

Exercise Session 8

8.1. Umkehrabbildung [Skript 3.6]

8.2. Punktweise Konvergenz von Funktionenfolgen [Skript 3.7]

8.3. Gleichmässige Konvergenz von Funktionenfolgen [Skript 3.7]

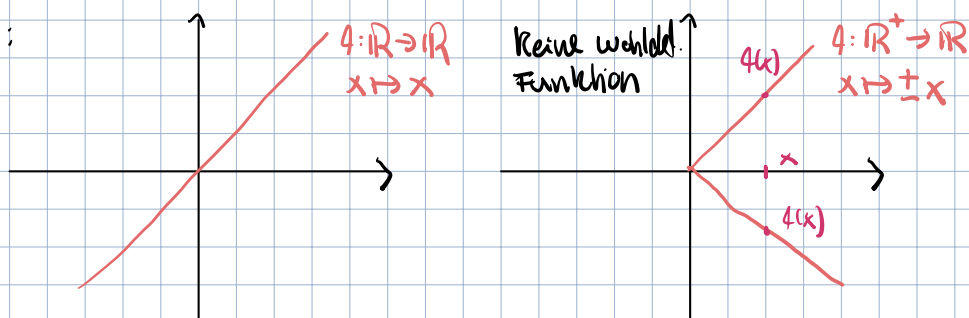
8.4. Punktweise und Gm. Konv. von Reihen stetiger Funksn [Skript 3.7]

§.1. Umkehrabbildung

(Defn. Funktion)

Eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ ist eine Teilmenge der Relation $X \times Y$, sodass jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zugeordnet ist, nämlich $y = f(x)$ (vgl. Wohldefiniert aus Disk Math)

Bsp: Funktionen:



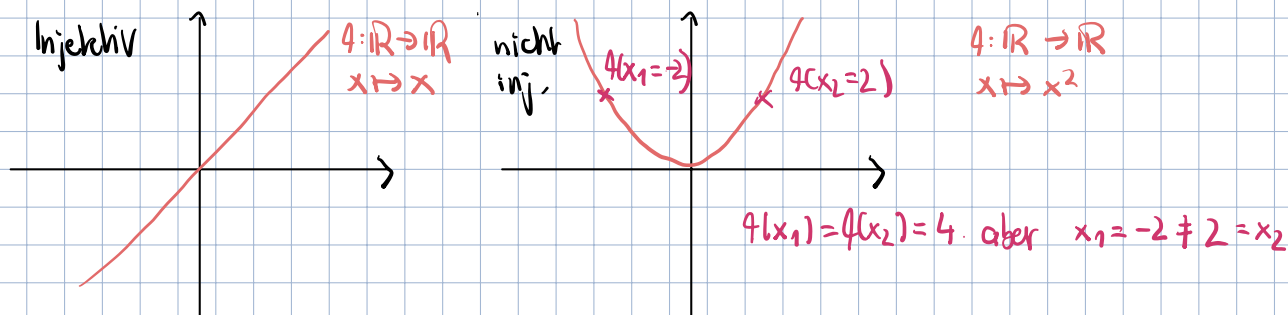
(Defn. Injektiv)

Eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ ist injektiv, falls

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{oder} \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

d.h. verschiedene Werte $x \in X$ dürfen nicht auf denselben Wert $y \in Y$ abgebildet werden.

Bsp: Injektiv



Bem: Man kann Injektivität von f zeigen, indem man strenge Monotonie zeigt!

Strenge Monotonie sagt: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (wachsend) oder $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ (fallend)

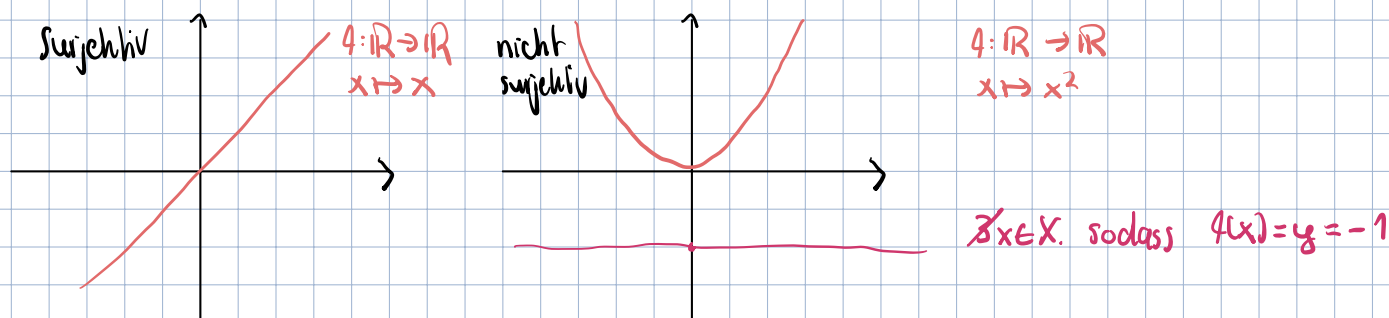
(Defn. Surjektiv)

Eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ ist surjektiv, falls

$$\forall y \in Y. \exists x \in X. f(x) = y$$

d.h. jedes $y \in Y$ wird mindestens einmal angenommen.

