

Exercise Session 9

9.1. Trigonometrische Funktionen [Skript 3.8]

9.2. Definitionen Grenzwerte von Funktionen [Skript 3.10]

9.3. Rechnen mit Grenzwerten

9.1. Trigonometrische Funktionen

(Defn. sin und cos als Potenzreihen)

Sinus- und cos sind durch ihre Potenzreihen definiert

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Bem: Potenzreihen darstellung von sin, cos wird bei Taylorapprox. relevant

(Satz, Stetigkeit, Skript 3.8.1)

$\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$ und $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)$ sind stetig $\forall x \in \mathbb{R}$

Bem: Ihr solltet die wichtigsten Werte von sin, cos können (einfach da periodisch + phasenverschoben)

(Exponentialdarstellung, Skript 3.8.2)

Es gilt

$$i) \quad e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

$$ii) \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Bem: Vor allem bei der Integration kann die komplexe Darstellung nützlich sein.

$$\int e^{ix} = \frac{1}{i} e^{ix} + C \quad (\text{Bsp: Fouriertransforn, vgl. DumCS Sem 3})$$

9.2. Grenzwerte einer Funktion

(Einführung in Grenzwerte)

Bisher haben wir Grenzwerte von Folgen ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$) und Funktionenfolgen ($\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$) gesehen. Nun betrachten wir für eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, wobei x_0 nicht zwingend in D sein muss.

(Defn. Häufungspunkt)

Ein Häufungspunkt von $D \subset \mathbb{R}$ ist ein Punkt x_0 , sodass alle offenen Intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, (für $\delta > 0$) mindestens einen von x_0 verschiedenen Punkt $y \in D$ enthalten.

$$\forall \delta > 0. (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \cap D \neq \emptyset$$

Bsp. 9.2.1. Ist $x_0 = 0$ ein Häufungspunkt in $D = [0, 1)$

Lös: Ja, denn alle offenen Intervalle $(0 - \delta, 0 + \delta)$ schneiden $D = [0, 1)$

Bsp. 9.2.2. Ist $x_0 = 2$ ein Häufungspunkt von $D = \{2\} \cup (5, 7)$

Lös: Nein, denn $(2 - 0.1, 2 + 0.1)$ enthält kein Punkt y , sodass $y \in D$ wäre.
mit $\delta = 0.1$

(Definition Grenzwert, Skript 3.10.3)

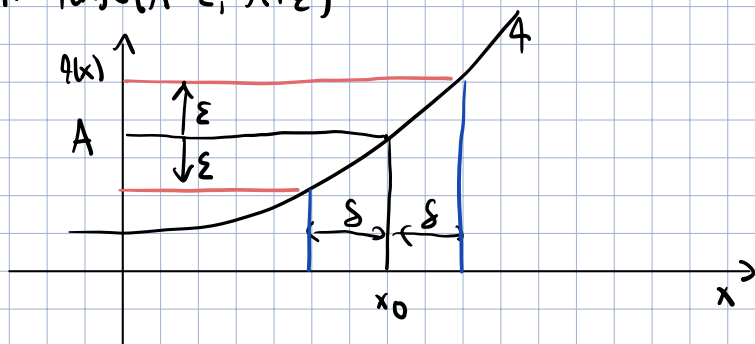
Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 ein Häufungspunkt von D . So ist $A \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von f an der Stelle x_0 , man schreibt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

falls

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in D. |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

d.h. für beliebig kleines $\varepsilon > 0$, existiert ein $\delta(\varepsilon)$, sodass für $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$



Bem.: Vergleiche zur Definition der Stetigkeit: $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in D. |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
(Beweise zu Grenzwerten analog)

(Definition: Linksseitiger und Rechtsseitiger Grenzwert)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 ein Häufungspunkt von D , so gilt

1) f hat an der Stelle x_0 den linksseitigen Grenzwert $L \in \mathbb{R}$, man schreibt

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in D. x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

