

Analysis 1: Semester FS25 Zusammenfassung

1. Grundlagen I

1.0 Mengen

1.1 Abbildungen

1.2 $\mathbb{N}$ und vollständige Induktion

1.3 Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

1.4. Supremum/Infimum

2. Grundlagen II

2.1. Die reellen Zahlen Nachtrag: Archimedisches Prinzip

2.2. Metrische und normierte Räume

2.3. Komplexe Zahlen

2.4. Einführung: Folgen und Reihen

3. Folgen I

3.1. Rechnen mit Grenzwerten (Rechenregeln, Allgemeines Vergleichsprinzip)

3.2. Konvergenz von beschränkten und monotonen Folgen (Rekursive Folgen)

3.3. Satz von Weierstrass

3.4. Limes superior, Limes inferior

4. Folgen II, Reihen I

4.1. Cauchy Kriterium

4.2. Folgen in $\mathbb{C}$

4.3. Reihen

4.4. Konvergenz von Reihen

5. Reihen II

5.1. Absolute Konvergenz von Reihen

5.2. Leibniz und Dirichlet auf Reihen

5.3. Quotienten und Wurzelkriterium

5.4. Potenzreihen

6. Funktionen I: Stetigkeit

6.1 Stetige Funktionen

6.2 Zwischenwertsatz (ZWS)

6.3 Min-Max- Satz

8. Funktionen II: Funktionenfolgen

8.1. Umkehrabbildung [Skript 3.6]

8.2. Punktweise Konvergenz von Funktionenfolgen [Skript 3.7]

8.3 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen [Skript 3.7]

8.4. Punktweise und Glm. Konv. von Reihen stetiger Funks $[Skript 3.7]$

9. Funktionen III: Grenzwerte

9.1. Trigonometrische Funktionen [Skript 3.8]

9.2. Definitionen Grenzwerte von Funktionen [Skript 3.10]

9.3. Rechnen mit Grenzwerten

9.3.1. Allgemeine Rechenregeln, Dominanz

9.3.2. Sandwich Theorem

9.3.3. Wurzeltrick

9.3.4. Variablenwechsel

9.3.5 Fundamentallimites ($\exp$, $\sin$)

10. Funktionen IV: Die Ableitung (Differenzierbarkeit)

10.1. Stetigkeit über die Grenzwertdefinition

10.2. Differenzierbarkeit: Die Ableitung [Skript 4.1]

11. Funktionen V: Sätze Differenzierbarkeit

11.1. Die Ableitung: Definition, Kettenregel und Umkehrsatz

11.2. Zentrale Sätze: Satz von Rolle, Mittelwertsatz

12. Funktionen VI: Höhere Ableitungen, Taylor Approximation

12.1. Mittelwertsatz Recap: Examsaufgabe

12.2. Ableitung und Grenzwert: Satz von L'Hôpital

12.3. Höhere Ableitungen: Monotonie, Konvexität, Kochrezept Extrema

12.4. Taylorapproximation

13. Funktionen VII: Das Riemann Integral

13.1. Einführung in die Integralrechnung

13.2. Unbestimmte Integrale

13.2.1. Fundamentalintegral

13.2.2. Kettenregel Integral

13.2.3. Produktregel Integral (Partielle Integration)

13.2.4. Substitution

13.2.5. Partialbruchzerlegung

13.3. Bestimmte Integrale, zentrale Sätze

13.4. Uneigentliche Integrale

Abchluss: Tipps für die Examensphase

Exercise Session 1

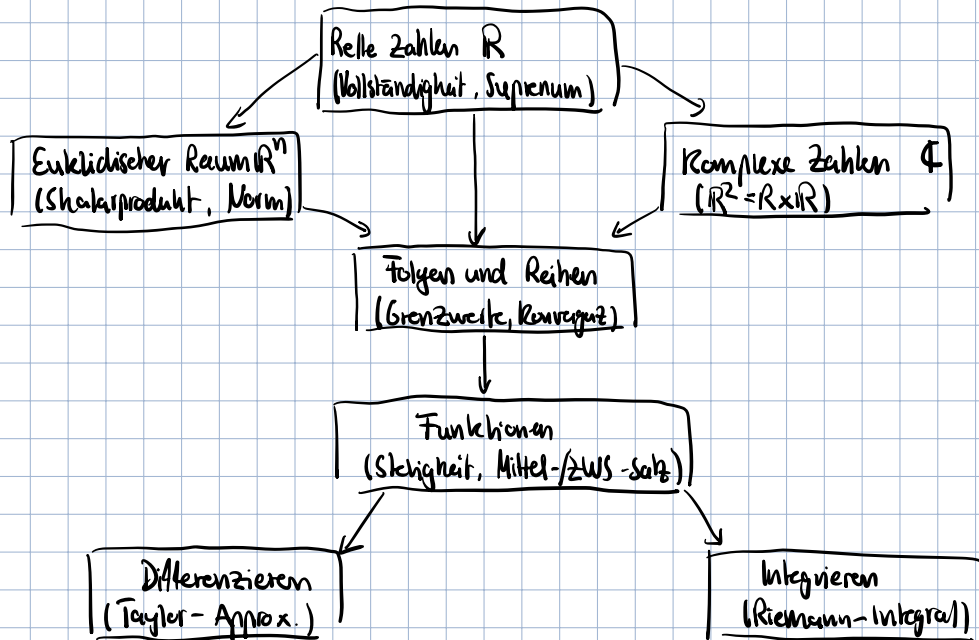
Organisatorisches

· Mail: talkbe@ethz.ch

· Website: n.ethz.ch/~talkbe/

· Fragen per Mail oder direkt in der Übungsstunde

Ausblick in das Semester



Themenübersicht: Grundlagen

1.0 Mengen

1.1 Abbildungen

1.2 IN und vollständige Induktion

1.3 Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

1.4 Supremum/Infimum

1.0 Mengen

Defn: (Menge)

Zentrale Annahmen der reellen Mengenlehre (Cantorsche Mengenlehre) sind folgende Punkte

- (1) Menge besteht aus beliebigen unterscheidbaren Elementen. Etwaige Vieltachheiten werden ignoriert
- (2) Eine Menge ist unverwechselbar durch ihre Elemente bestimmt
- (3) Jede Eigenschaft $A(x)$ defn. die Menge der Objekte $\{x \mid A(x)\}$ die diese Eigenschaft besitzen (d.h. die Aussage $A(x)$ erfüllen)

Bem: · Manchmal schreiben wir Mengen durch konkrete Auflistung ihrer Elemente, also
bspw. $M = \{x_1, \dots, x_n\}$

- Die leere Menge ist geschrieben als $\{\}$, bzw. $\emptyset$
- Man schreibt $x \in A$ falls x in der Menge A enthalten ist, und $x \notin A$ falls nicht

Defn: (Teilmenge) Wir sagen eine Menge A ist eine Teilmenge einer Menge B , falls für alle $x \in A$ auch $x \in B$ gilt, man schreibt $A \subset B$ (bei strikter Teilmenge, d.h. $A \subset B$ aber $A \neq B$ schreibt man $A \subsetneq B$)

Defn: (Kartesisches Produkt)

- Für zwei Mengen X und Y ist das kartesische Produkt $X \times Y$ die Menge aller geordneten Paare (x, y) wobei $x \in X$, $y \in Y$, d.h.

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ und } y \in Y\}$$

- Wir definieren X^n (n eine natürliche Zahl), als n -faches kartesisches Produkt mit sich selbst, d.h.
 $X^2 = X \times X$, $X^3 = X \times X \times X$ und so weiter

1.1 Abbildungen (Funktionen)

Einführung (Abbildungen)

- Eine Funktion f von der Menge X nach der Menge Y eine Zuordnung, die jedem $x \in X$ ein bestimmtes $y = f(x) \in Y$ zuweist

- Wir schreiben $f: X \rightarrow Y$ für eine Funktion von X nach Y , $x \mapsto f(x)$ für die Zuordnung, wobei X der Definitionsbereich und Y den Wertebereich/Zielbereich von f darstellt.

- Oft schreibt man also kurz: $\varphi: X \rightarrow Y$ bspw. $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \varphi(x)$ $x \mapsto x^2$

1.2 $\mathbb{N}$ und vollständige Induktion

Einführung Zahlenmengen

Intuitiv kommt man auf die folgenden Zahlenmengen, beachte, dass dies keine mathematische Definition ist

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{alle "Lücken"}\}$$

Definition (Induktive Teilmengen)

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ heisst induktiv, falls folgende zwei Eigenschaften gelten:

- 1) $1 \in M$ (Man kann auch $0 \in M$ fordern um $\mathbb{N}$ bei 0 beginnen zu lassen. Dies ist Konvention und mathematisch unerheblich)
- 2) Für alle $x \in M$ gilt $x \in M \Rightarrow x+1 \in M$

Bspw. ist $\mathbb{R}$ eine induktive Menge (gewissermassen die grösste), die "kleinste" induktive Menge soll $\mathbb{N}$ sein

Definition (Natürliche Zahlen)

Wir definieren die Teilmenge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ als Durchschnitt aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$

$$\mathbb{N} = \bigcap_{M \subseteq \mathbb{R} \text{ induktiv}} M$$

Es folgt: $\mathbb{N}$ ist in jeder induktiven Teilmenge von $\mathbb{R}$ enthalten und $1 \in \mathbb{N}$

Lemma (Kleinste Induktive Menge)

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bilden die kleinste induktive Teilmenge der reellen Zahlen

Beweis durch vollständige Induktion

Einführung

Will man eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen, bspw. dass die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gleich $n(n+1)/2$ ist

$$A(n) : \sum_{k=1}^n k = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

kann man dies mit dem Prinzip der vollständigen Induktion tun

Satz (Prinzip der vollständigen Induktion)

Es sei die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen. Gilt

- 1) $A(1)$ ist wahr ("Induktionsanfang")
- 2) $\forall n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ wahr} \Rightarrow A(n+1) \text{ wahr}$ ("Induktionsschritt")

so gilt die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Man zeigt also erst den Induktionsanfang, d.h. dass $A(n)$ für (typischerweise) $n=1$ hält.

