

Themenübersicht Exercise Session 6 : Stetige Funktionen

6.0. Anmerkungen zu Serie 4, Feedback

6.1 Stetige Funktionen [Skript 3.1, 3.2]

6.2 Zwischenwertsatz (ZWS) [Skript 3.3]

6.3 Min-Max- Satz [Skript 3.4]

6.0. Anmerkungen Serie 4, Feedback

4.2. Beweis zu konvergenten Folgen

Wie geht man beweise zu Folgen an? Wie gehabt: oftmals defn + straightforward idce

Gegeben: $(a_n), (b_n)$ Folgen, $a_n, b_n > 0$, Angenommen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, für ein $L > 0$

a) z: $\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N: \frac{L}{2} b_n < a_n < \frac{3L}{2} b_n$

Nach Defn. Konvergenz: $\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N: \left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \varepsilon$

d.h. lösen wir auf:

$$\forall n \geq N \text{ folgt } \left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - L < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow (L - \varepsilon) b_n < a_n < (L + \varepsilon) b_n$$

Also, für $\varepsilon = \frac{L}{2}$ gilt offenbar $(L - \frac{L}{2}) b_n < a_n < (L + \frac{L}{2}) b_n$

$$\Leftrightarrow \frac{L}{2} b_n < a_n < \frac{3L}{2} b_n, \text{ qed.}$$

b) z: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konv.}$

Wie oftmals in Ana1 baren Teilaufgaben aufeinander auf, behaltet also immer im Hinterkopf wie euch das eben gelöste hier helfen könnte

" $\Rightarrow$ " Wir dürfen annehmen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Da aber gilt

$\frac{L}{2} b_n < a_n$ können wir a_n als konvergierendes Majorante ansehen:

nach dem Vergleichssatz konv. also auch $\sum_{n=N+1}^{\infty} b_n$

" $\Leftarrow$ " Analog

Final: Da Konvergenz nie von endlich vielen Termen abhängt, also insbesondere nicht von ihren ersten N , folgt die Behauptung

c) Finde zwei konkrete Folgen mit $a_n, b_n > 0$, $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$, $\sum a_n$ konv., $\sum b_n$ div

Einfachste Lösung $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n}$: $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$

und $\sum \frac{1}{n^2}$ konv. (Riemann mit $s=2$), aber $\sum \frac{1}{n}$ div. (harmon)

6.1. Stetige Funktionen

Funktionen als Vektorraum

In linearer Algebra habt ihr Vektorräume (VR) kennengelernt. Es ist sehr nützlich sich Funktionen als Elemente eines Vektorraums zu betrachten:

Sei $D \subset \mathbb{R}$ beliebig, dann ist

$$F(D) = \{ f: D \rightarrow \mathbb{R} \}$$

ein VR über $\mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften

- i) $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$
- ii) $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$
- iii) $(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) f_2(x) = f_2(x) f_1(x)$ (kommutativer Ring)

Nun können wir den Unterraum (UR), versehen mit dem Namen $C(D)$ aller stetigen Funktionen betrachten:

$$C(D) = \{ f: D \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$$

Man schreibt statt $C(D)$ auch oftmals $C^0(D)$. Offenbar gilt $C(D) \subset F(D)$

Einführung in Stetigkeit

Intuitiv und mathematisch inkorrekt/unvollständig kennt man Stetigkeit charakterisiert durch:

- Es gibt keine Sprünge, Lücken oder Unendlichkeitsstellen im Graphen
- Wenn man sich einem bestimmten Punkt x_0 auf der x-Achse nähert, dann nähert sich auch der Funktionswert $f(x_0) = y$ dem Wert an auf den x_0 abgebildet wird

Machen wir dies nun mathematisch rigoros und formal kommen wir auf folgende Definitionen.

(Definition Stetigkeit, Skript 3.2.1)

