Themenübersicht Exercise Session 5

5.0. Anmerkungen zur Serie (Induktion auf zwei vars)

5.1. Absolute Konvergenz von Reihen (Skript 2.7)

5.2 Leibniz und Dirichlet auf Reihen (Skript 2.7)

5.3. Quotienten und Wurzelkriterium (Skript 2.7)

5.4. Potenzreihen (Skript 2.7)

WICHTIG: Füllt bitte kurz die Umfrage von D-MATH bzgl der Übungsstunde aus

5.0. Anmerkungen zur Serie 3

- Für Induktionsbeweise mit zwei Variablen (wie Fibonacci) braucht ihr zwei Verankerungen (Base-Cases) und zwei Induktionshypothesen

5.1. Absolute Konvergenz von Reihen

(Definition, Nullfolgenkriterium)

Sei (a_n) eine Folge, so gilt

$$\lim_{k\to\infty} |a_k| \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergiert}$$

beziehungsweise äquivalent

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} |a_k| = 0$$

d.h. wenn die Reihe $\sum_k a_k$ konvergiert, so müssen die Glieder eine Nullfolge bilden, bzw. umgekehrt, wenn $\lim_{k\to\infty} |a_k|$ nicht Null ist kann $\sum_k a_k$ nicht konv.

Das Kriterium ist hinreichend (d.h. wenn eine Reihe konv. muss es erfüllt sein) aber nicht notwendig (d.h. es existieren divergente Reihen die eine Nullfolge als Glieder haben, vgl. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$)

Bsp 5.1.1. Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{1/k}$

Lös: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{1/k}$ divergiert da $|a_k| = k^{1/k}$ für $\lim_{k\to\infty} |a_k| = 1 \neq 0$

(Definition, Absolute Konvergenz, Skript 2.7.9)

Die Reihe $\sum_k a_k$ heisst absolut konvergent, falls

$$\sum_k |a_k|$$

konvergiert

(Satz Absolute Konvergenz, Skript 2.7.10)

Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent. Zudem gilt

$$\left| \sum_k a_k \right| \leq \sum_k |a_k|$$

Bem: Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz. Kann man also absolute Konvergenz einer Reihe nachweisen (was oft leichter ist) kann man direkt Konvergenz der Reihe folgern

Bem: Die Umkehrung des Satzes ist falsch (warum?), vgl. $\sum_n (-1)^n \cdot 1/n$ konv nach Leibniz, trotzdem ist die Reihe nicht absolut konvergent

Bsp. 5.1.2. Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2k}{3k+42}\right)^k$

Lös: Betrachten wir den Absolutbetrag der Reihe erhalten wir die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k}{3k+42}\right)^k$$

es gilt offenbar $\frac{2k}{3k+42} \leq \frac{2k}{3k} \leq \frac{2}{3}$

damit konvergiert der absolut Betrag der Reihe da die Majorante als Geometrische Reihe mit $q = 2/3 < 1$ konvergiert, nach Satz 2.7.10 über absolute Konvergenz konvergiert also auch die ursprünglich Reihe

Bsp. 5.1.3. Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k!}$

Lös: Offenbar wechselt das VZ permanent wegen $\sin k$, da $|\sin k| \leq 1$ ist $\sum_k \frac{1}{k!}$ eine Majorante der Absolutbetragsreihe, die Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium (siehe Bsp. später), damit also auch die ursprünglich Reihe.

5.2. Leibniz und Dirichlet auf Reihen

(Satz. Leibniz, Skript 2.7.12)

Sei eine alternierende Reihe $\sum_k (-1)^k a_k$ gegeben, falls

i) $a_k \geq 0$ ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ iii) $a_{k+1} \leq a_k$ (monoton fallend)

gilt so konvergiert die Reihe $\sum_k (-1)^k a_k$

Bem · Wenn wir die Konvergenz einer Majoranten einer Absolutreihe zeigen wolln aber bestenfalls auf $|(-1)^k a_k| \leq b_k = 1/n$ kommen, dann haben wir durch das eliminieren des $(-1)^k$ Terms zu grob abgeschätzt

(vgl. Harmon Reihe $\sum_k 1/k$ div. aber alternierende Harmon. Reihe $\sum_k (-1)^k 1/k$ konv.)

$\Rightarrow$ hier kann das Leibnizkriterium helfen

Bsp. 5.2.1 Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$

Lös: i) $a_k = \frac{1}{k} \geq 0$ ✓ ii) $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$ ✓, iii) $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k}$ ✓

damit folgt, dass die alternierende harmon. Reihe nach dem Leibnizkriterium konv. ist.

Bsp 5.2.2. Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{k^2}$

Lös: Offenbar gilt $\cos(n\pi) = (-1)^n$, also haben wir $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k^2}$

i) $a_n = \frac{1}{n^2} \geq 0$ ✓ ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, iii) $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2+2n+1} \leq \frac{1}{k^2} = a_k$

nach dem Leibnizkrit. ist die Reihe also konv.