Dann den Induktionsschritt: nehme an $A(n)$ gilt für ein allgemeines n , zeige, dass daraus folgt, dass $A(n+1)$ hält

Beweis: Definiere $E = \{n \in \mathbb{N} \mid A(n)\}$, dann gilt folgendes

- $1 \in E$, da $A(1)$ aufgrund des Induktionsanfangs gilt
- Für alle $x \in \mathbb{N}$, wenn $x \in E$, dann auch $x+1 \in E$ wegen des Induktionsschritts. Also $\mathbb{N} \subseteq E$, also gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Beispiel: Beweise $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Lösung: D.h. wir müssen die Aussage $A(n) = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ zeigen

$$(1) \quad n=1 : A(1) \quad 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \quad \checkmark$$

(2) $n \Rightarrow n+1$: Induktionshypothese ist, dass $A(n)$ hält d.h. $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, damit zeigen wir $A(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^n k \right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \checkmark$$

1.3 Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Satz: 1) $\mathbb{R}$ mit $+, \cdot, 0, 1$ ist ein kommutativer Körper

2) $\mathbb{R}$ mit $+, \cdot, 0, 1$ ist ein angeordneter Körper (d.h. ein Körper K mit einer Ordnung $\leq$ die mit der Addition und Multiplikation verträglich ist, also: wenn $a \leq b$, dann $a+c \leq b+c$ für alle $c \in K$ und wenn $0 < a, 0 < b$ dann $0 < a \cdot b$)

3) $\mathbb{R}$ ist vollständig (d.h. jede Cauchy Folge konvergiert in $\mathbb{R}$ und dieser Grenzwert liegt wieder in $\mathbb{R}$)

Bem: Die Vollständigkeit zeichnet die reellen Zahlen aus

• $\mathbb{C}$ (komplexe Zahlen) ist nicht angeordnet (da es keine Ordnung auf $\mathbb{C}$ gibt die mit der Multiplikation verträglich ist)

Folge: Daraus folgt, dass jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein eindeutig bestimmtes Multiplikations Inverses hat: $[x^{-1}] \cdot x = x \cdot [x^{-1}] = 1$

Axiom: (Vollständigkeit)

Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ (nicht leer), dann gilt für alle $a \in A, b \in B$ mit $a \leq b$ das mindestens ein c existiert mit $a \leq c \leq b$ d.h. die reellen Zahlen haben "keine Lücken"

1.4 Supremum und Infimum

Definition Obere/Untere Schranke

Für $A \subset \mathbb{R}$ gilt das $b \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke für A ist, falls
für alle $a \in A: a \leq b$

und $c \in \mathbb{R}$ eine untere Schranke falls gilt
für alle $a \in A: a \geq c$

• Obere-/Untere Schranke von A müssen keine Elemente von A sein, bspw.

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$

ist von oben durch $b=1$ beschränkt, aber bspw. auch $2, \pi, 42$ etc. sind obere Schranken (d.h. diese sind nicht eindeutig)

Definition Supremum, Infimum

• Sei $A \subset \mathbb{R}$. Das Supremum von A ist die kleinste obere Schranke von A , man schreibt $\sup A$
Das Infimum von A die grösste untere Schranke von A , man schreibt $\inf A$

• Sollte A nach oben bzw. unten unbeschränkt sein, definieren wir $\sup A = +\infty, \inf A = -\infty$

Bemerkungen

• Während Obere/untere Schranke nicht immer eindeutig sind, sind $\sup A, \inf A$ immer eindeutig!

• Das Supremum und Infimum müssen aber keine Elemente von A sein, sind sie es aber doch also $\sup A \in A$ (bzw. $\inf A \in A$) definieren diese das Maximum bzw. Minimum der Menge

Bsp: $\sup [42, 43] = \sup [42, 43] = 43$, aber $\max [42, 43]$ ex. nicht, während $\max [42, 43] = 43$, da $43 \in [42, 43]$

Beispiel: Bestimme Supremum, Infimum von $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$

Lösung: $\sup A = 1$ da $b=1$ die kleinste obere Schranke ist, gleichzeitig $\sup A \in A \Rightarrow \sup A = \max A = 1$
Offenbar konvergiert $1/n$ zu 0, bleibt zu zeigen das $c=0$ die grösste obere Schranke ist:
Angenommen es existiert $c' > 0$ s.d. c' auch eine untere Schranke ist, dann gilt aber
 $c' < 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n < 1/c' \forall n \in \mathbb{N}$, was impliziert, dass $\mathbb{N}$ beschränkt ist. Widerspruch! $\inf A = 0$

Beispiel: Bestimme $\sup A, \inf A$ ($\max A, \min A$ falls existent), der Menge $A = \left\{ \frac{n-3}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup (-1, 1)$

Lösung: $A = \left\{ \frac{n-3}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup (-1, 1) = \left\{ -2, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{16}, \frac{2}{25}, \dots \right\} \cup (-1, 1)$, d.h. ab $n=2$ liegen alle Terme

$(n-3)/n^2$ im Intervall $(-1, 1)$, d.h. A kann geschrieben werden als $A = \{-2\} \cup (-1, 1)$. Offenbar ist A nach unten beschränkt mit $\inf A = -2$, da $-2 \in A$ ist $\min A$ existent und gegeben mit $\min A = -2$. Die Menge ist nach oben beschränkt mit $\sup A = 1$, da aber $1 \notin A$ existiert das Maximum nicht

Lemma (Eigenschaften des Supremums/Infimums)

Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ (nicht leer), sei $A+B$ definiert als $\{a+b \mid a \in A, b \in B\}$, so gilt

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B, \quad \inf(A+B) = \inf A + \inf B$$

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B), \quad \inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$$

Beispiel: Bestimme $\sup/\inf$ (max/min falls existiert) der folgenden Menge $A = \{3n + \frac{2}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

Lösung: Fasse Menge als Vereinigung auf, d.h. $A = B \cup C$ mit $B = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $C = \{\frac{2}{m} \mid m \in \mathbb{N}\}$
Offenbar $\inf B = 3$, $\sup B = +\infty$ (d.h. unbeschränkt) und $\inf C = 0$, $\sup C = 2$, mit den Formeln:
 $\sup(A) = \sup(B+C) = \sup B + \sup C = +\infty + 2 = +\infty$
 $\inf(A) = \inf(B+C) = \inf B + \inf C = 3 + 0 = 3$

Offenbar existiert kein Maximum und da $3 \notin A$ auch kein Minimum

Beispiel: Berechne $\sup/\inf$ (max/min falls ex.) der Menge $A = \{\frac{(-1)^n}{n+2} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

Lösung: Klicke die Formel etwas, also $A = \{\frac{(-1)^n}{n+2} \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \dots\}$

offenbar gilt wieder das wir eine Vereinigung zweier Mengen haben die wir separat betrachten können,
konkret: $B = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots\}$, $C = \{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \dots\}$ offenbar gilt $\sup B = \frac{1}{2}$, $\inf B = 0$, $\sup C = 0$, $\inf C = -\frac{1}{3}$

Total (nach Formel oben): $\sup A = \sup(B \cup C) = \max(\sup B, \sup C) = \frac{1}{2}$

$$\inf A = \inf(B \cup C) = \min(\inf B, \inf C) = -\frac{1}{3}$$

Da $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{3}$ von A angenommen werden also $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \in A$ gilt $\max A = \frac{1}{2}$, $\min A = -\frac{1}{3}$

Themenübersicht Exercise Session 2

2.1. Die reellen Zahlen Nachtrag: Archimedisches Prinzip

2.2. Metrische und normierte Räume

2.3. Komplexe Zahlen

2.4. Einführung: Folgen und Reihen

2.1. Reelle Zahlen

Satz (Archimedisches Prinzip)

Für jeden $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ sodass $n > x$. Genauso existiert für jeden $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ sodass $\frac{1}{n} < \varepsilon$

Bem: $\varepsilon > 0$ bedeutet, dass man einen beliebig kleinen Parameter ε nimmt, der "ganz nah" an null herankommen kann. Falls man zeigen kann

$$a - b < \varepsilon$$

so gilt $a = b$.

2.2. Metrische und normierte Räume

Einführung Metrik

Ein metrischer Raum ist eine Menge X (nicht leer) mit einer Abbildung, die sog. Metrik,

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

welche jedem Paar (x, y) aus $X \times X$ eine reelle Zahl zuordnet. Sie muss folgende Eigenschaften erfüllen:

$$(i) d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X \quad \text{und} \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (\text{Positiv Definitheit})$$

$$(ii) d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X \quad (\text{Symmetrie})$$

$$(iii) d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X \quad (\text{Dreiecksungl.})$$

Wir nennen $d(x, y)$ Distanz zwischen x und y (wobei $x, y \in X$). Der metrische Raum selbst wird notiert als (X, d)

Einführung normierte Räume

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, eine Abbildung

$$\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|$$

heißt Norm auf V falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind

$$(i) \|v\| \geq 0 \quad \text{für alle } v \in V, \quad \text{und} \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0 \quad (\text{Positiv Definitheit})$$

$$(ii) \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \text{für alle } v, w \in V \quad (\text{Dreiecksungl.})$$

$$(iii) \|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \text{für alle } v \in V \quad \text{und} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{Positive Homogenität}).$$

Die reelle Zahl $\|v\|$ nennen wir Norm von v , intuitiv die Länge von v . Ein Vektorraum V zusammen mit einer Norm $\|\cdot\|$ definiert einen normierten Raum, wir schreiben $(V, \|\cdot\|)$.

Jeder normierte Raum kann als metrischer Raum betrachtet werden, indem man die Norm zur Definition einer Metrik verwendet:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Wir nennen diese Metrik die (von $\|\cdot\|$) induzierte Metrik. Es folgt: jeder normierte Raum ist automatisch ein metrischer Raum, aber nicht umgekehrt.

• Normen auf $V = \mathbb{R}$

$$: \|v\| = |v|$$

• Normen auf $V = \mathbb{R}^n$, $v = (v_1, \dots, v_n)$: Euklidische Norm: $\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}$

$$\cdot \text{Maximum Norm: } \|v\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |v_i|$$

$$\cdot p\text{-Norm: } \|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}, p \in \mathbb{N}$$

• Normen auf $V = C^0(a, b)$

, d.h. $V = \text{Stetige Funktionen } (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\cdot \text{Maximum Norm: } \|f\|_\infty = \sup_{x \in (a, b)} |f(x)|$$

$$\cdot L_p\text{-Norm: } \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \right)^{1/p}, p \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ Metrische und normierte Räume sind wichtig um Strukturen zu verstehen, Abstände zu messen und Konvergenz zu definieren

2.3. Komplexe Zahlen

Darstellung komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen können auf drei verschiedenen Arten dargestellt werden:

I Kartesische Darstellung

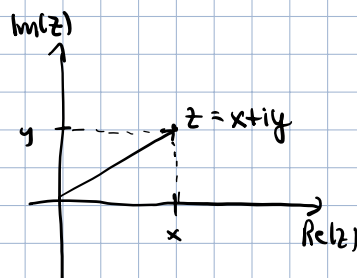
Komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ wird durch ihre (reellen) Koordinaten in der komplexen Ebene charakterisiert, d.h.

$$z = x + i \cdot y, \quad \text{wobei}$$

- $x = \operatorname{Re}(z) = \text{Realteil von } z$

- $y = \operatorname{Im}(z) = \text{Imaginärteil von } z$

- i , die imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$, $i = \sqrt{-1}$



II Polare/Trigonometrische Darstellung

Komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ wird durch Betrag $|z| = r$ und Argument $\operatorname{Arg}(z) = \theta$ bestimmt

$$z = r \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta), \quad \text{wobei}$$

- $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{Betrag von } z \text{ (Abstand von } z \text{ zum Ursprung)}$

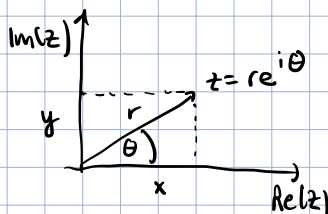
- $\theta = \operatorname{Arg}(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \text{Argument von } z \text{ (}\theta \text{ im Gegenwärtigen Sinn)}$
(normalerweise $\theta \in [0, 2\pi]$ wobei natürlich $\theta \in [0, 2\pi + n \cdot 2\pi]$ $n \in \mathbb{N}$ geht)

III Eulersche/Exponentialdarstellung

Komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ wird durch Betrag $|z| = r$ und Argument $\operatorname{Arg}(z) = \theta$ bestimmt

$$z = r e^{i\theta} \quad \text{Euler} = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

r und θ analog zu II also $r = |z|$ als Betrag von z und θ als Argument.