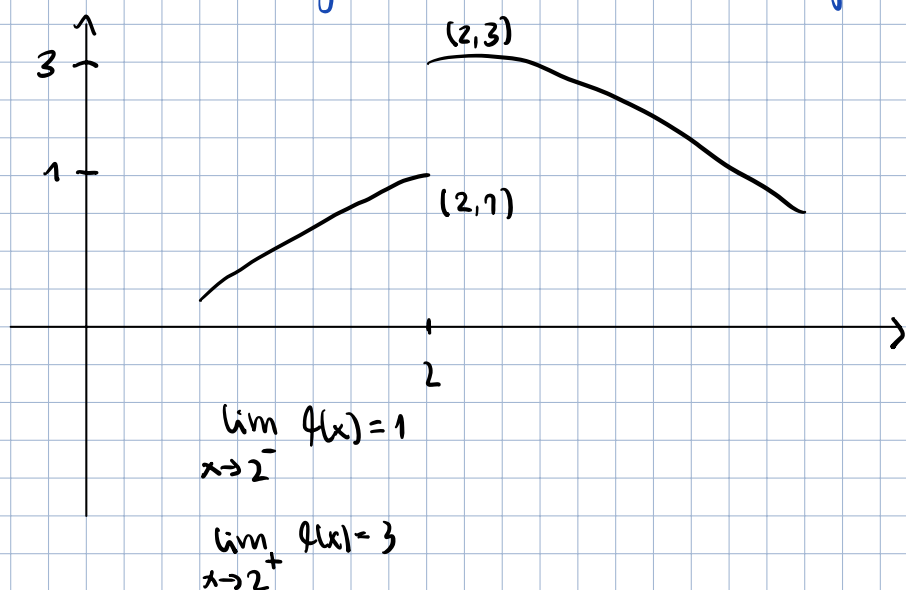
2) f hat an der Stelle x_0 den rechtsseitigen Grenzwert $R \in \mathbb{R}$, man schreibt

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = R$$

falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in D. x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - R| < \varepsilon$$

Graphische Bedeutung von links- und rechtsseitigem Grenzwert



(Bemk./ Korollar, Äquivalenz)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 ein Häufungspunkt in D , so gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L = A = R = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

9.3. Rechnen mit Grenzwerten

9.3.1. Allgemeine Rechenregeln, Dominanz

9.3.2. Sandwich Theorem

9.3.3. Wurzeltrick

9.3.4. Variablenwechsel

9.3.5 Fundamentallimites (exp, sin)

9.3.1 Allgemeine Rechenregeln

(Definition: Rechenregeln Grenzwerte)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$, und $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ so gilt

$$i) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ falls } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

Bsp 9.3.1: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

Lös: Problem: Nenner für $x=1$ gleich 0, umformen löst das Problem

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} x+1 = 2$$

(Anmerkung: Problematische Situationen)

• Obige Regeln darf man nur anwenden, sollten beide Grenzwerte existieren.

• D.h. wir können mit obigem Kriterium keine Aussagen für Fälle wie

" $\frac{0}{0}$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ ", " $\infty - \infty$ ", " 1^∞ ", " ∞^0 ", " 0^0 ", " $0 \cdot \infty$ " treffen, dafür

brauchen wir weitere/andere Kriterien (Sandwich, L'Hôpital etc.)

(Defn. Dominanz)

Dominanz bei Grenzwerten sollte aus Anf. bekannt sein, d.h.

für $0 \in \mathbb{R}$, $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 ein Häufungspunkt, $\lim_{x \rightarrow x_0} f, g = +\infty$, gilt

$$f \text{ dominiert } g \text{ falls: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \quad \text{alternativ} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

Sollte gelten

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0, A \in \mathbb{R}$$

so sind f, g von derselben Ordnung

Bem: Aus Anf. sollte bekannt sein, $x \rightarrow +\infty$, $a \in \mathbb{R}$ i) $\log(x) \ll x^a \ll e^x$

$$\text{ii) } a^x \ll x!$$

$$\text{iii) } x! \ll x^x$$

Bsp 9.3.2: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 2x - 42}{7x^3 + \sqrt{x}}$

Lös: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 2x - 42}{7x^3 + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2}{7x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{7x} = 0$

9.3.2. Sandwich Theorem

Falls $g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$ mit $\lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g_2(x) = A$, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

Bsp 9.3.3: $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Lös: Es geht nicht $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, da $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ nicht existiert.

Stattdessen gilt aber $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$, also $-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$ und

$$\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0. \text{ also } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Bsp 9.3.4: $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} e^{\sin(1/x)}$

Lös: Da $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$ gilt: $\sqrt{x} e^{-1} \leq \sqrt{x} e^{\sin(1/x)} \leq \sqrt{x} e$
 da $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} e^{-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} e = 0$ gilt $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} e^{\sin(1/x)} = 0$

Bsp 9.3.5: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 2\sin(x)}{3x + 2}$

Lös: $-2 \leq 2\sin(x) \leq 2$, also $5x - 2 \leq 5x + 2\sin(x) \leq 5x + 2$

$$\Rightarrow \frac{5x - 2}{3x + 2} \leq \frac{5x + 2\sin(x)}{3x + 2} \leq \frac{5x + 2}{3x + 2}$$

