Exercise Session 7

7.0. Anmerkungen zur Serie

7.1. Semesterrecap

7.2. Recap Folgen und Exams/Übungsaufgaben

7.3. Recap Reihen und Exams/Übungsaufgaben

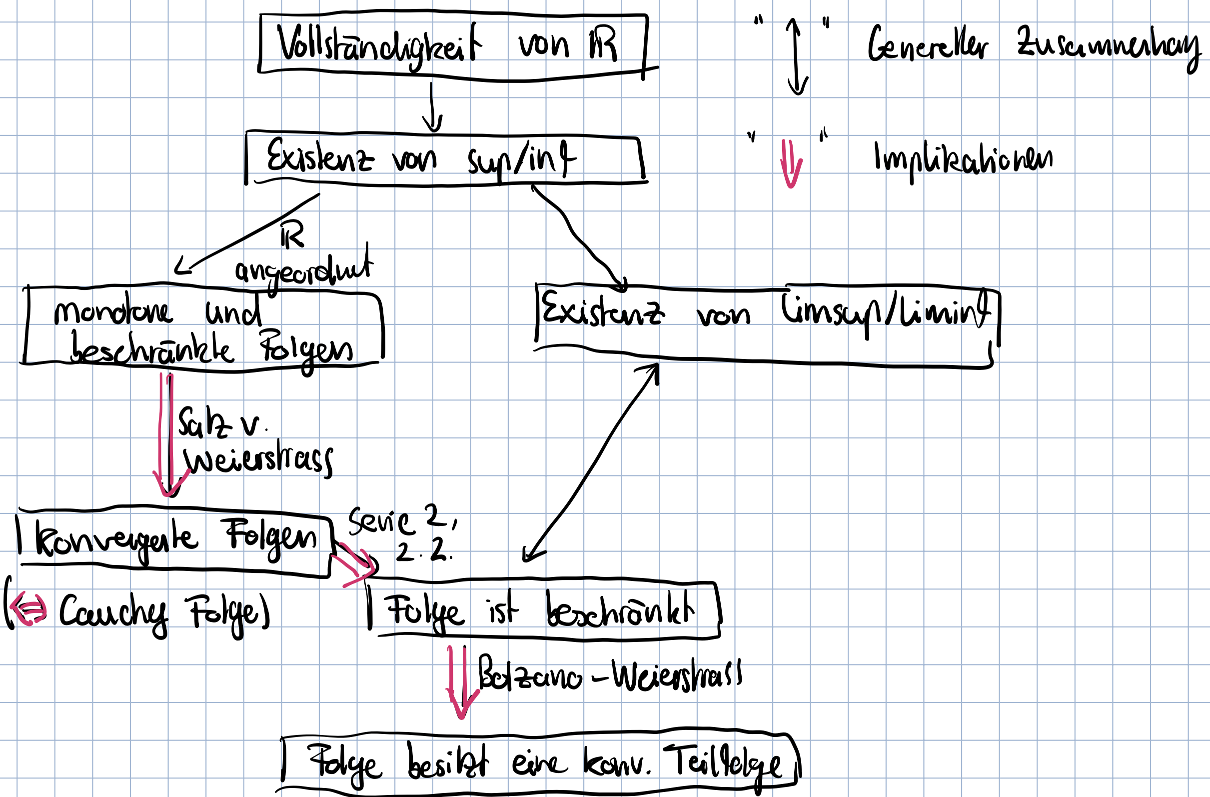
7.0. Anmerkungen zur Serie

- Wurzel-/Quotkrit mit Wert 1 macht keine Aussage, insb. kann man daraus nicht folgern, dass "$1 < 1 \Rightarrow$ nicht abs. konv."
- Aufpassen wann sich welches Kriterium am besten eignet!
- 5.4c) zeigen, dass etwas nicht hält: immer am besten einfaches konkretes Gegenbeispiel angeben

7.1 Semesterrecap

Wir wollen im Folgenden den bereits behandelten VL-Stoff der Exams-relevant ist wiederholen und dann dazu Aufgaben lösen.