Umwandlung zwischen den Darstellungen

Kartesisch (I) zu Polar (II) / Euler (III)

Gegeben: $z = x + iy$ Gesucht: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ bzw. $z = r e^{i\theta}$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Bsp: $z = 1 + i$

Lös: $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\theta = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$ also $z = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$

Polar (II) / Euler (III) zu Kartesisch (I)

Gegeben: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ bzw. $z = r e^{i\theta}$ Gesucht: $z = x + iy$

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin \theta$$

Bsp: $z = 2 e^{i\pi}$

Lös: $x = 2 \cdot \cos(\pi) = -2$, $y = 2 \sin(\pi) = 0$ also $z = -2 + i \cdot 0 = -2$

Operationen auf $\mathbb{C}$: Addition, Komplexe Konjugation, Multiplikation,

Addition

Man addiert einfach Realteil und Imaginärteil separat, d.h. $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Haben wir z_1 bzw. z_2 in Polarform gegeben transformieren wir diese in kartesische Form

Bsp: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Lös: z_1 ist bereits in kartesischer Form, für z_2 gilt $x_2 = 2 \cdot \cos(\frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2}$, $y_2 = 2 \sin(\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2}$

also $z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, total: $z_1 + z_2 = (1+i) + (-\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2} + i(1 + \sqrt{2})$

Komplexe Konjugation

Für ein $z = x + iy = re^{i\theta}$ ist die konjugierte komplexe Zahl definiert als

$$\bar{z} = x - iy = r e^{-i\theta}$$

Multiplikation (Kartesische Form)

Sei $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ sowie $i^2 = -1$ so gilt

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

• Bemerkung: $z \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 - ixy + ixy = x^2 + y^2 = |z|^2$, also $|z| = \sqrt{z \bar{z}}$

Multiplikation (Eulersche Form)

Sei $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ dann gilt

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Division (Kartesisch)

Durch $z \bar{z} = |z|^2$ (vgl. oben) gilt für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (wobei $z_2 \neq 0$)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

Division (Euler)

Division in Eulerscher Form für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (wobei $z_2 \neq 0$) sowie $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

Bsp: $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$, dann $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

Potenzen

Potenzen berechnet man am besten in Euler-Form für ein $z \in \mathbb{C}$ gilt dann $z = r e^{i\theta}$

$$z^n = r^n e^{in\theta} \quad \text{bspw.} \quad z^2 = r^2 e^{2i\theta}$$

Bsp: $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}$, berechne $z^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3$

lös: Schreibe kart → Euler: $r = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$, $\theta = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$, also $z = e^{i\pi/4}$

also $z^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 = \left(e^{i\pi/4} \right)^3 = e^{i3\pi/4}$, kart: $z = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}$

Der Fundamentalsatz der Algebra (Gleichungen in $\mathbb{C}$)

Für Nullstellen des Polynoms: $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

kann höchstens n -Lösungen über $\mathbb{R}$ haben (insb. für n ungerade mindestens eine reelle Lösung, für n gerade kann $p(x)$ unlösbar sein)

Über $\mathbb{C}$ (im vgl zu $\mathbb{R}$) gilt: Alle Polynome vom Grad $n \geq 1$ haben genau n komplexe NST, das ist der Fundamentalsatz der Algebra.

2.4 Folgen und Reihen

Einführung Folgen

Eine Folge ist eine geordnete Liste von Zahlen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$$

Formal: Eine reelle Folge ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{R}$, wobei jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet wird, d.h.

$$a_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \mapsto a(n)$$

wir schreiben a_n statt $a(n)$ und bezeichnen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ als die Folge (bzw. $(a_n)_{n \geq 1}$)

Man kann Folgen definieren, indem man das n -te Folgenglied explizit schreibt, d.h.

$$(a_n)_{n \geq 1} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\} \quad \text{bspw.} \quad \left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$$

Alternativ kann man Folgen rekursiv definieren, mit Anfangswert und Vorschrift um weitere Folgenglieder aus vorherigen zu bestimmen, bspw. die Fibonacci-Folge.

Anfangswert: $a_1 = 1, a_2 = 1$

Vorschrift: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

damit hat man die Folge $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$

Einführung in die Konvergenz von Folgen

Es gibt nun zwei Arten Konvergenz einer Folge zu definieren. In der Vorlesung:

Def. (Skript 2.1.4)

Die Folge (a_n) konvergiert, falls eine Zahl $l \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $\forall \varepsilon > 0$ die Menge

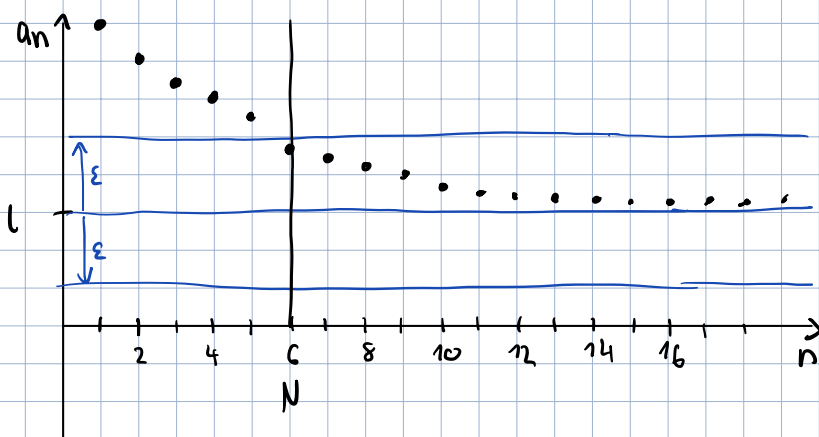
$$\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin (l - \varepsilon, l + \varepsilon)\}$$

endlich ist. Wir bezeichnen l als den Grenzwert der Folge

Alternative Definition

Die Folge (a_n) konvergiert gegen $l \in \mathbb{R}$, falls $\forall \varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert (also ein von ε abhängiges N), sodass für alle $n \geq N$ gilt: $|a_n - l| < \varepsilon$

$$\text{Kurz: } \forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |a_n - l| < \varepsilon$$



Bem: Nur wenn der Grenzwert existiert darf man $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ schreiben

Konvergenzbeweise mittels Definition

Bsp: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ (vgl. unsere erste Übungsstunde, wir haben mittels Widerspruchsbeweis auf $\mathbb{R}$ gezeigt, dass $\inf(\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}) = 0$)

Lösung: Wähle beliebig kleines $\varepsilon > 0$, wir müssen zeigen das ein von ε abhängiges N existiert, sodass für alle $n \geq N$ gilt: $|a_n - l| = |1/n - 0| = |1/n| < \varepsilon$

Offenbar haben wir hiermit direkt eine Ungleichung gegeben, löse nach n auf:

$$|a_n - l| = |1/n| < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Wähle $N := \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ (Aufrunden da $N \in \mathbb{N}$ sein muss).

Nach Konstruktion gilt somit $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |1/n - 0| < \varepsilon$ (d.h. $1/n$ konv. gegen 0

bzw. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$)

Themenübersicht Exercise Session 3

- 3.0. Anmerkungen zur Serie, Recap Definition Folge und Folgenkonvergenz (Skript 2.1)
- 3.1. Rechnen mit Grenzwerten (Rechenregeln, Allgemeines Vergleichsprinzip) (Skript 2.1)
- 3.2. Konvergenz von beschränkten und monotonen Folgen (Rekursive Folgen) (Skript 2.2)
- 3.3. Satz von Weierstraß (Skript 2.2, 2.5)
- 3.4. Limes superior, Limes inferior (Skript 2.3)

3.0. Anmerkungen zur Serie

- Unterschied zwischen "bestimme" und "zeige"
- Bei Axiomverwendung benutze am besten direkt die Nummer der Eigenschaft aus dem Skript (K1, 02)
- Verwirrung von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$: In dieser Vorlesung $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Recap

Einführung in die Konvergenz von Folgen

Es gibt nun zwei Arten Konvergenz einer Folge zu definieren. In der Vorlesung:

Def. (Skript 2.1.4)

Die Folge (a_n) konvergiert, falls eine Zahl $l \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $\forall \varepsilon > 0$ die Menge

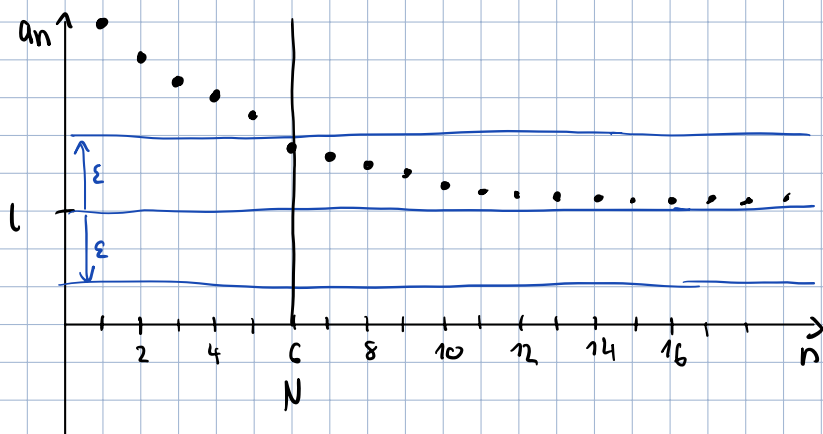
$$\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin (l - \varepsilon, l + \varepsilon)\}$$

endlich ist. Wir bezeichnen l als den Grenzwert der Folge

Alternative Definition

Die Folge (a_n) konvergiert gegen $l \in \mathbb{R}$, falls $\forall \varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert (also ein von ε abhängiges N), sodass für alle $n \geq N$ gilt: $|a_n - l| < \varepsilon$

$$\text{Kurz: } \forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |a_n - l| < \varepsilon$$



Bem: Nur wenn der Grenzwert existiert darf man $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ schreiben

Konvergenzbeweise mittels Definitionen

Bsp: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ (vgl. unsere erste Übungsstunde, wir haben mittels Widerspruchsbeweis auf $\mathbb{R}$ gezeigt, dass $\inf(\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}) = 0$)

Lösung: Wähle beliebig kleines $\varepsilon > 0$, wir müssen zeigen das ein von ε abhängiges N existiert, sodass für alle $n \geq N$ gilt: $|a_n - l| = |1/n - 0| = |1/n| < \varepsilon$

Offenbar haben wir hiermit direkt eine Ungleichung gegeben, löse nach n auf:

$$|a_n - l| = |1/n| < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Wähle $N := \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ (Aufrunden da $N \in \mathbb{N}$ sein muss).

