Themenübersicht Exercise Session 4

4.0. Anmerkungen zur Serie 2

4.1. Cauchy Kriterium (Skript 2.4)

4.2. Folgen in $\mathbb{C}$ (Skript 2.6)

4.3. Reihen (Skript 2.7)

4.4. Konvergenz von Reihen (Skript 2.7)

WICHTIG: Füllt bitte kurz die Umfrage von O-MATH bzgl der Übungsstunde aus

4.0. Anmerkungen zur Serie 2

Aufgabe 2.2: Sei (a_n) eine konv. reelle Folge. Zeigen Sie, dass (a_n) beschränkt ist d.h. ein $C \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $|a_n| < C$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Per Definition folgt aus (a_n) konvergent ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$), dass

$$\forall \varepsilon > 0. \exists N. \forall n \geq N. |a_n - A| < \varepsilon$$

also können wir sagen

$$|a_n| = |a_n - A + A| \stackrel{\text{dreiecksungleichung}}{\leq} \underbrace{|a_n - A|}_{< \varepsilon} + |A| \leq 1 + |A| \quad (\text{für } \varepsilon = 1)$$

d.h. alle Folgenglieder ab N sind beschränkt da $1 + |A|$ eine obere Schranke darstellt.

Für die ersten N Folgenglieder muss dies aber nicht zwingend gelten, es sind aber endlich viele, wähle also einfach

$$C = \max \{ |a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, 1 + |A| \}$$

Aufgabe 2.1 (MC)

a) W/F: Jede monoton von oben beschränkte Folge ist konvergent?

⇒ Falsch: wenn nach oben beschränkt, aber monoton fallend sagt Satz nicht aus

Aufgabe 2.4. (Grenzwert), Wurzeltrick

Ihr solltet in AnD gesehen haben, Grenzwert " $\infty - \infty$ " ist nicht direkt entscheidbar, oftmals l'Hôpital anwenden, aber bei Wurzeln geht das folgende (denke an dritte binomische Formel)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) \cdot \frac{(\sqrt{n^2 + n} + n)}{(\sqrt{n^2 + n} + n)}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\underbrace{\sqrt{n^2 + n} + n}_{n^2 \text{ dominiert}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}$$

4.1. Das Cauchy Kriterium

(Einführung in Cauchy Folgen)

- Mit dem Cauchy-Kriterium können wir zeigen, dass eine Folge konvergiert oder divergiert ohne ihren Grenzwert zu kennen. (Insb. können wir den Grenzwert der Folge hiermit nicht bestimmen)
- Intuitiv sagt das Cauchy Kriterium, dass bei einer Cauchy Folge die Folgenglieder immer enger zusammenliegen (daher sind offenbar alle konvergenten Folgen Cauchy Folgen)

(Satz 2.4.2. Cauchy Kriterium)

Eine Folge auf $\mathbb{R}$ (a_n) konvergiert, genau dann wenn

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}. \forall n, m \geq N: |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Bsp: Ist $a_n = \frac{n-1}{2^n}$ konvergent?

Eine Folge ist konvergent, falls sie eine Cauchy Folge ist. Wir überprüfen anhand der Defn. des Kriteriums (vgl. Satz 2.4.2) wobei o.B.d.A. $m \geq n$ sein soll:

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= \left| \frac{n-1}{2^n} - \frac{m-1}{2^m} \right| = \left| \frac{2^m(n-1) - 2^n(m-1)}{4mn} \right| = \left| \frac{n-m}{2nm} \right| \\ &= \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m} \stackrel{m \geq n}{\leq} \frac{1}{2^n} < \varepsilon \end{aligned}$$

Für $n > \frac{1}{2\varepsilon}$ ist a_n eine Cauchy Folge, setze also $N = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil$

4.2. Folgen in $\mathbb{C}$

Einführung in komplexe Folgen

- Eine komplexe Folge (a_n) kann man als zwei reelle Folgen interpretieren
- Bis auf folgende Eigenschaften, gelten die Eigenschaften von Folgen auf $\mathbb{R}$ auch für solche auf $\mathbb{C}$:

i) Sei (b_n) eine reelle Folge und (a_n) eine komplexe Folge, wenn gilt

$$|a_n| \leq b_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{und } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0, \text{ so gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

ii) $\liminf, \limsup$ existieren nicht für komplexe Folgen, da $\mathbb{C}$ nicht angeordnet ist

(Satz 2.6.3)

Eine komplexe Folge (a_n) konvergiert, genau dann wenn $(\operatorname{Re} a_n)_{n \geq 1}, (\operatorname{Im} a_n)_{n \geq 1}$ konvergieren

(Satz 2.6.3. verallgemeinert auf dimension d , in $\mathbb{C}$ sind wir im Spezialfall $d=2$)

(Korollar aus 2.6.3, Satz 2.6.6)

Das Cauchy Kriterium und Bolzano-Weierstrass gelten auch auf $\mathbb{C}$ (bzw allgemein in Dimension d)

4.3. Reihen

(Defn. Reihe, 2.7)

Für eine gegebene Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ können wir eine neue Folge $(S_n)_{n \geq 1}$ definieren durch die Summation der ersten n Glieder von (a_n) , also

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Teleskopieren wir etwas: $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, ..., $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

(Defn. Partialsumme)

Wir bezeichnen $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ als die Partialsumme der unendlichen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

(Defn. Konvergenz von Reihen, Defn. 2.7.1)

Wir sagen, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent ist, falls die Folge $(S_n)_{n \geq 1}$ der Partialsummen konvergiert, wir schreiben

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

(Satz Summenregel für Reihen, Satz 2.7.4)