Bsp: Surjektiv



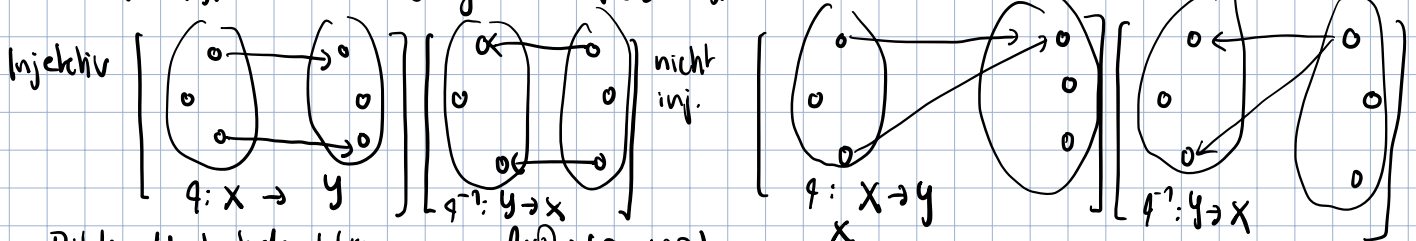
Defn. Bijektiv

Eine Funktion ist bijektiv, falls sie injektiv und surjektiv ist.

(Satz Umkehrabbildung, Skript 3.5.3)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton (d.h. injektiv). Dann ist nach dem Zwischenwertsatz $f(I) = J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall sodass $f^{-1}: J \rightarrow I$ stetig und streng monoton ist.

Bem: Wir können nur dann eine Umkehrabbildung erstellen, wenn f injektiv ist, da sonst die Eindeutigkeit verletzt ist (nicht mehr wohldef.)

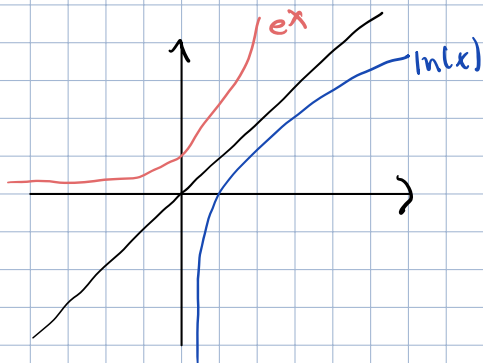


Bsp: Bilde Umkehrfunktion von $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $x \mapsto e^x$

Lös: f ist i) stetig und ii) streng monoton wachsend ($\frac{\partial e^x}{\partial x} = e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$) also injektiv. Damit können wir die Umkehrabbildung bilden:

$$f(x) = y = e^x \Rightarrow \ln(y) = x$$

also ist $f^{-1}(x) = \ln(x)$ die Umkehrabb. mit $f^{-1}: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

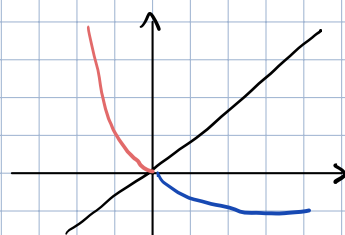
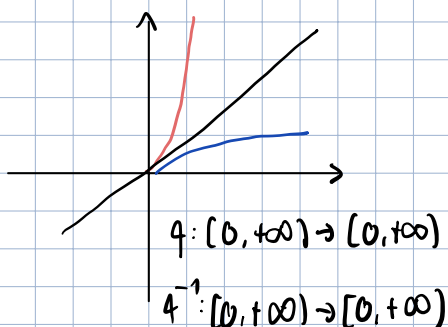


Bsp: Bilde falls ex. die Umkehrfunktion von $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $x \mapsto x^2$

Lös: f ist i) stetig (als Polynom), ii) streng monoton da $\frac{\partial x^2}{\partial x} = 2x > 0 \forall x \in (0, +\infty)$, also injektiv, also existiert die Umkehrabbildung mit

$$f(x) = y = x^2 \Rightarrow \sqrt{y} = x$$

also $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, mit $f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$