Zusammenhangs übersicht



Bem: · Alles bis jetzt gesehene hängt stark miteinander zusammen

· Fast alles basiert auf dem Fakt, dass die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ein vollständiger, angeordneter Körper ist

· Die meisten Sätze für Reihen basieren auf den Sätzen oben im Diagramm, angewandt auf die Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

d.h. Reihen basieren auch auf der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

1. FOLGEN

Folgen: Definition und Rechenregeln

Konvergenzdefinition

Folge (a_n) konv. gegen A $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0.\ \exists N \in \mathbb{N}.\ \forall n \geq N.\ |a_n - A| < \varepsilon$

Rechenregeln

Seien (a_n), (b_n) konvergente Folgen mit Grenzwerten a, b dann gilt:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = a + b$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$

3) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, falls $b \neq 0$

Folgen: Konvergenzkriterien

Konvergenzcharackterisierung (Sandwich Theorem)

Seien (a_n), (b_n), (c_n) konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Angenommen

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} c_n = A$, dann $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = A$

Cauchy Kriterium

Eine Folge auf $\mathbb{R}$ (a_n) konvergiert, genau dann wenn

$\forall \varepsilon > 0.\ \exists N \in \mathbb{N}.\ \forall n, m \geq N: \ |a_n - a_m| < \varepsilon$

Weierstrass

Ist die Folge (a_n) nach oben (bzw. unten) beschränkt und monoton wachsend (bzw. monoton fallend) dann ist (a_n) konvergent.

Bsp Konvergiert die rekursive Folge $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6)$, und falls ja wohin

Lös: Teleskopiere etwas, d.h. $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 5$, $a_4 = 5.5$, $a_5 = 5.75$, ...

Schritt 1: Monotonie via vollständiger Induktion zeigen, also $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_{n+1}$

Induktions Anfang $(n=1)$: $a_1 = 2 \leq 4 = a_2$ ✓

Induktionsschritt ("$n \Rightarrow n+1$"): Nehme als Induktionshypothese an, dass $a_n \leq a_{n+1}$ gilt.

$a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow a_n + 6 \leq a_{n+1} + 6 \Rightarrow \underbrace{\left|\frac{1}{2}(a_n + 6)\right|}_{:= a_{n+1}} \leq \underbrace{\left|\frac{1}{2}(a_{n+1} + 6)\right|}_{:= a_{n+2}} \Rightarrow a_{n+1} \leq a_{n+2}$

Per mathematischer Induktion gilt somit, dass $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_{n+1}$ gilt

Schitt 2: Beschränktheit mittels vollständiger Induktion zeigen

Induktionsanfang ($n=1$): $a_1 = 2 \leq 6$ ✓

Induktionsschritt ("$n \Rightarrow n+1$"): Nehme als Induktionshypothese an, dass $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq 6$ gilt.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6) \overset{\text{I.H.}}{\leq} \frac{1}{2}(6+6) = 6$$

Per mathematischer Induktion gilt somit, dass $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq 6$ gilt

Schitt 3: Schlussfolgerung über Konvergenz und Bestimmung des Grenzwerts

Da (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, konvergiert a_n.

Der Grenzwert entspricht:

$$\underbrace{\boxed{a_{n+1}}}_{\to a} = \frac{1}{2}(\underbrace{\boxed{a_n}}_{\to a} + 6) \Rightarrow a = \frac{1}{2}(a+6) \Rightarrow a = 6$$

Aufgaben Folgen

A1.1. MC Fragen

(Mehrere richtige Antwortmöglichkeiten)

FS18

(a) Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist die Aussage $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ äquivalent zu

- ☐ $\forall\, K \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall\, n \geq N:\ a_n \leq -K$.
- ☐ $\forall\, \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall\, n \geq N:\ |a_n| < \epsilon$.
- ☐ $\forall\, N \in \mathbb{N}\ \exists K \in \mathbb{N}$, so dass $\forall\, n \geq N:\ a_n \leq -K$.
- ☐ $\forall\, N \in \mathbb{N}\ \exists \epsilon > 0$, so dass $\forall\, n \geq N:\ |a_n| < \epsilon$.

FS18

(e) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Antwortmöglichkeiten sind korrekt?

- ☐ Wenn $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, dann ist auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.
- ☐ Wenn $0 \leq b_n \leq a_n^3$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_n \to 0$ für $n \to \infty$, dann konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- ☐ Wenn $|a_n - b_n| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann konvergieren beide Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- ☐ Wenn $(b_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

HS18

(d) Es gilt $x_n \to x_0$ genau dann wenn,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \geq 1,\ \forall n \geq N,\ |x_n - x_0| < \varepsilon.$$

Wahr ☐ Falsch ☐

FS20

(d) Seien $(a_k)_{k\geq 1}, (b_k)_{k\geq 1}$ und $(c_k)_{k\geq 1}$ drei Folgen. Sei $(d_k)_{k\geq 1}$ definiert durch

$$d_k = \frac{(a_k)^2 + \sin(b_k)}{1 + \exp(c_k)}.$$

Geben Sie für jede folgender Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist.