Nach Konstruktion gilt somit $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |1/n - 0| < \varepsilon$ (d.h. $1/n$ konv. gegen 0

bzw. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$)

3.1. Rechnen mit Grenzwerten

(Satz) Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen mit Grenzwerten a, b dann gilt:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}, \text{ falls } b \neq 0$$

Bsp 3.1.1: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}$

Lös: Derzeit konvergiert weder Nenner noch Zähler, aber da $n \geq 1$ gilt

$$\frac{n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)}{n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$\text{also } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \stackrel{(1), (3)}{=} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

(Satz, Allgemeines Vergleichsprinzip, "Sandwich Lemma")

Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Angenommen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A, \quad \text{dann} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$$

Beweis des Allgemeinen Vergleichsprinzips

Da $(a_n), (c_n)$ jeweils konvergent sind (mit Grenzwert A) gilt nach Definition:

$$i) \text{ defn. Folgenkonvergenz } (a_n): \forall \varepsilon > 0. \exists N_a \in \mathbb{N}. \forall n \geq N_a \quad |a_n - A| < \varepsilon \quad (\Leftrightarrow A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon)$$

$$ii) \text{ defn. Folgenkonvergenz } (c_n): \forall \varepsilon > 0. \exists N_c \in \mathbb{N}. \forall n \geq N_c \quad |c_n - A| < \varepsilon \quad (\Leftrightarrow A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon)$$

Vereinige Bedingungen i), ii) für N_a, N_c , also definiere $N_b := \max(N_a, N_c)$, dann gelten $\forall n \geq N_b$ beide

Bedingungen, also gilt für $N = N_b$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N: A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon \quad (\Leftrightarrow |b_n - A| < \varepsilon)$$

was der Definition einer konvergenten Folge entspricht, d.h. (b_n) ist konvergent mit Grenzwert A .

Bem: Oftmals kann man die eigene Folge approximieren um geeignete Folgen $(a_n), (c_n)$ zu finden

Bsp 3.12: Gegen was konvergiert $\frac{1}{n^2}$

Lös: Offenbar gilt $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$

Bsp 3.1.3: Gegen was konvergiert $\sqrt[n]{3^n + 5^n}$

Lös: $3^n \geq 0$ also $\sqrt[n]{3^n + 5^n} \geq \sqrt[n]{0 + 5^n} = \sqrt[n]{5^n} = 5$

$5^n \geq 3^n$ also $\sqrt[n]{3^n + 5^n} \leq \sqrt[n]{5^n + 5^n} = 5\sqrt[n]{2}$

aber mit $n \geq 2$ $\sqrt[n]{2} \leq \sqrt[n]{n} = n^{1/n}$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$, siehe Bsp 2.2.5 Skript)

also $5 \leq \sqrt[n]{3^n + 5^n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 5\sqrt[n]{n} = 5 \underbrace{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \right)}_{=1} = 5$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n} = 5$

3.2. Konvergenz von beschränkten und monotonen Folgen

(Definition 2.2.1. Monotone Folgen)

Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ ist monoton wachsend falls:

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \geq 1$$

und monoton fallend falls

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \geq 1$$

(Man kann analog streng monoton wachsend und streng monoton fallend mit $<$ bzw $>$ definieren)

(Definition Beschränktheit)

Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ ist nach oben beschränkt, falls es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$a_n \leq C \quad \forall n \geq 1$$

und nach unten beschränkt, falls es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$a_n \geq C \quad \forall n \geq 1$$

(Korollar)

Konvergente Folgen sind immer beschränkt.

Bem: Die Umkehrung gilt nicht, bspw ist $((-1)^n)_{n \geq 1}$ beschränkt aber nicht konvergent.

(Beweis) Serie 2, Aufgabe 2.2.

(Satz)

Ist die Folge (a_n) nach oben (bzw. unten) beschränkt und monoton wachsend

(bzw. monoton fallend) dann ist (a_n) konvergent.

Bem: Oftmals ist dieser Satz bei rekursiv definierten Folgen nützlich

Bsp 3.2.1. Konvergiert die rekursive Folge $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6)$, und falls ja wohin

Lös: Teleskopiere etwas, d.h. $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 5$, $a_4 = 5.5$, $a_5 = 5.75$, ...

Schritt 1: Monotonie via vollständiger Induktion zeigen, also $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_{n+1}$

Induktions Anfang ($n=1$): $a_1 = 2 \leq 4 = a_2$ ✓

Induktionsschritt (" $n \Rightarrow n+1$ ") : Nehme als Induktionshypothese an, dass $a_n \leq a_{n+1}$ gilt.

$$a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow a_n + 6 \leq a_{n+1} + 6 \Rightarrow \underbrace{\left| \frac{1}{2}(a_n + 6) \right|}_{:= a_{n+1}} \leq \underbrace{\left| \frac{1}{2}(a_{n+1} + 6) \right|}_{:= a_{n+2}} \Rightarrow a_{n+1} \leq a_{n+2}$$

Per mathematischer Induktion gilt somit, dass $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_{n+1}$ gilt

Schritt 2: Beschränktheit mittels vollständiger Induktion zeigen

Induktionsanfang ($n=1$): $a_1 = 2 \leq 6$ ✓

Induktionsschritt (" $n \Rightarrow n+1$ ") : Nehme als Induktionshypothese an, dass $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq 6$ gilt.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6) \stackrel{\text{I.H.}}{\leq} \frac{1}{2}(6 + 6) = 6$$

Per mathematischer Induktion gilt somit, dass $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq 6$ gilt

Schritt 3: Schlussfolgerung über Konvergenz und Bestimmung des Grenzwerts

Da (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, konvergiert a_n .

Der Grenzwert entspricht:

$$\underbrace{\left| a_{n+1} \right|}_{\rightarrow a} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\left| a_n \right|}_{\rightarrow a} + 6 \right) \Rightarrow a = \frac{1}{2}(a + 6) \Rightarrow a = 6$$

Bsp. 3.2.3. (FS20, Aufgabe 3) Sei $(a_k)_{k \geq 1}$ die rekursive definierte Folge $a_1 = -\ln(2)$

$$a_{k+1} = e^{a_k} - 1, k \geq 1$$

Überprüfen Sie ob (a_k) konv. oder nicht. Falls (a_k) konv. zeigen Sie dies

und berechne seinen Grenzwert. Wenn die Folge nicht konv. begründen Sie die Divergenz.

Lös: Teleskopiere: $a_1 = -\ln(2)$, $a_2 = e^{-\ln(2)} - 1 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = e^{-1/2} - 1 \approx \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \approx \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}, \dots$

Schritt 1: Monotonie (Normalerweise Induktion, man sieht hier aber direkt mit Korollar 3.6.4 d.h. $e^x \geq 1+x$ das folgende)

$$x+1 \leq e^x$$

$$\Rightarrow x \leq e^x - 1$$

$$\Rightarrow a_k \leq a_{k+1}$$

Schritt 2: Beschränktheit mittels vollständiger Induktion

$$IA(n=1): a_1 = -\ln(2) \leq 0$$

IS ("n $\Rightarrow$ n+1"): Wir nehmen als IH an $a_k \leq 0$, damit gilt

$$a_{k+1} = e^{a_k} - 1 \stackrel{IH}{\leq} e^0 - 1 = 0 \leq 0 \quad \checkmark$$

Schritt 3: Schlussfolgerung und Grenzwert

Da (a_k) monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, konvergiert (a_n) gegen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{a_k} - 1 \rightarrow a = e^a - 1 \rightarrow a = 0$$

Grenzwert $a=0$.

Bsp. 3.2.3. (HS20, Aufgabe 3) Es sei $(a_k)_{k \geq 1}$ gegeben durch $a_1 = \ln(4)$

i) Beweisen Sie, dass $(a_k)_{k \geq 1}$ monoton wachsend ist $a_{k+1} = e^{a_k} - 1, k \geq 1$

ii) Bestimmen Sie, ob $(a_k)_{k \geq 1}$ konv. für $k \rightarrow \infty$. Falls die Folge konv., beweisen Sie dies und bestimmen Sie den Grenzwert. Andernfalls, argumentieren Sie warum $(a_k)_{k \geq 1}$ divergiert.

Lös: Versuche die Aufgabe selber zu lösen (Lösungen auf exams.vis.ethz.ch)

3.3. Satz von Weierstrass

(Defn. 2.5.7 Teilfolge)

Sei (a_n) eine Folge und $X \subset \mathbb{N}$ eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$, bspw. $X = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \bmod 2 = 0\} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$

Die Folgenglieder (a_n) mit $n \in X$ bilden eine Teilfolge von (a_n) .

Bsp: Bestimme Teilfolgen von $a_n = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$

Lös: $X = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \bmod 2 = 0\}: \{a_0, a_2, a_4, a_6, \dots\}$

$X = \{n \mid n = 4 \cdot m + 1, m \in \mathbb{N}\}: \{a_1, a_5, a_9, a_{13}, \dots\}$

(Satz 2.5.9 Weierstrass)

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ hat mindestens eine konvergente Teilfolge $(a_k)_{k \in X}$ ($X \subset \mathbb{R}$, X unendl.)

3.4. Limes inferior, Limes superior

(Definition Limes inferior, Limes superior, vgl. Skript 2.3)

Sei (a_n) eine beschränkte Folge. Definiere eine Teilfolge (b_n) aus (a_n) mit

$$b_n := \inf \{ a_k : k \geq n \} = \inf \{ a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots \}$$

etwas teleskopiert

$$b_0 = \inf \{ a_0, a_1, a_2, a_3, \dots \}, b_1 = \inf \{ a_1, a_2, a_3, \dots \}, b_2 = \inf \{ a_2, a_3, \dots \}$$

da wir eine immer kleineren Anzahl an Elementen für das $\inf$ anschauen gilt $b_n \leq b_{n+1}$.

Da nach Voraussetzung (a_n) beschränkt ist, und (b_n) als Teilfolge ebenfalls beschränkt ist gilt nach dem Satz über monotone Konvergenz dass (b_n) konvergiert, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

wir nennen diesen Grenzwert Limes inferior von (a_n) d.h. $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

Analog, definiert man die Teilfolge (c_n) mit

$$c_n := \sup \{ a_k : k \geq n \} = \sup \{ a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots \}$$

wobei gilt $c_{n+1} \leq c_n$, nach dem monotonen Konvergenzsatz (da auch (c_n) als Teilfolge von (a_n) beschränkt ist), dass (c_n) konvergiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$$

wir nennen diesen Grenzwert Limes superior von (a_n) , d.h. $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$

Bsp: Bestimme $\limsup$, $\liminf$ für $(a_n)_{n \geq 1} = (-1)^n$

Lös: Nach Definition $c_n = \sup \{ (-1)^k \mid k \geq n \}$

$$\text{Teleskopiere: } c_1 = \sup \{ a_1, a_2, a_3, \dots \} = \sup \{ -1, 1, -1, \dots \} = 1$$

$$c_2 = \sup \{ a_2, a_3, a_4, \dots \} = \sup \{ 1, -1, 1, \dots \} = 1$$

⋮

$$c_n = 1 \quad , \quad \text{also} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1$$

$$\text{Nach Definition } b_n = \inf \{ (-1)^k \mid k \geq n \}$$

$$\text{Teleskopiere: } b_1 = \inf \{ a_1, a_2, a_3, \dots \} = \inf \{ -1, 1, -1, \dots \} = -1$$

$$b_2 = \inf \{ a_2, a_3, a_4, \dots \} = \inf \{ 1, -1, 1, \dots \} = -1$$

⋮

$$b_n = -1 \quad , \quad \text{also} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = -1$$

(Lemma 2.4.1: Charakterisierung der Konvergenz)

Eine Folge (a_n) konvergiert $\Leftrightarrow (a_n)$ ist beschränkt und $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$

Bem: Gilt $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, so gilt dass (a_n) gegen A konv.