Seien $\sum_k a_k$, $\sum_k b_k$ konvergente Reihen, so gilt das auch die folgenden Reihen konvergent sind, es gilt:

i) $\sum_k a_k + b_k = \sum_k a_k + \sum_k b_k$

ii) $\sum_k a_k - b_k = \sum_k a_k - \sum_k b_k$

iii) $\sum_k A \cdot a_k = A \cdot \sum_k a_k$ (mit $A \in \mathbb{C}$)

(Satz Cauchy Kriterium für Reihen, Satz 2.7.5)

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, genau dann wenn $\forall \varepsilon > 0. \exists M(\varepsilon) \in \mathbb{N}. \forall m \geq n \geq M \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon$

Bem: Beachte, dass dieses Cauchy Kriterium anders ist als bei Folgen

(Satz Monotone Partialsumme, Satz 2.7.6)

Seien $a_k \geq 0$, die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, gdw $\exists C \in \mathbb{R}. \forall n \in \mathbb{N}. 0 \leq \sum_{k=1}^n a_k \leq C$

4.4. Konvergenz von Reihen

• Im Folgenden schauen wir einige Kriterien an, anhand derer wir entscheiden können ob eine Reihe konvergiert, und falls ja, wohin.

(Konvergenzbeweis mittels Definition)

• Man sucht nach einer (expliziten Form) für die Partialsumme S_n und bildet den Grenzwert

Bsp 4.4.1:
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

Lös: Offenbar gilt $a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1+k-k}{k(k+1)} = \frac{(1+k)}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

Teleskopieren ergibt: $S_1 = a_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Bilden wir also den Grenzwert folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ ist konvergent mit Wert 1.

Bsp 4.4.2. (Skript 27.2):
$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

Lös: Offenbar gilt $a_k = q^k$

Teleskopieren ergibt: $S_0 = a_0 = 1$

$$S_1 = a_0 + a_1 = (1) + (q)$$

$$S_2 = a_0 + a_1 + a_2 = (1) + (q) + (q^2)$$

$\vdots$

$$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = 1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\Rightarrow q \cdot S_n = q + q^2 + \dots + q^{n+1}$$

$$\Rightarrow S_n - q S_n = (1 + q + q^2 + \dots + q^n) - (q + q^2 + \dots + q^{n+1}) = 1 - q^{n+1}$$

$$\Rightarrow (1 - q) S_n = 1 - q^{n+1}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Bilden wir den Grenzwert folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \begin{cases} \frac{1}{1 - q} & |q| < 1 \\ +\infty & |q| \geq 1 \end{cases}$$

Folgerung: Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert genau $|q| < 1$, dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}$$

(Satz Majoranten- und Minorantenkriterium, Vergleichssatz Korollar 2.7.7)

Es sei $0 \leq a_k, b_k$ mit $a_k \leq b_k$ ab einem K , dann gilt:

i) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert (Majorantenkriterium)

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergiert (Minorantenkriterium)

Bem: Schätze die Folge (a_n) für das Majorantenkriterium nach oben durch (b_n) ab und zeige, dass die Majorante konvergiert $\sum_k b_k$ ist, woraus folgt dass $\sum_k a_k$ konv. ist (analog für das Minorantenkriterium)

Bem: Offenbar braucht $a_k \leq b_k$ erst ab einem $K \in \mathbb{N}$ zu gelten, falls dies also

für endlich viele $k \leq K$ nicht gilt können wir $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{K-1} a_k}_{\text{als endliche Summe nicht relevant für konv.}} + \underbrace{\sum_{k=K}^{\infty} a_k}_{\text{Verwendet Majoranten- / Minorantenkriterium}}$

Bem: Zwei wichtige Reihen für das Vergleichskriterium

i) Geometrische Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergent genau $|q| < 1$

ii) (Riemannsches) Zeta Funktion: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ konvergent genau $s > 1$

Bsp 4.4.3. (Skript 2.7.8): $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert

Los: Sei $a_k = \frac{1}{k^2}$, $b_k = \frac{1}{k(k-1)}$, dann gilt $0 \leq a_k \leq b_k$ für alle $k \geq K=2$

Wir zeigen analog zum Bsp 4.4.1.) das $\sum_k \frac{1}{k(k-1)}$ konvergiert mittels Definition

$$S_n = \sum_{k=2}^n b_k = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n}$$

Vgl. Term oben

also
$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$$

da die Majorante b_k konvergiert, gilt nach dem Satz das $a_k = \frac{1}{k^2}$ konvergiert.

Bem: Wir hätten auch direkt darauf schliessen können, das $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert. (warum?)
 $\Rightarrow$ Riemannsche Zetafkt, $s=2$

Bsp 4.4.4: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ konvergiert

Lös: Sei $a_k = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ und $b_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$, offenbar gilt $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k}$

es gilt also $b_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{1}{k^{3/2}}$, also ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ eine Majorante,
die wegen Riemann mit $s=3/2 > 1$ konvergiert, von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ also
Konv. nach dem Majorante/Minorantenkriterium auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$.

Bsp 4.4.5: Konvergiert oder Divergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k + 1}{3^k + 1}$

Lös: offenbar gilt $3^k + 1 \geq 3^k$, also

$$\frac{2^k + 1}{3^k + 1} \leq \frac{2^k + 1}{3^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k + \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

offenbar konv. die Majorante $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k + \left(\frac{1}{3}\right)^k$ als Summe zweier geom. Reihen
mit $q_1 = 2/3$, $q_2 = 1/3$, womit auch die Minorante $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k + 1}{3^k + 1}$ konv ist.