(i) **[2 pkt]** Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ absolut konvergieren, gilt $\lim_{k\to\infty} d_k = 0$.

(A) wahr.

(B) falsch.

(ii) **[2 pkt]** Wenn $(d_k)_{k\geq 1}$ beschränkt ist, muss mindestens eine der Folgen $(a_k)_{k\geq 1}$, $(b_k)_{k\geq 1}$ und $(c_k)_{k\geq 1}$ beschränkt sein.

(A) wahr.

(B) falsch.

1.MC1 [1 Punkt] Sei (a_n) eine reelle Folge. Was ist die konkrete Bedeutung der folgenden Aussage?

FS23

$$\forall T \geq 1, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, a_n < -T.$$

(A) $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

(B) $\lim_{n\to+\infty} a_n$ existiert nicht.

(C) $\lim_{n\to+\infty} a_n > 0$.

(D) $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$.

FS23

1.MC2 [1 Punkt] Sei (a_n) eine reelle Folge. Welche mathematische Aussage bedeutet, dass (a_n) das Cauchy-Kriterium erfüllt?

(A) $\exists \varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, \forall m \geq N, |a_n - a_m| < \varepsilon$.

(B) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, \exists m \geq N, |a_n - a_m| < \varepsilon$.

(C) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, \forall m \geq N, |a_n - a_m| < \varepsilon$.

(D) $\forall \varepsilon > 0, \forall N \geq 1, \forall n \geq N, \forall m \geq N, |a_n - a_m| > \varepsilon$.

1.MC5 [1 Punkt] Sei (a_n) eine Folge von positiven reellen Zahlen, die das Cauchy-Kriterium erfüllt. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

FS23

(A) Die Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n$ ist konvergent.

(B) Die Folge (a_n) konvergiert gegen 0.

(C) Die Folge $(1/a_n)$ ist beschränkt.

(D) Die Folge (a_n) hat eine konvergente Teilfolge.

A.1.2 (PVW Hands-on 2)

Sei $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ mit: $a_1 = \sqrt{6}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$ $(\forall n > 1)$

Untersuche Folge auf Konv. und bestimme Grenzwert (falls existiert)

A1.2. $a_1=\sqrt{6}$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n+6}$ $(\forall n\geq 1)$, konv? Falls ja, bestimme Grenzwert

Lös: Via Allgemeines Rezept: Z: 1) Monoton wachsend (Induktion)

+ 2) Beschr. von oben (Induktion)

$\Rightarrow$ Konv.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$ um Grenzwert zu bestimmen

1) Monoton wachsend

IA: $a_1=\sqrt{6}\geq 0$, also $a_2=\sqrt{a_1+6}\geq\sqrt{0+6}=a_1$

IS: Wir nehmen als IH an $a_n\leq a_{n+1}$, so gilt

$$a_{n+2}=\sqrt{a_{n+1}+6}\overset{IH}{\geq}\sqrt{a_n+6}=a_{n+1} \qquad \text{qed}$$

2) Nach oben beschränkt

Idee: Teleskopie: $\sqrt{6}\leq\sqrt{9}=3$

$\leq\sqrt{a_n+6}=\sqrt{3+6}=3$

Idee: obere Schranke bei 3

IA: $a_1=\sqrt{6}\leq\sqrt{6+3}=3$ ✓

IS: Wir nehmen als IH an $a_n\leq 3$ (für beliebiges aber fixiertes $n\geq 1$)

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n+6}\leq\sqrt{3+6}=3 \qquad \text{qed}$$

Wegen Punkten 1 und 2 folgt nach Weierstrass (Monoton-Konvergenzsatz) dass (a_n) konv., d.h. $\exists a\in\mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$

$\Leftrightarrow$ $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} a_n+6}=\sqrt{a+6}$

$\Rightarrow$ $a^2-a-6=0$ $\Leftrightarrow$ $(a+2)(a-3)=0$ $\Rightarrow$ $a_1=-2$, $a_2=3$

da aber $a\geq 0$ $(\forall n\geq 1)$ entfällt a_1, also ist der Grenzwert $a=3$

2. REIHEN

Reihen: Definitionen, Rechenregeln

Konvergenzdefinition: Reihe

Wir sagen, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent ist, falls die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ der Partialsummen konvergiert, wir schreiben

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Rechenregeln: Konvergente Reihen

Seien $\Sigma_k a_k$, $\Sigma_k b_k$ konvergente Reihen, so gilt das auch die folgenden Reihen konvergent sind, es gilt:

i) $\Sigma_k a_k + b_k = \Sigma_k a_k + \Sigma_k b_k$

ii) $\Sigma_k a_k - b_k = \Sigma_k a_k - \Sigma_k b_k$

iii) $\Sigma_k A \cdot a_k = A \cdot \Sigma_k a_k$ (mit $A \in \mathbb{C}$)