Themenübersicht Exercise Session 4

4.0. Anmerkungen zur Serie2

4.1. Cauchy Kriterium (Skript 2.4)

4.2. Folgen in $\mathbb{Q}$ (Skript 2.6)

4.3. Reihen (Skript 2.7)

4.4. Konvergenz von Reihen (Skript 2.7)

WICHTIG: Füllt bitte kurz die Umfrage vom O-MATH bzgl der Übungsstunde aus

4.0. Anmerkungen zur Serie 2

Aufgabe 2.2: Sei (a_n) eine konv. reelle Folge. Zeigen Sie, dass (a_n) beschränkt ist d.h. ein $C \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $|a_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Per Definition folgt aus (a_n) konvergent ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$), dass

$$\forall \varepsilon > 0. \exists N. \forall n \geq N. |a_n - A| < \varepsilon$$

also können wir sagen

$$|a_n| = |a_n - A + A| \stackrel{\text{dreiecksungleichung}}{\leq} \underbrace{|a_n - A|}_{< \varepsilon} + |A| \leq 1 + |A| \quad (\text{für } \varepsilon = 1)$$

d.h. alle Folgenglieder ab N sind beschränkt da $1 + |A|$ eine obere Schranke darstellt.

Für die ersten N Folgenglieder muss dies aber nicht zwingend gelten, es sind aber endlich viele, wähle also einfach

$$C = \max \{ |a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, 1 + |A| \}$$

Aufgabe 2.1 (MC)

a) W/F: Jede monotone von oben beschränkte Folge ist konvergent?

⇒ Falsch: wenn nach oben beschränkt, aber monoton fallend sagt Satz nicht aus

Aufgabe 2.4. (Grenzwerk), Wurzeltrick

Ihr solltet in AnD gesehen haben, Grenzwert " $\infty - \infty$ " ist nicht direkt entscheidbar, oftmals l'Hôpital anwenden, aber bei Wurzeln geht das folgende (denke an dritte binomische Formel)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - n \right) \cdot \frac{(\sqrt{n^2 + n} + n)}{(\sqrt{n^2 + n} + n)}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n}}_{n^2 \text{ dominiert}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n + n} = \frac{1}{2}$$

4.1. Das Cauchy Kriterium

(Einführung in Cauchy Folgen)

- Mit dem Cauchy-Kriterium können wir zeigen, dass eine Folge konvergiert oder divergiert ohne ihren Grenzwert zu kennen. (Insb. können wir den Grenzwert der Folge hiermit nicht bestimmen)
- Intuitiv sagt das Cauchy Kriterium, dass bei einer Cauchy Folge die Folgenglieder immer enger zusammenliegen (daher sind offenbar alle konvergenten Folgen Cauchy Folgen)

(Satz 2.4.2. Cauchy Kriterium)

Eine Folge auf $\mathbb{R}$ (a_n) konvergiert, genau dann wenn

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}. \forall n, m \geq N: |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Bsp: Ist $a_n = \frac{n-1}{2^n}$ konvergent?

Eine Folge ist konvergent, falls sie eine Cauchy Folge ist. Wir überprüfen anhand der Defn. des Kriteriums (vgl. Satz 2.4.2) wobei o.B.d.A. $m \geq n$ sein soll:

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= \left| \frac{n-1}{2^n} - \frac{m-1}{2^m} \right| = \left| \frac{2^m(n-1) - 2^n(m-1)}{4mn} \right| = \left| \frac{n-m}{2nm} \right| \\ &= \frac{1}{2n} - \frac{1}{2m} \stackrel{m \geq n}{\leq} \frac{1}{2n} \stackrel{!}{<} \varepsilon \end{aligned}$$

Für $n > \frac{1}{2\varepsilon}$ ist a_n eine Cauchy Folge, setze also $N = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil$

4.2. Folgen in $\mathbb{C}$

Einführung in komplexe Folgen

- Eine komplexe Folge (a_n) kann man als zwei reelle Folgen interpretieren
- Bis auf folgende Eigenschaften, gelten die Eigenschaften von Folgen auf $\mathbb{R}$ auch für solche auf $\mathbb{C}$:

i) Sei (b_n) eine reelle Folge und (a_n) eine komplexe Folge, wenn gilt

$$|a_n| \leq b_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{und } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0, \text{ so gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

ii) $\liminf, \limsup$ existieren nicht für komplexe Folgen, da $\mathbb{C}$ nicht angeordnet ist

(Satz 2.6.3)

Eine komplexe Folge (a_n) konvergiert, genau dann wenn $(\operatorname{Re} a_n)_{n \geq 1}, (\operatorname{Im} a_n)_{n \geq 1}$ konvergieren

(Satz 2.6.3. verallgemeinert auf dimension d , in $\mathbb{C}$ sind wir im Spezialfall $d=2$)

(Korollar aus 2.6.3, Satz 2.6.6)

Das Cauchy Kriterium und Bolzano-Weierstraß gelten auch auf $\mathbb{C}$ (bzw allgemein in Dimension d)

4.3. Reihen

(Defn. Reihe, 2.7)

Für eine gegebene Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ können wir eine neue Folge $(S_n)_{n \geq 1}$ definieren durch die Summation der ersten n Glieder von (a_n) , also

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Teleskopieren wir etwas: $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, ..., $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

(Defn. Partialsumme)

Wir bezeichnen $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ als die Partialsumme der unendlichen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

(Defn. Konvergenz von Reihen, Defn. 2.7.1)

Wir sagen, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent ist, falls die Folge $(S_n)_{n \geq 1}$ der Partialsummen konvergiert, wir schreiben

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

(Satz Summenregel für Reihen, Satz 2.7.4)

Seien $\sum_k a_k$, $\sum_k b_k$ konvergente Reihen, so gilt das auch die folgenden Reihen konvergent sind, es gilt:

- i) $\sum_k a_k + b_k = \sum_k a_k + \sum_k b_k$
- ii) $\sum_k a_k - b_k = \sum_k a_k - \sum_k b_k$
- iii) $\sum_k A \cdot a_k = A \cdot \sum_k a_k$ (mit $A \in \mathbb{C}$)

(Satz Cauchy Kriterium für Reihen, Satz 2.7.5)

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, genau dann wenn $\forall \varepsilon > 0. \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}. \forall m \geq n \geq N \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon$

Bem: Beachte, dass dieses Cauchy Kriterium anders ist als bei Folgen

(Satz Monotone Partialsummen, Satz 2.7.6)

Seien $a_k \geq 0$, die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, gdw $\exists C \in \mathbb{R}. \forall n \in \mathbb{N}. 0 \leq \sum_{k=1}^n a_k \leq C$

4.4. Konvergenz von Reihen

- Im Folgenden schauen wir einige Kriterien an, anhand derer wir entscheiden können ob eine Reihe konvergiert, und falls ja, wohin.

(Konvergenzbeweis mittels Definition)

- Man sucht nach einer (expliziten Form) für die Partialsumme S_n und bildet den Grenzwert

Bsp 4.4.1:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

Lös: Offenbar gilt $a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1+k-k}{k(k+1)} = \frac{(1+k)}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

Teleskopieren ergibt: $S_1 = a_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Bilden wir also den Grenzwert folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\rightarrow 0}\right) = 1$$

d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ ist konvergent mit Wert 1.

Bsp 4.4.2. (Skript 27.2): $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$

Lös: Offenbar gilt $a_k = q^k$

Teleskopieren ergibt: $S_0 = a_1 = 1$

$$S_1 = a_1 + a_2 = (1) + (q)$$

$$S_2 = a_1 + a_2 + a_3 = (1) + (q) + (q^2)$$

$\vdots$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\Rightarrow q \cdot S_n = q + q^2 + \dots + q^{n+1}$$

$$\Rightarrow S_n - q S_n = (1 + q + q^2 + \dots + q^n) - (q + q^2 + \dots + q^{n+1}) = 1 - q^{n+1}$$

$$\Rightarrow (1 - q) S_n = 1 - q^{n+1}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Bilden wir den Grenzwert folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \\ +\infty & |q| \geq 1 \end{cases}$$

Folgerung: Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert genau $|q| < 1$, dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

(Satz Majoranten- und Minorantenkriterium, Vergleichssatz Korollar 2.7.7)

Es sei $0 \leq a_k, b_k$ mit $a_k \leq b_k$ ab einem K , dann gilt:

i) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert (Majorantenkriterium)

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergiert (Minorantenkriterium)

Bem: Schätze die Folge (a_n) für das Majorantenkriterium nach oben durch (b_n) ab und zeige, dass die Majorante konvergiert $\sum_k b_k$ ist, woraus folgt dass $\sum_k a_k$ konv. ist (analog für das Minorantenkriterium)

Bem: Offenbar braucht $a_k \leq b_k$ erst ab einem $K \in \mathbb{N}$ zu gelten, falls dies also für endlich viele $k \leq K$ nicht gilt können wir $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{K-1} a_k}_{\text{als endliche Summe nicht relevant für konv.}} + \underbrace{\sum_{k=K}^{\infty} a_k}_{\text{Verwende Majoranten-/Minorantenkriterium}}$ aufteilen

Bem: Zwei wichtige Reihen für das Vergleichskriterium

i) Geometrische Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergent genau $|q| < 1$

ii) (Riemannsche) Zeta Funktion: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ konvergent genau $s > 1$

Bsp 4.4.3. (Skript 2.7.8): $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert

Lös: Sei $a_k = \frac{1}{k^2}$, $b_k = \frac{1}{k(k-1)}$, dann gilt $0 \leq a_k \leq b_k$ für alle $k \geq K=2$

Wir zeigen analog zum Bsp 4.4.1.) dass $\sum_k \frac{1}{k(k-1)}$ konvergiert mittels Definition

$$S_n = \sum_{k=2}^n b_k = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)}_{=1} = 1 - \frac{1}{n}$$

Vgl. Term oben

also
$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$$

da die Majorante b_k konvergiert, gilt nach dem Satz das $a_k = \frac{1}{k^2}$ konvergiert.

Bem: Wir hätten auch direkt darauf schliessen können, das $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert. (warum?)
 $\Rightarrow$ Riemannsche Zetafkt, $s=2$

Bsp 4.4.4: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)}$ konvergiert

Lös: Sei $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)}$ und $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}k}$, offenbar gilt $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k}$

es gilt also $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}k} = \frac{1}{k^{3/2}}$, also ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ eine Majorante,
die wegen Riemann mit $s=3/2 > 1$ konvergiert, von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)}$ also
konv. nach dem Majorante/Minorantenkriterium auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)}$.

Bsp 4.4.5: Konvergiert oder Divergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k + 1}{3^k + 1}$

Lös: offenbar gilt $3^k + 1 \geq 3^k$, also

$$\frac{2^k + 1}{3^k + 1} \leq \frac{2^k + 1}{3^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k + \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

offenbar konv. die Majorante $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k + \left(\frac{1}{3}\right)^k$ als Summe zweier geom. Reihen
mit $q_1 = 2/3$, $q_2 = 1/3$, womit auch die Minorante $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k + 1}{3^k + 1}$ konv ist.