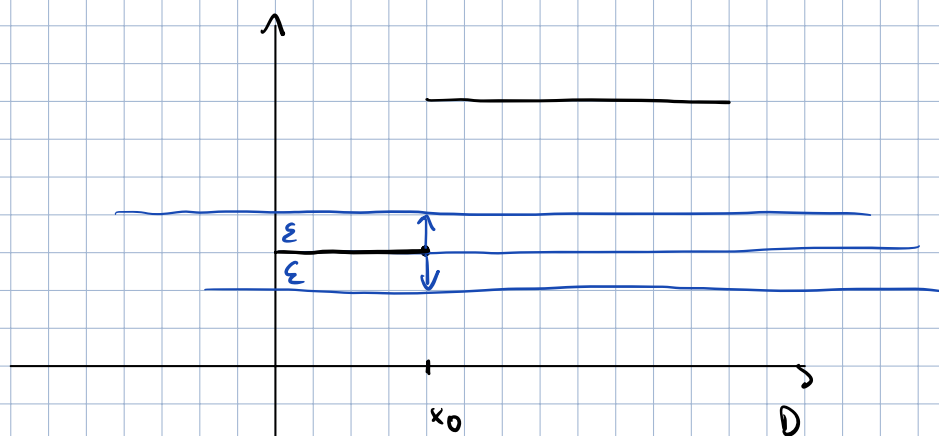
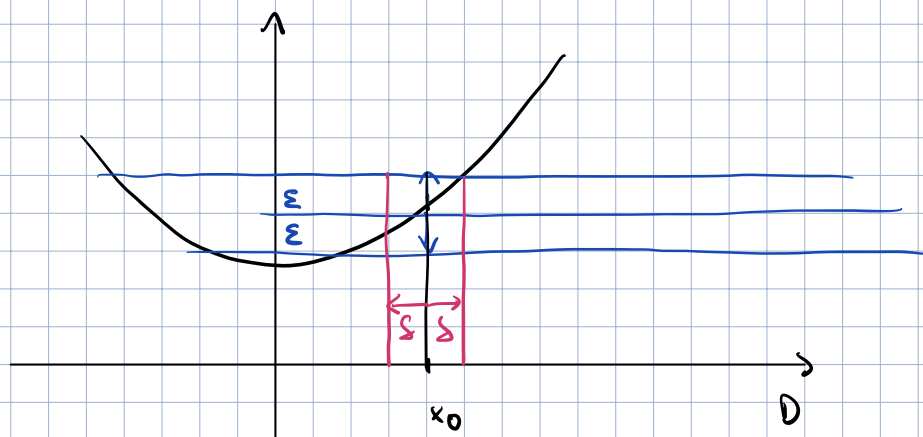
Sei $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Wir nennen eine Funktion stetig beim Punkt $x_0 \in D$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta(\varepsilon, x_0). \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Wir nennen f auf D stetig, falls f in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.

Wir nennen $C(D)$ den Raum aller stetigen Funktionen auf D .

Graphisch: Applet Einsiedler (s. Link Website)



Hier kann man (für ε klein genug) offenbar kein δ finden, sodass die obige Bedingung erfüllt ist. Offenbar können also Funktionen die "Sprünge" enthalten nie an ihren "Sprungstellen" stetig sein

Bsp. C.1.1. Beweise die Stetigkeit von $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$

Lös: Wir gehen ähnlich wie bei den ε -Beweisen bei Folgen vor: um Stetigkeit von q auf $D = \mathbb{R}$ zu zeigen, muss Definition also für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gelten. Sei x_0 also beliebig aber fixiert. Nun wähle beliebig kleines $\varepsilon > 0$. Bleibt zu zeigen, dass ein δ existiert, sodass für alle x in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt $|q(x) - q(x_0)| < \varepsilon$, also

$$|q(x) - q(x_0)| = |x^2 - x_0^2| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < x^2 - x_0^2 < \varepsilon$$

Fallunterscheidung:

$$\text{i) } x^2 - x_0^2 < \varepsilon \Rightarrow x^2 < \varepsilon + x_0^2 \Rightarrow x < \sqrt{\varepsilon + x_0^2}$$

$$\text{ii) } -\varepsilon < x^2 - x_0^2 \Rightarrow x_0^2 - \varepsilon < x^2 \Rightarrow \sqrt{x_0^2 - \varepsilon} < x$$

für x mit $\sqrt{x_0^2 - \varepsilon} < x < \sqrt{\varepsilon + x_0^2}$ gilt also $|q(x) - q(x_0)| < \varepsilon$. Also haben wir

unsere δ -Umgebung gefunden: $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$ mit $\delta_1 = x_0 - \sqrt{x_0^2 - \varepsilon}$, $\delta_2 = \sqrt{\varepsilon + x_0^2} - x_0$
[denn $|x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$]

Da das Intervall i. Allg. nicht symmetrisch ist wählen wir das Minimum, $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$.

Für dieses δ gilt also für beliebiges $x_0 \in D = \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta(\varepsilon, x_0). \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

damit ist f auf $D = \mathbb{R}$ stetig.

(Satz: Charakterisierung der Stetigkeit mittels konvergenter Folgen, Skript 3.2.4)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig in x_0 , genau dann wenn

für alle Folgen mit $a_n \in D$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$.