Bem: Man hätte konv. in diesem Fall auch schneller als mit dem Leibnizkrit zeigen können (warum? die Absolutbetragsreihe konv. als Riemann mit $s=2$)

(Def. Umordnung)

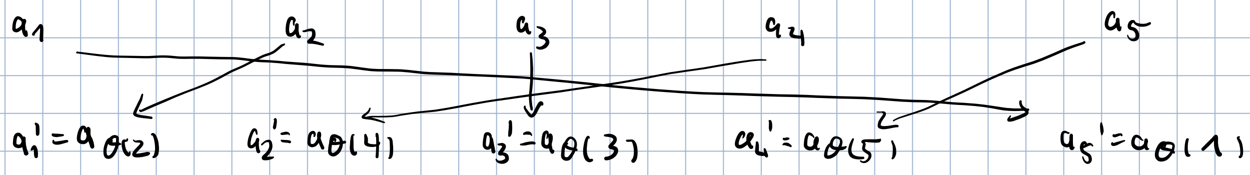
Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k'$ ist eine Umordnung der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$, falls eine bijektive Abbildung

$$\theta: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$$

existiert mit $a_k' = a_{\theta(k)}$

Bem: Da eine Permutation genau eine bijektive Abbildung einer Menge auf sich selbst ist, folgt daraus, dass jede Umordnung der Reihe eine Permutation der natürlich Zahlen ist

Wir permutieren also die Glieder, d.h.



(Umordnungssatz, Dirichlet, Skript 2.7.16)

Falls $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, dann konv. jede Umordnung der Reihe und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\theta(k)}$$

Bem: Wegen dieses Satzes wollen wir hauptsächlich mit absolut konvergenten Reihen arbeiten

5.3. Quotienten und Wurzelkriterium

(Satz, Quotientenkriterium, Skript 2.7.17)

Sei $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$, so gilt

i) $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ konvergiert

ii) $\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ divergiert

Bem: · In der Vorlesung wurde das Kriterium mit limsup, liminf definiert, falls $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ konvergent ist, sind obige Aussagen äquivalent mit lim

· Kriterium eignet sich bei Polynomen, Exponentialtermen und Fakultäten in a_n

Bsp 5.3.1 Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ (vgl. Bsp 5.1.3.)

Lös: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{(n!)}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$

also konv. die Reihe nach dem Quot. Krit.

Bsp. 5.3.2. Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

Lös: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^2\, 2^n}{2^{n+1}\, n^2}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \underbrace{\left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\right|}_{\to 1} = \frac{1}{2} < 1$

Bsp 5.3.3. Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$

QK: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 > 1$, also divergiert die Folge

Bsp 5.3.4 Konv. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

QK: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$

Bem: Was wenn $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$? Dann können wir i. Allg. keine Aussage machen und müssen die Konvergenz anders charakterisieren

(Satz, Wurzelkriterium, Skript 2.7.20)

Sei $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$, so gilt

i) $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ konvergiert

ii) $\liminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ divergiert

Bem: · Kriterium eignet sich bei Gliedern mit Potenzen in Abhängigkeit von n

Bsp. 5.3.5 Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{1/n} - 1)^n$

Lös: WK: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\boxed{n^{1/n}}}_{\to 1} - 1 = 0 < 1$

also konv. die Reihe nach dem WK

Bsp 5.3.6. Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n$

WK: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} 2 + \underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{\to 0} = 2 > 1$,

also div. die Reihe nach dem WK

5.4. Potenzreihen

(Definition, Potenzreihe)

Eine Potenzreihe ist gegeben als

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

mit z einer Variablen in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und c_k eine relle oder komplexe Folge.

(Def. Exponentialfunktion)

Die Exponentialfunktion ist definiert durch ihre Potenzreihe, die gegeben ist als

$$e^z = \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

(Satz Konvergenzradius ρ)

Es gibt drei Möglichkeiten für eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

i) Für $z \neq 0$ divergiert $\sum_k c_k z^k$, wir sagen der Konvergenzradius ist $\rho = 0$

ii) Für alle $z \in \mathbb{R}$ (bzw. $z \in \mathbb{C}$) konvergiert $\sum_k c_k z^k$ absolut, wir sagen $\rho = \infty$ (bspw. $\exp(z)$)

iii) Es gibt ein $\rho \in (0, \infty)$, sodass

- $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ konv. absolut für $|z| < r$
- $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ divergiert für $|z| > r$
- Für $z = \rho$ hat man keine Aussage

(Satz, Bestimmung des Konvergenzradius ρ)

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ eine Potenzreihe, so gilt für den Konvergenzradius ρ

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Bsp. 5.4.1. Bestimme den Konvergenzradius ρ von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{k!}\right) \cdot z^k}_{c_k \cdot z^k}$, $z \in \mathbb{R}$

Lös: $\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$

also konv. die Potenzreihe $\forall z \in \mathbb{R}$

Bsp 5.4.2. Bestimme ρ von $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{a}{k}\right)^{k^2} z^n$, wobei $a \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{a}{n}\right)^n} = \frac{1}{e^a} = e^{-a}$$

also konv. die Potenzreihe $\forall z \in \mathbb{R}.\ |z| < e^{-a}$ und div. $\forall z \in \mathbb{R}.\ |z| > e^{-a}$