Themenübersicht Exercise Session 5

5.0. Anmerkungen zur Serie (Induktion auf zwei vars)

5.1. Absolute Konvergenz von Reihen (Skript 2.7)

5.2. Leibniz und Dirichlet auf Reihen (Skript 2.7)

5.3. Quotienten und Wurzelkriterium (Skript 2.7)

5.4. Potenzreihen (Skript 2.7)

WICHTIG: Füllt bitte kurz die Umfrage vom O-MATH bzgl der Übungsstunde aus

5.0. Anmerkungen zur Serie 3

- Für Induktionsbeweise mit zwei Variablen (wie Fibonacci) braucht ihr zwei Verankerungen (Base-cases) und zwei Induktionshypothese

5.1. Absolute Konvergenz von Reihen

(Definition, Nullfolgenkriterium)

Sei (a_n) eine Folge, so gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergiert}$$

beziehungsweise äquivalent

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| = 0$$

d.h. wenn die Reihe $\sum_k a_k$ konvergiert, so müssen die Glieder eine Nullfolge bilden, bzw. umgekehrt, wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|$ nicht Null ist kann $\sum_k a_k$ nicht konv.

Das Kriterium ist hinreichend (d.h. wenn eine Reihe konv. muss es erfüllt sein) aber nicht notwendig (d.h. es existieren divergente Reihen die eine Nullfolge als Glieder haben, vgl. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$)

Bsp 5.1.1. Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{1/k}$

Lös: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{1/k}$ divergiert da $|a_k| = k^{1/k}$ für $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| = 1 \neq 0$

(Definition, Absolute Konvergenz, Skript 2.7.9)

Die Reihe $\sum_k a_k$ heißt absolut konvergent, falls

$$\sum_k |a_k|$$

konvergiert

(Satz Absolute Konvergenz, Skript 2.7.10)

Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent. Zudem gilt

$$|\sum_k a_k| \leq \sum_k |a_k|$$

Bem: Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz. Kann man also absolute Konvergenz einer Reihe nachweisen (was oft leichter ist) kann man direkt Konvergenz der Reihe folgern

Bem: Die Umkehrung des Satzes ist falsch (Warum?), vgl. $\sum_n (-1)^n \cdot 1/n$ konv nach Leibniz, trotzdem ist die Reihe nicht absolut konvergent

Bsp 5.1.2. Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2k}{3k+42} \right)^k$

Lös: Betrachten wir den Absolutbetrag der Reihe erhalten wir die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k}{3k+42} \right)^k$$

es gilt offenbar $\frac{2k}{3k+42} \leq \frac{2k}{3k} \leq \frac{2}{3}$

damit konvergiert der absolut Betrag der Reihe da die Majorante als Geometrische Reihe mit $q = 2/3 < 1$ konvergiert nach Satz 2.7.10 über absolute Konvergenz konvergiert also auch die ursprüngliche Reihe

Bsp 5.1.3. Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k!}$

Lös: Offensichtlich wechselt das Vorzeichen permanent wegen $\sin k$, da $|\sin k| \leq 1$ ist

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ eine Majorante der Absolutbetragsreihe, die Reihe konvergiert nach

dem Quotientenkriterium (siehe Bsp. später), damit also auch die ursprüngliche Reihe.

5.2. Leibniz und Dirichlet auf Reihen

(Satz, Leibniz, Skript 2.7.12)

Sei eine alternierende Reihe $\sum_k (-1)^k a_k$ gegeben, falls

- i) $a_k \geq 0$ ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ iii) $a_{k+1} \leq a_k$ (monoton fallend)

gilt so konvergiert die Reihe $\sum_k (-1)^k a_k$

Bem. Wenn wir die Konvergenz einer Majoranten einer Absolutreihe zeigen wollen aber bestenfalls auf $|(-1)^k a_k| \leq b_k = 1/n$ kommen, dann haben wir durch das eliminieren des $(-1)^k$ Terms zu grob abgeschätzt
(vgl. Harmon. Reihe $\sum_k 1/k$ div. aber alternierende Harmon. Reihe $\sum_k (-1)^k 1/k$ konv.)
 $\Rightarrow$ hier kann das Leibnizkriterium helfen

Bsp. 5.2.1 Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$

Lös: i) $a_k = \frac{1}{k} \geq 0$ ✓ ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$ ✓, iii) $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k}$ ✓

damit folgt, dass die alternierende harmon. Reihe nach dem Leibnizkriterium konv. ist.

Bsp 5.2.2. Konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{k^2}$

Lös: Offenbar gilt $\cos(n\pi) = (-1)^n$, also haben wir $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{k^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k^2}$

i) $a_k = \frac{1}{k^2} \geq 0$ ✓ ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2} = 0$ iii) $a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{k^2 + 2k + 1} \leq \frac{1}{k^2} = a_k$

nach dem Leibnizkrit. ist die Reihe also konv.

Bem: Man hätte konv. in diesem Fall auch schneller als mit dem Leibnizkrit zeigen können (warum? die Absolutbetragsreihe konv. als Riemann mit $s=2$)

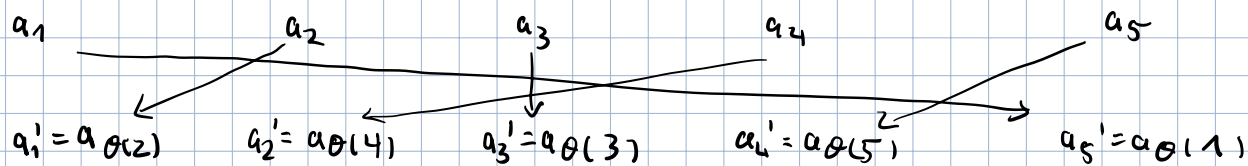
(Def. Umordnung)

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$ ist eine Umordnung der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, falls eine bijektive Abbildung

$$\theta: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$$

existiert mit $a'_k = a_{\theta(k)}$

Bem: Da eine Permutation genau eine bijektive Abbildung einer Menge auf sich selbst ist, folgt daraus, dass jede Umordnung der Reihe eine Permutation der natürlichen Zahlen ist.
Wir permutieren also die Glieder, d.h.



(Umordnungssatz, Dirichlet, Skript 2.7.16)

Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann konv. jede Umordnung der Reihe und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\theta(n)}$$

Bem: Wegen dieses Satzes wollen wir hauptsächlich mit absolut konvergenten Reihen arbeiten

5.3. Quotienten und Wurzelkriterium

(Satz, Quotientenkriterium, Skript 2.7.17)

Sei $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$, so gilt

$$i) \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_n a_n \text{ konvergiert}$$

$$ii) \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_n a_n \text{ divergiert}$$

Bem.: In der Vorlesung wurde das Kriterium mit $\limsup$, $\liminf$ definiert, falls $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ konvergiert ist, sind obige Aussagen äquivalent mit $\lim$

Kriterium eignet sich bei Polynomen, Exponentialtermen und Fakultäten in a_n

Bsp 5.3.1 Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ (vgl. Bsp 5.1.3.)

$$\text{Lös: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

also konv. die Reihe nach dem Quot. Krit.

Bsp. 5.3.2. Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

$$\text{Lös: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1} n^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 = \frac{1}{2} < 1$$

Bsp 5.3.3. Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$

$$\text{QR: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 > 1, \text{ also divergiert die Folge}$$

Bsp 5.3.4 Konv. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\text{QR: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

Bem: Was wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$? Dann können wir i. Allg. keine Aussage machen

und müssen die Konvergenz anders charakterisieren

(Satz, Wurzelkriterium, Skript 2.7.20)

Sei $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$, so gilt

$$i) \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_n a_n \text{ konvergiert}$$

$$ii) \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_n a_n \text{ divergiert}$$

Bem: - Kriterium eignet sich bei Gliedern mit Potenzen in Abhängigkeit von n

Bsp. 5.3.5 Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{1/n} - 1)^n$

Lös: WK: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{n^{1/n}}_{\rightarrow 1} - 1 = 0 < 1$

also konv. die Reihe nach dem WK

Bsp 5.3.6. Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} (2 + \frac{1}{n})^n$

$$\text{WK: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{2 + \frac{1}{n}}_{\rightarrow 0} = 2 > 1,$$

also div. die Reihe nach dem WK

5.4. Potenzreihen

(Definition, Potenzreihe)

Eine Potenzreihe ist gegeben als

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

mit z einer Variablen in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und c_k eine reelle oder komplexe Folge.

(Def. Exponentialfunktion)

Die Exponentialfunktion ist definiert durch ihre Potenzreihe, die gegeben ist als

$$e^z = \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

(Satz Konvergenzradius ρ)

Es gibt drei Möglichkeiten für eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

- i) Für $z \neq 0$ divergiert $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, wir sagen der Konvergenzradius ist $\rho = 0$
- ii) Für alle $z \in \mathbb{R}$ (bzw. $z \in \mathbb{C}$) konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ absolut, wir sagen $\rho = \infty$ (bspw. $\exp(z)$)
- iii) Es gibt ein $\rho \in (0, \infty)$, sodass
 - $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ konv. absolut für $|z| < \rho$
 - $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ divergiert für $|z| > \rho$
 - Für $z = \rho$ hat man keine Aussage

(Satz, Bestimmung des Konvergenzradius ρ)

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ eine Potenzreihe, so gilt für den Konvergenzradius ρ

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Bsp. 5.4.1. Bestimme den Konvergenzradius ρ von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} \right) \cdot z^k$, $z \in \mathbb{C}$
 $c_k \cdot z^k$

Lös: $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$

also konv. die Potenzreihe $\forall z \in \mathbb{C}$

Bsp 5.4.2. Bestimme ρ von $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a}{k}\right)^{k^2} z^n$, wobei $a \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n} = \frac{1}{e^a} = e^{-a}$$

also konv. die Potenzreihe $\forall z \in \mathbb{C}$. $|z| < e^{-a}$ und div. $\forall z \in \mathbb{C}$. $|z| > e^{-a}$

Themenübersicht Exercise Session 6 : Stetige Funktionen

6.0. Anmerkungen zu Serie 4, Feedback

6.1 Stetige Funktionen [Skript 3.1, 3.2]

6.2. Zwischenwertsatz (ZWS) [Skript 3.3]

6.3 Min-Max- Satz [Skript 3.4]

6.0. Anmerkungen Serie 4, Feedback

4.2. Beweis zu konvergenten Folgen

Wie geht man beweise zu Folgen an? Wie gehabt: oftmals defn + straightforward idce

Gegeben: $(a_n), (b_n)$ Folgen, $a_n, b_n > 0$, Angenommen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, für ein $L > 0$

a) z: $\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N: \frac{L}{2} b_n < a_n < \frac{3L}{2} b_n$

Nach Defn. Konvergenz: $\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N: \left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \varepsilon$

d.h. lösen wir auf:

$$\forall n \geq N \text{ folgt } \left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - L < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow (L - \varepsilon) b_n < a_n < (L + \varepsilon) b_n$$

Also, für $\varepsilon = \frac{L}{2}$ gilt offenbar $(L - \frac{L}{2}) b_n < a_n < (L + \frac{L}{2}) b_n$

$$\Leftrightarrow \frac{L}{2} b_n < a_n < \frac{3L}{2} b_n, \text{ qed.}$$

b) z: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konv.}$

Wie oftmals in Ana1 baren Teilaufgaben aufeinander auf, behaltet also immer im Hinterkopf wie euch das eben gelöste hier helfen könnte