Bsp (FS21): Analysiere folgende Funktion f auf strenge Monotonie und bestimme falls möglich eine Inverse (gebe Defn. + Wertebereich von f^{-1} an)

$$f(x) = \ln(x-17) + 2, x \in (17, +\infty), f: (17, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

Los: f ist streng monoton wachsend da $\frac{df}{dx} = \frac{1}{x-17} > 0 \forall x \in (17, +\infty)$, also ist f injektiv und f ist stetig (ln+poly+const) also ex. eine Umkehrabb. Inverse f^{-1} gegeben als

$$f(x) = y = \ln(x-17) + 2 \Rightarrow y-2 = \ln(x-17)$$

$$\Rightarrow e^{y-2} = x-17$$

$$\Rightarrow e^{y-2} + 17 = x$$

gegeben als $f^{-1}(x) = e^{x-2} + 17$, $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (17, +\infty)$

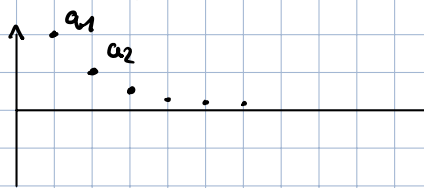
5.2. Punktweise Konvergenz

Einführung in Funktionenfolgen

Anstatt wie im vorherigen Kapitel Folgen von Zahlen (in $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C}$) zu betrachten wie

$$(a_n)_{n \geq 1} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$



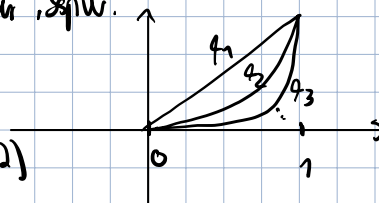
oder Folgen von Partialsummen

$$(S_n)_{n \geq 1}, S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$$

Betrachten wir nun Funktionen als Folgenglieder, d.h.

$$(f_n)_{n \geq 1} = f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

$$(x^n)_{n \geq 1} = x, x^2, \dots, x^n, \dots \quad (f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R})$$



(Def. Punktweise Konvergenz, Skript 3.7.1)

Eine Folge Funktionen $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ konv. Punktweise gegen eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, falls:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{alternativ} \quad \forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Bsp 8.2.1. (Skript 3.7.1): $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \quad (\text{vgl. Skript 2.2.3}) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$



Bem: $f_n(x) = x^n$ ist stetig, f aber nicht. Begriff der punktweisen Stetigkeit offenbar zu schwach, brauchen stärkeren Begriff: Einführung von gleichmäßig Stetigkeit

(Definition Gleichmässige Konv., Alternative Defn. zum Skript vgl. Vorlesung)

Eine Folge stetiger Funktionen $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ konv. glm. gegen f , falls gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad \text{alternativ} \quad \forall \varepsilon > 0. \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. \forall x \in D. |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Korollar (Skript 3.7.7): Konv. f_n (Folge stetiger Fkt) glm zu f , so ist $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ stetig

Bem: Glm. Stetigkeit $\Rightarrow$ Punktweise Stetigkeit
 $\Leftarrow$

Bem: f unstetig $\Rightarrow$ keine glm. Konv.

Rezept für Glm. Konvergenz

1) Bestimme zuerst Funktion f gegen die f_n konvergiert, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

wenn f wohldefiniert ist, dann konv. f_n punktweise gegen f .

2) Für glm. Konv. zeige

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Falls dies gilt, sagt man, dass f_n bzgl. der Supremumsnorm konvergiert ist.

Dies ist äquivalent zu Defn. 3.7.3 Weierstrass ε -Defn. da Konvergenz bzgl.

allen Normen auf $\mathbb{R}$ äquivalent ist.

Bsp 8.2.2. Untersuche $f_n(x) = x^2 + e^{-nx^2}$ auf gleichmässige Konvergenz auf $D = [1, \infty)$

Lös: 1) Wir haben Punktweise Konvergenz gegeben, da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^2 + \underbrace{e^{-nx^2}}_{\rightarrow 0} = x^2$$

2) Für glm. Konv. müssen wir zeigen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

wir haben

$$\begin{aligned} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x \in D} |(x^2 + e^{-nx^2}) - x^2| \\ &= \sup_{x \in D} |e^{-nx^2}| \end{aligned}$$

$$\sup_{x=1}^n |e^{-nx^2}| = e^{-n}, \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0, \text{ also konv. } f_n \text{ glm. gegen } x^2$$

Bsp. 8.2.2. Konv. f_n (wie oben) auf $D=[0, \infty)$?

