -1$$

$$b_2 = \inf \{ a_2, a_3, a_4, \dots \} = \inf \{ 1, -1, 1, \dots \} = -1$$

⋮

$$b_n = -1 \quad , \quad \text{also} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = -1$$

(Lemma 2.4.1: Charakterisierung der Konvergenz)

Eine Folge (a_n) konvergiert $\Leftrightarrow (a_n)$ ist beschränkt und $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$

Bem: Gilt $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, so gilt dass (a_n) gegen A konv.