" $\Rightarrow$ " Wir dürfen annehmen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Da aber gilt

$\frac{L}{2} b_n < a_n$ können wir a_n als konvergierendes Majorante ansehen:

nach dem Vergleichssatz konv. also auch $\sum_{n=N+1}^{\infty} b_n$

" $\Leftarrow$ " Analog

Final: Da Konvergenz nie von endlich vielen Termen abhängt, also insbesondere nicht von ihren ersten N , folgt die Behauptung

c) Finde zwei konkrete Folgen mit $a_n, b_n > 0$, $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$, $\sum a_n$ konv., $\sum b_n$ div

Einfachste Lösung $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n}$: $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$

und $\sum \frac{1}{n^2}$ konv. (Riemann mit $s=2$), aber $\sum \frac{1}{n}$ div. (harmon)

6.1. Stetige Funktionen

Funktionen als Vektorraum

In linearer Algebra habt ihr Vektorräume (VR) kennengelernt. Es ist sehr nützlich sich Funktionen als Elemente eines Vektorraums zu betrachten:

Sei $D \subset \mathbb{R}$ beliebig, dann ist

$$F(D) = \{ f: D \rightarrow \mathbb{R} \}$$

ein VR über $\mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften

- i) $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$
- ii) $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$
- iii) $(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) f_2(x) = f_2(x) f_1(x)$ (kommutativer Ring)

Nun können wir den Unterraum (UR), versehen mit dem Namen $C(D)$ aller stetigen Funktionen betrachten:

$$C(D) = \{ f: D \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$$

Man schreibt statt $C(D)$ auch oftmals $C^0(D)$. Offenbar gilt $C(D) \subset F(D)$

Einführung in Stetigkeit

Intuitiv und mathematisch inkorrekt/unvollständig kennt man Stetigkeit charakterisiert durch:

- Es gibt keine Sprünge, Lücken oder Unendlichkeitsstellen im Graphen
- Wenn man sich einem bestimmten Punkt x_0 auf der x -Achse nähert, dann nähert sich auch der Funktionswert $f(x_0) = y$ dem Wert an auf den x_0 abgebildet wird

Machen wir dies nun mathematisch rigoros und formal kommen wir auf folgende Definitionen.

(Definition Stetigkeit, Skript 3.2.1)

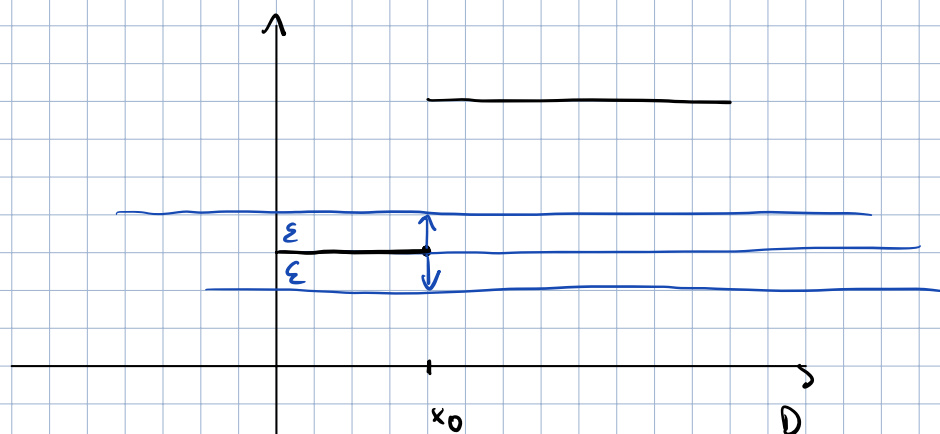
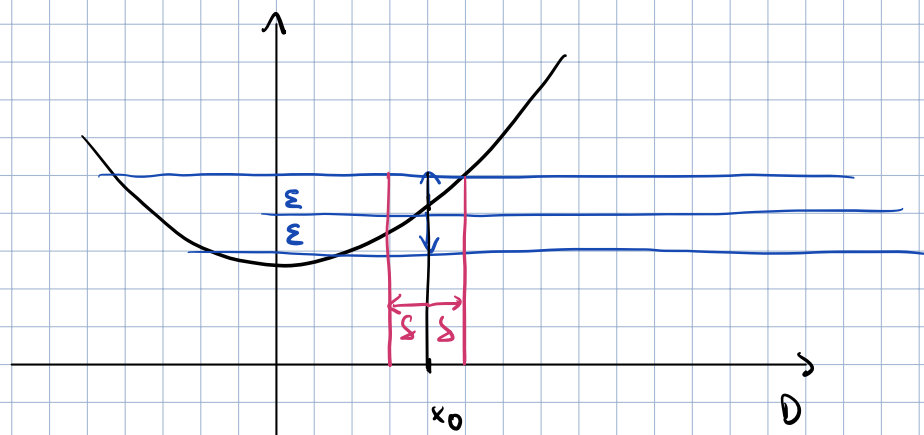
Sei $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Wir nennen eine Funktion stetig beim Punkt $x_0 \in D$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta(\varepsilon, x_0). \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Wir nennen f auf D stetig, falls f in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.

Wir nennen $C(D)$ den Raum aller stetigen Funktionen auf D .

Graphisch: Applet Einsiedler (s. Link Website)



Hier kann man (für ε klein genug) offenbar kein δ finden, sodass die obige Bedingung erfüllt ist. Offenbar können also Funktionen die "Sprünge" enthalten nie an ihren "Sprungstellen" stetig sein

Bsp. C.1.1. Beweise die Stetigkeit von $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$

Lös: Wir gehen ähnlich wie bei den ε -Beweisen bei Folgen vor: um Stetigkeit von f auf $D = \mathbb{R}$ zu zeigen, muss Definition also für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gelten. Sei x_0 also beliebig aber fixiert. Nun wähle beliebig kleines $\varepsilon > 0$. Bleibt zu zeigen, dass ein δ existiert, sodass für alle x in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, also

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < x^2 - x_0^2 < \varepsilon$$

Fallunterscheidung:

$$\text{i) } x^2 - x_0^2 < \varepsilon \Rightarrow x^2 < \varepsilon + x_0^2 \Rightarrow x < \sqrt{\varepsilon + x_0^2}$$

$$\text{ii) } -\varepsilon < x^2 - x_0^2 \Rightarrow x_0^2 - \varepsilon < x^2 \Rightarrow \sqrt{x_0^2 - \varepsilon} < x$$

für x mit $\sqrt{x_0^2 - \varepsilon} < x < \sqrt{\varepsilon + x_0^2}$ gilt also $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Also haben wir

unsere δ -Umgebung gefunden: $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$ mit $\delta_1 = x_0 - \sqrt{x_0^2 - \varepsilon}$, $\delta_2 = \sqrt{\varepsilon + x_0^2} - x_0$
[denn $|x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$]

Da das Intervall i. Allg. nicht symmetrisch ist wählen wir das Minimum, $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$.

Für dieses δ gilt also für beliebiges $x_0 \in D = \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta(\varepsilon, x_0). \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

damit ist f auf $D = \mathbb{R}$ stetig.

(Satz: Charakterisierung der Stetigkeit mittels konvergenter Folgen, Skript 3.2.4)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig in x_0 , genau dann wenn

für alle Folgen mit $a_n \in D$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$.

Bem: Diese Charakterisierung ist in der Praxis oft wichtig, weil sie einfacher zu überprüfen ist (vgl. δ - ε -Beweis oben)

Bsp. 6.1.2 Beweise die Stetigkeit von $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$

Damit f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist, sei x_0 beliebig aber fixiert. Sei (a_n) eine beliebige Folge

mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$. Bleibt zu zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) = x_0 \cdot x_0 = x_0^2 = f(x_0)$$

(Korollar: Eigenschaften von stetigen Funktionen, Skript 3.2.5)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, so gilt

- i) $f+g$ ist stetig
- ii) $f \cdot g$ ist stetig
- iii) f/g ist stetig, falls $g \neq 0$

Bem: Obiges gilt auch für $f, g|_{x_0}$

Bem: Hat man $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: f(D) \rightarrow \mathbb{R}$, und sind f, g stetig so ist $g \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

(Definition: Stetigkeit von Polynomen, Skript 3.2.6, 3.2.7, 3.2.8)

Mit den Rechenregeln für Stetigkeit folgt:

- Alle Polynome mit reellen Koeffizienten sind stetig
 - Alle Quotienten von Polynomen sind stetig, solange der Nenner nicht verschwindet
 - Jede Potenzreihe ist auf ihrem Konvergenzradius eine stetige Funktion, da $p = +\infty$
- für $\exp, \sin$ und $\cos$ sind diese Funktionen überall stetig

Bsp 6.1.3: Ist $\frac{\cos(x) + \sin(x) + x^5 - 2}{e^x + 3} = f(x)$

Lös: Als Komposition stetiger Funktionen ($\sin$, $\exp$), und da $e^x + 3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ (also nicht verschwindet) ist $f(x)$ stetig

Bsp 6.1.4: Zeige, dass $g(x) = \exp(\exp(x^3 - 2))$ auf $D = \mathbb{R}$ stetig ist

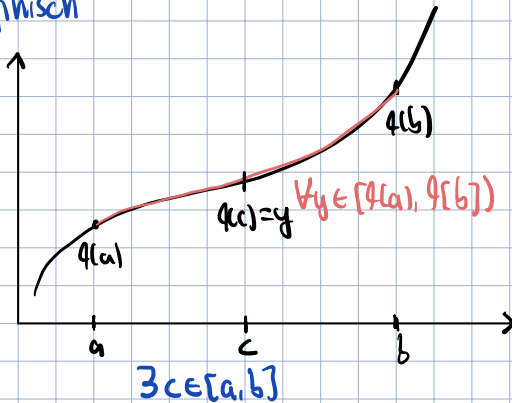
Die Funktionen $x \mapsto (x^3 - 2)$ und $x \mapsto \exp(x)$ sind stetig in $D = \mathbb{R}$ (vgl. Skript, Polynom und $\exp$ -fkt), so ist auch die Komposition dieser stetig

6.2. Der Zwischenwertsatz (ZWS)

(Zwischenwertsatz, Skript 3.3.1)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für alle $a, b \in I$ mit $a < b$ und für alle $y \in [f(a), f(b)]$ gibt es mindestens ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = y$.

Graphisch



Kontext: habt ihr eine stetige Funktion und wollt "von $f(a)$ nach $f(b)$ ", müsst ihr jeden Wert y zwischen $[f(a), f(b)]$ mindestens einmal angenommen haben: d.h. umgekehrt, dass es für diesen y ein $c \in [a, b]$ geben muss mit $y = f(c)$.

Bsp. 6.2.1 Beweise, dass $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$ eine Nullstelle in $[1, 2]$ hat

Los: f ist ein Polynom und als solches stetig, also dürfen wir den ZWS anwenden.