(Definition, Absolute Konvergenz, Skript 2.7.9)

Die Reihe $\Sigma_k a_k$ heisst absolut konvergent, falls

$$\Sigma_k |a_k|$$

konvergiert

Reihen: Konvergenzkriterien

Nullfolgenkriterium

Sei (a_n) eine Folge, so gilt

$$\lim_{k\to\infty} |a_k| \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergiert}$$

beziehungsweise äquivalent

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} |a_k| = 0$$

Majoranten- und Minorantenkriterium, Vergleichssatz

Es sei $0 \leq a_k, b_k$ mit $a_k \leq b_k$, dann gilt:

i) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert (Majorantenkriterium)

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergiert (Minorantenkriterium)

Zusatz zum Vergleichssatz: Absolute Konvergenz

Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent. Zudem gilt

$$\left| \sum_k a_k \right| \leq \sum_k |a_k|$$

Leibnizkriterium

Sei eine alternierende Reihe $\sum_k (-1)^k a_k$ gegeben, falls

i) $a_k \geq 0$ ii) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ iii) $a_{k+1} \leq a_k$ (monoton fallend)

gilt so konvergiert die Reihe $\sum_k (-1)^k a_k$

Quotientenkriterium

Sei $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$, so gilt

i) $\limsup_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ konvergiert

ii) $\liminf_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ divergiert

Wurzelkriterium

Sei $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$, so gilt

i) $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ konvergiert

ii) $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ divergiert

Potenzreihen

Definition Potenzreihe,

Eine Potenzreihe ist gegeben als

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

mit z einer Variablen in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und c_k eine relle oder komplexe Folge.

Potenzreihe: Konvergenzkriterien

Konvergenzradius ρ

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ eine Potenzreihe, so gilt für den Konvergenzradius ρ

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \frac{1}{\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Aufgaben Reihen

A2.1: Untersuche $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(\log n)^n}$ auf Konvergenz

A.2.2. Betrachte die Folge (a_n) die induktiv durch

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \left(\frac{1}{n} + \sin(n)\right) a_n, \ n \geq 1$$

definiert ist. Untersuche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz

A.2.3 Welchen Wert hat

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\pi i}{3}\right)^n$$

A2.4. Untersuche folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

A.2.5 Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe. Untersuche

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3 + \sin(a_n)}{4}\right)^n$$ auf Konvergenz

A2.6. (Hands-On Reihen PVW)

Untersuche das Konvergenzverhalten folgender Reihen

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + (-1)^n}{2^n 3^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + 2n + n^2 + \sin(2n)}{n^3 + 1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^8 + n^3 - 1}}$

Lösungen : Aufgaben Reihen

A2.1. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(\log n)^n}$ konv ?

Lös: $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{n}{(\log n)^n}\right|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{n^{1/n}}{\log(n)} \overset{\lim_{n\to\infty} n^{1/n}=1}{=} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n)} = 0 < 1$

nach dem WK konv. die Reihe absolut

A2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, mit $a_1 = 2$ $\quad a_{n+1} = \frac{1+\sin(n)}{n} a_n$, $n \geq 1$, konv ?

Lös: $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \limsup_{n\to\infty} \frac{|1+\sin(n)|}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0 < 1$

nach dem QK konv. die Reihe absolut

A.2.3. Wert von $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{3}i\right)^n}{n!}$

Lös: Erinnerung: $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. und Euler ($\mathbb{C}$): $e^{ix} = \exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi i}{3}\right)^n}{n!} = \exp\left(\frac{\pi i}{3}\right) \overset{\text{Euler}}{=} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

A2.4 $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right)$ konv. ?

Lös: Achtung: teleskopreihe, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = (\log(1) - \log(2)) + (\log(2) - \log(3)) + (\log(3) - \log(4)) + \dots$$

also ist der Wert $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \log(1) - \log(n+1) = -\infty$

also divergiert die Reihe

A2.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3+\sin(a_n)}{4}\right)^n$, konv ? (Annahme: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konv.)

Lös: Was folgt aus Annahme ? $\sum_n a_n$ konv $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{|3+\sin(a_n)|^n}{|4|^n}\right)^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{3+\sin(a_n)}{4} = \frac{3 + \overbrace{\boxed{\limsup_{n\to\infty} \sin(\overset{\to 0}{a_n})}}^{\to 0}}{4}$$