Bem: Diese Charakterisierung ist in der Praxis oft wichtig, weil sie einfacher zu überprüfen ist (vgl. δ - ε -Beweis oben)

Bsp. 6.1.2 Beweise die Stetigkeit von $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$

Damit f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist, sei x_0 beliebig aber fixiert. Sei (a_n) eine beliebige Folge

mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$. Bleibt zu zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) = x_0 \cdot x_0 = x_0^2 = f(x_0)$$

(Korollar: Eigenschaften von stetigen Funktionen, Skript 3.2.5)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, so gilt

- i) $f+g$ ist stetig
- ii) $f \cdot g$ ist stetig
- iii) f/g ist stetig, falls $g \neq 0$

Bem: Obiges gilt auch für $f, g|_{x_0}$

Bem: Hat man $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: f(D) \rightarrow \mathbb{R}$, und sind f, g stetig so ist $g \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

(Definition: Stetigkeit von Polynomen, Skript 3.2.6, 3.2.7, 3.2.8)

Mit den Rechenregeln für Stetigkeit folgt:

- Alle Polynome mit reellen Koeffizienten sind stetig
 - Alle Quotienten von Polynomen sind stetig, solange der Nenner nicht verschwindet
 - Jede Potenzreihe ist auf ihrem Konvergenzradius eine stetige Funktion, da $\rho = +\infty$
- für $\exp, \sin$ und $\cos$ sind diese Funktionen überall stetig

Bsp 6.1.3: Ist $\frac{\cos(x) + \sin(x) + x^5 - 2}{e^x + 3} = f(x)$

Lös: Als Komposition stetiger Funktionen ($\sin$, $\exp$), und da $e^x + 3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ (also nicht verschwindet) ist $f(x)$ stetig

Bsp 6.1.4: Zeige, dass $g(x) = \exp(\exp(x^3 - 2))$ auf $D = \mathbb{R}$ stetig ist

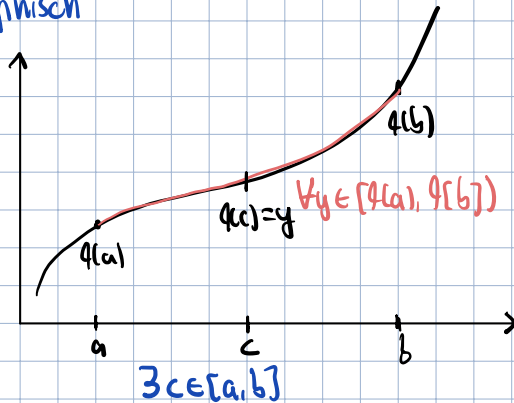
Die Funktionen $x \mapsto (x^3 - 2)$ und $x \mapsto \exp(x)$ sind stetig in $D = \mathbb{R}$ (vgl. Skript, Polynom und $\exp$ -fkt), so ist auch die Komposition dieser stetig

6.2. Der Zwischenwertsatz (ZWS)

(Zwischenwertsatz, Skript 3.3.1)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für alle $a, b \in I$ mit $a < b$ und für alle $y \in [f(a), f(b)]$ gibt es mindestens ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = y$.

Graphisch



Kontext: habt ihr eine stetige Funktion und wollt "von $f(a)$ nach $f(b)$ ", müsst ihr jeden Wert y zwischen $[f(a), f(b)]$ mindestens einmal angenommen haben: d.h. umgekehrt, dass es für diesen y ein $c \in [a, b]$ geben muss mit $y = f(c)$.

Bsp. 6.2.1 Beweise, dass $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$ eine Nullstelle in $[1, 2]$ hat

Los: f ist ein Polynom und als solches stetig, also dürfen wir den ZWS anwenden.

Da gilt

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0 \quad \text{und} \quad f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$$

nach dem ZWS muss f alle Werte in $[f(1), f(2)] = [-1, 12]$ annehmen, also

muss insb. ein $c \in [1, 2]$ liegen, sodass $f(c) = 0 \in [-1, 12]$, unsere gesuchte Nullstelle

6.3. Der Min-Max Satz

(Definition kompaktes Intervall, Skript 3.4.2)

Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist kompakt, falls es von der Form

$$I = [a, b], \quad a \leq b$$

ist, d.h. abgeschlossen (enthält a und b) und beschränkt (liegt zwischen a und b) ist.

(Satz: Min-Max Satz, Skript 3.4.5)

Sei $a \leq b$ in $\mathbb{R}$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt: stetige Funktionen nehmen auf kompakten Intervallen Minimum und Maximum an.

Insbesondere ist f beschränkt.

Graphisch