Lös: Nein, da gilt:

$$\sup_{x \in D} |e^{-nx^2}| = \sup_{x=0} |e^{-nx^2}| = 1$$

$$\text{also } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 1 \neq 0$$

Bsp. 8.2.3. Konv. $f_n(x) = x^n$ für $D=[0, \frac{1}{2}]$ glm?

Lös: 1) Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ (da $0 \leq x < 1 \forall x \in D$)

2) Für glm. Konv. gegen Grenzfunkt. $f(x)=0$ muss gelten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0, \text{ also}$$

$$\sup_{x \in [0, 1/2]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1/2]} |x^n - 0| = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{also } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1/2]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Bsp. 8.2.4. zeige, dass die folgende Funktionenfolge auf dem gegebenen Bereich glm. Konvergenz ist. Finden Sie die Grenzfunk.

$$f_n(x) = \frac{x}{n^2} + x + 1, \quad x \in [0, 1]$$

Lös: 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{x}{n^2}\right)}_{\rightarrow 0} + x + 1 = x + 1$

also ist $f(x)$ punktweise stetig zu $f(x) = x + 1$

2) $\mathbb{Z}$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$

$$\text{mit } \sup_{x \in [0, 1]} \left| \left(\frac{x}{n^2} + x + 1\right) - (x + 1) \right| = \sup_{x \in [0, 1]} \left| \frac{x}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$$

gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$, also ist $f_n(x)$ glm. stetig zu f .

8.4. Punktweise / glm Konvergenz von Funktionenfolgen bei Reihen

(Defn. Partialsumme)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen. Wir definieren

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

als die Folge der Partialsummen. Da $S_n(x)$ eine Summe stetiger Funktionen ist, kann man von Punktweiser bzw. Gleichmässiger Konvergenz sprechen.

(Defn. Punktweise Konv. von Partialsummen)

Sei $f_k: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge, betrachte Folge der Partialsummen $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$. $S_n(x)$ bildet eine Folge stetiger Funktionen (warum?). S_n konv. punktweise auf D , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

für alle $x \in D$ existiert

(Defn. Glm. Konv, Skript 3.7.6)

Sei $f_k: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge, betrachte Folge der Partialsummen $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$. $S_n(x)$ bildet eine Folge stetiger Funktionen (warum?). S_n konv. glm. auf D , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right| = 0$$

d.h. falls die von $S_n(x)$ defn. Funktionenfolge glm konv.

(Vergleichssatz, Skript 3.7.9)

Sei $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen, betrachte $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, gilt

i) $|f_n(x)| \leq c_n$ für alle $x \in D, n \in \mathbb{N}$

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konv.

Dann konv die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ glm. in D und die Grenzfunktionenreihe

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

ist eine in D stetige Funktion

Bem: Damit können wir zeigen, dass alle Potenzreihen in ihrem Konvergenzradius glm. konv.

Bsp 8.4.1. Untersuchen die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2}$ auf $D=[0,3]$

Lös: Es gilt

$$i) \left| f_n(x) \right| = \left| \frac{x}{n^2} \right| \leq \frac{3}{n^2} =: c_n \quad \forall x \in D$$

$$ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n^2} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konv. als
Riemannsche Zeta Funktion mit $s=2$

also ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{n^2}$ glm. konv. auf D , und da $f_n = \frac{x}{n^2}$ stetig ist, ist auch
f.

Bsp 8.4.2. Zeigen Sie, dass $S_f(x)$ im gegebenen Bereich glm. konv. Finden Sie den Grenzwert.

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{e^{kx}}{k!}, \quad x \in (0,1]$$

Lös: Es gilt

$$i) \left| \frac{(e^x)^k}{k!} \right| \leq \frac{e^k}{k!} = c_k \quad \forall x \in (0,1]$$

$$ii) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^k}{k!} \right) - 1 = e^e - 1$$

$$\text{also konv. } S_n(x) \text{ glm zu } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{kx}}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^x)^k}{k!} \right) - 1 = e^{e^x} - 1 = S(x)$$

Alternativ per Defn.

$$\sup_{x \in D} \left| \left(\sum_{k=0}^n \frac{e^{kx}}{k!} - 1 \right) - (e^{e^x} - 1) \right| \overset{\text{gleiche Berechnung wie oben}}{=} \sup_{x=1} \left| \sum_{k=0}^n \frac{e^k}{k!} - e^e \right|$$

$$\text{also } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{e^k}{k!}}_{\rightarrow e^e} - e^e \right| = 0$$

also ist $S_n(x)$ glm. konv. zu $S(x) = e^{e^x} - 1$