Dann $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x - 2}{3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 2}{3x + 2}$

also auch $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 2\sin(x)}{3x + 2} = 5/3$ nach Sandwich Theorem

9.3.3. Wurzeltrick

(Defn. Wurzeltrick)

Direkte Anwendung der dritten Binomischen Formel: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Bsp 9.3.6: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

Problem: " $\infty - \infty$ "

Lös: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{\sqrt{x^2 + x} + x}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

Bsp 9.3.7: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

Lös: Problem, Grenzwert wäre " $\frac{0}{0}$ ", umformen:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \cdot \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

Bsp 9.3.8 (HS21): $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3x + 1} - x$

Problem: " $\infty - \infty$ "

Lös: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 1} - x) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 + 3x + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 3x + 1} + x} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 3x + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x + 1} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 1}{x + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

9.3.4. Variablenwechsel (Substitution)

(Defn. Variablenwechsel)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$, f stetig in y_0 , g stetig in x_0 wobei

$$y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \text{ dann gilt}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y)$$

Bsp 9.3.9 : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)$

- Lös: 1. Bestimme Substitution: $y = g(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$
 2. Überprüfe Grenzwert bei x_0 : $y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x} = +\infty$

3. Substituiere: $x \ln(x) = \left(\frac{1}{y}\right) \ln\left(\frac{1}{y}\right)$

4. Bestimme Grenzwert: $\lim_{x \rightarrow x_0} x \ln(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\frac{1}{y}\right) \ln\left(\frac{1}{y}\right)$

konkret hier: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(y)}{y} = 0$
 (dominant)

Achtung: wir bestimmen nur $g(x)=y$, $f(y)$ wird induziert bei der Substitution (hier bspw. $f(y) = \left(\frac{1}{y}\right) \ln\left(\frac{1}{y}\right)$), insb. ist f nicht der urspr. Term!

9.3.5. Fundamentallimites

(Fundamentallimites Exp)

Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, also

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{1}{h(x)}\right)^{h(x)} = e \quad \text{alternativ} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + h(x)\right)^{\frac{1}{h(x)}} = e$$

für $x \rightarrow x_0$

muss $h(x) \rightarrow \infty$

für $x \rightarrow x_0$

muss $h(x) \rightarrow 0$

Bsp. 9.3.10: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x}$

Lös: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)}\right)^{\frac{x}{3}} \right]^{\frac{3}{x} \cdot 2x}$

offenbar gilt für $x \rightarrow \infty$

$$y = \frac{x}{3} \rightarrow \infty$$

insgesamt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)}\right)^{\frac{x}{3}} \right]^{\frac{3}{x} \cdot 2x} = e^{\frac{3}{x} \cdot 2x} = e^6$$

Bsp 9.3.11 (FS18): Bestimme $\lim_{t \rightarrow 0} (1 + 2\sin(t))^{\frac{1}{\sin(t)}}$

Lös: $\lim_{t \rightarrow 0} (1 + 2\sin(t))^{\frac{1}{\sin(t)}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2}{\frac{1}{\sin(t)}}\right)^{\frac{1}{\sin(t)}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{1}{2\sin(t)}\right)}\right)^{\frac{1}{2\sin(t)}} \right]^2 = e^2$

da für $t \rightarrow 0$

$$h(t) = \frac{1}{2\sin(t)} \rightarrow +\infty$$

Bsp 9.3.12

(H514): Bestimme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+n\pi}{n\pi} \right)^n$

Lös:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+n\pi}{n\pi} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n\pi} \right)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n\pi} \right)^{n\pi}}_{\rightarrow e} \right)^{\frac{1}{\pi}}$$

$$= e^{\frac{1}{\pi}} = e^{-\pi}, \text{ da für } n \rightarrow n_0 = \infty$$

$$h(n) = n\pi \rightarrow \infty$$

(Fundamentallimit Sinus)

Es gilt $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, also

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(h(x))}{h(x)} = 1$$

für $x \rightarrow x_0$

muss $h(x) \rightarrow 0$

Bsp 9.3.13 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)}$

Lös:
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \cdot \frac{3x}{3x} \cdot \frac{4x}{4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\left| \frac{\sin(3x)}{3x} \right|}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\left| \frac{1}{\left(\frac{\sin(4x)}{4x} \right)} \right|}_{\rightarrow 1} \cdot \frac{3x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$