Da gilt

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0 \quad \text{und} \quad f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$$

nach dem ZWS muss f alle Werte in $[f(1), f(2)] = [-1, 12]$ annehmen, also

muss insb. ein $c \in [1, 2]$ liegen, sodass $f(c) = 0 \in [-1, 12]$, unsere gesuchte Nullstelle

6.3. Der Min-Max Satz

(Definition kompaktes Intervall, Skript 3.4.2)

Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist kompakt, falls es von der Form

$$I = [a, b], \quad a \leq b$$

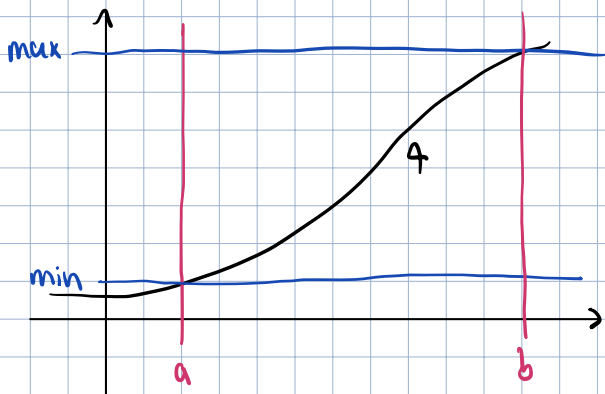
ist, d.h. abgeschlossen (enthält a und b) und beschränkt (liegt zwischen a und b) ist.

(Satz: Min-Max Satz, Skript 3.4.5)

Sei $a \leq b$ in $\mathbb{R}$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt: stetige Funktionen nehmen auf kompakten Intervallen Minimum und Maximum an.

Insbesondere ist f beschränkt.

Graphisch



Exercise Session 8

8.1. Umkehrabbildung [Skript 3.6]

8.2. Punktweise Konvergenz von Funktionenfolgen [Skript 3.7]

8.3. Gleichmässige Konvergenz von Funktionenfolgen [Skript 3.7]

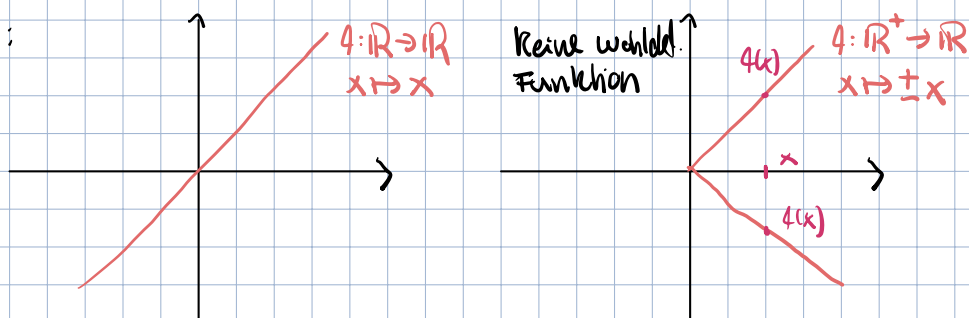
8.4. Punktweise und Gln. Konv. von Reihen stetiger Funksn [Skript 3.7]

§.1. Umkehrabbildung

(Defn. Funktion)

Eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ ist eine Teilmenge der Relation $X \times Y$, sodass jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zugeordnet ist, nämlich $y = f(x)$ (vgl. Wohldefiniert aus Disk/Math)

Bsp: Funktionen:



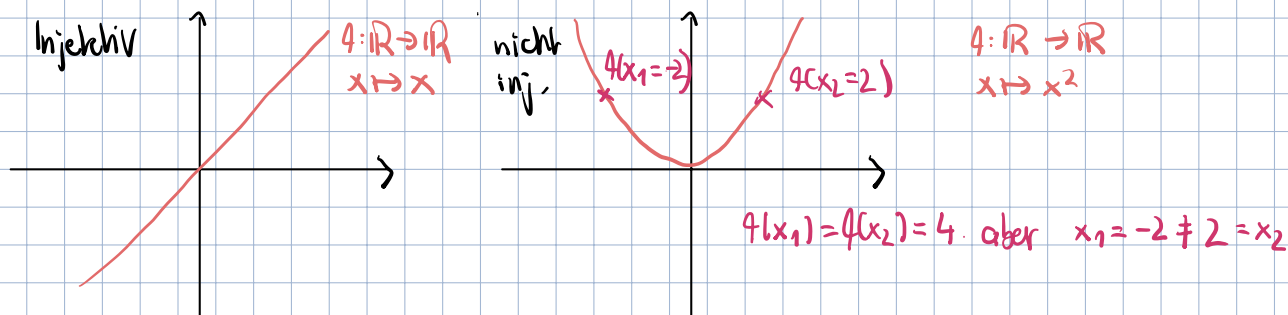
(Defn. Injektiv)

Eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ ist injektiv, falls

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{oder} \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

d.h. verschiedene Werte $x \in X$ dürfen nicht auf denselben Wert $y \in Y$ abgebildet werden.

Bsp: Injektiv



Bem: Man kann Injektivität von f zeigen, indem man strenge Monotonie zeigt!

Strenge Monotonie sagt: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (wachsend) oder $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ (fallend)

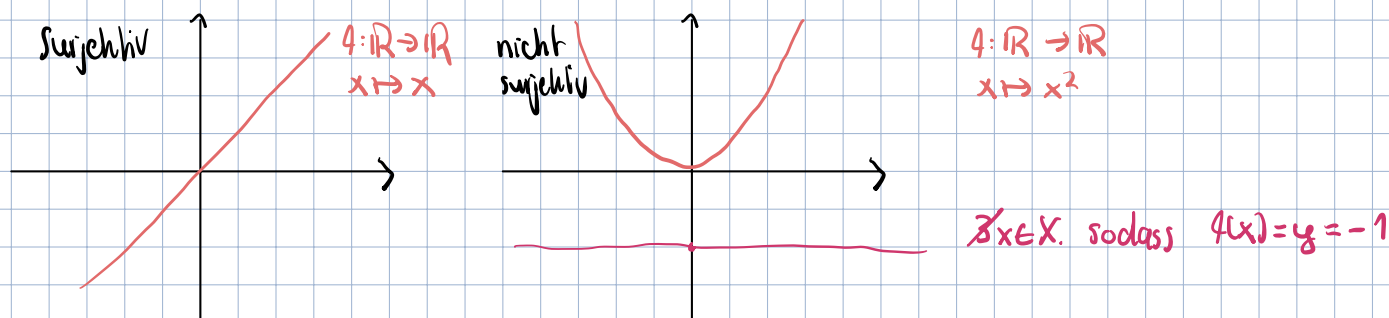
(Defn. Surjektiv)

Eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ ist surjektiv, falls

$$\forall y \in Y. \exists x \in X. f(x) = y$$

d.h. jedes $y \in Y$ wird mindestens einmal angenommen.

Bsp: Surjektiv



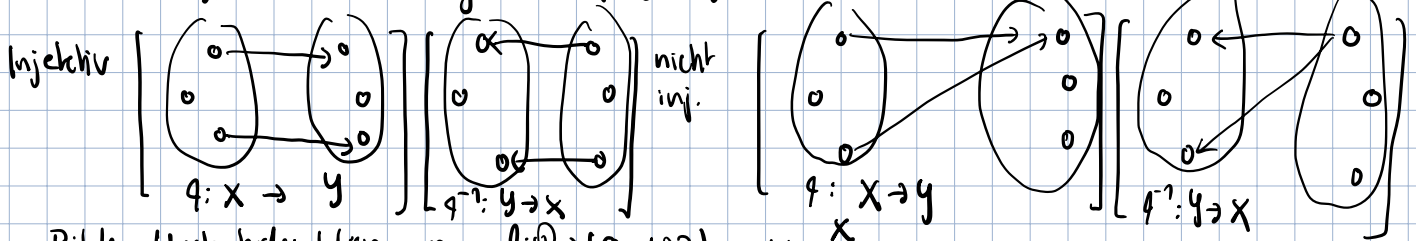
Defn. Bijektiv

Eine Funktion ist bijektiv, falls sie injektiv und surjektiv ist.

(Satz Umkehrabbildung, Skript 3.5.3)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton (d.h. injektiv). Dann ist nach dem Zwischenwertsatz $f(I) = J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall sodass $f^{-1}: J \rightarrow I$ stetig und streng monoton ist.

Bem: Wir können nur dann eine Umkehrabbildung erstellen, wenn f injektiv ist, da sonst die Eindeutigkeit verletzt ist (nicht mehr wohldef.)

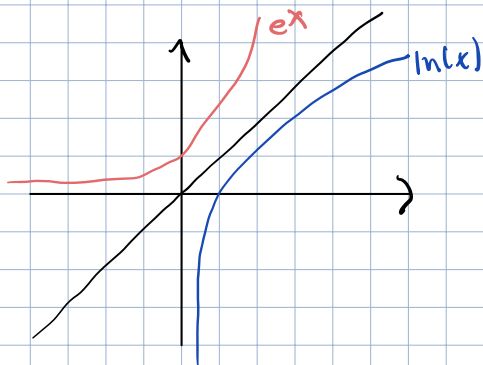


Bsp: Bilde Umkehrfunktion von $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $x \mapsto e^x$

Lös: f ist i) stetig und ii) streng monoton wachsend ($\frac{\partial e^x}{\partial x} = e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$) also injektiv. Damit können wir die Umkehrabbildung bilden:

$$f(x) = y = e^x \Rightarrow \ln(y) = x$$

also ist $f^{-1}(x) = \ln(x)$ die Umkehrabb. mit $f^{-1}: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

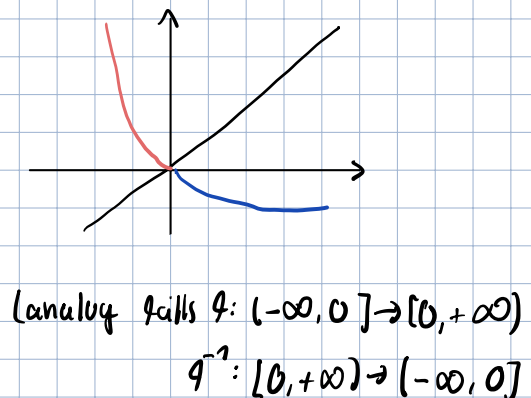
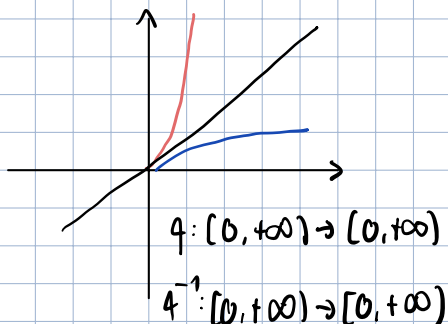


Bsp: Bilde, falls ex. die Umkehrfunktion von $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $x \mapsto x^2$

Lös: f ist i) stetig (als Polynom), ii) streng monoton da $\frac{\partial x^2}{\partial x} = 2x > 0 \forall x \in (0, +\infty)$, also injektiv, also existiert die Umkehrabbildung mit

$$f(x) = y = x^2 \Rightarrow \sqrt{y} = x$$

also $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, mit $f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$



Bsp (FS21): Analysiere folgende Funktion f auf strenge Monotonie und bestimme falls möglich eine Inverse (gebe Defn. + Wertebereich von f^{-1} an)

$$f(x) = \ln(x-17) + 2, x \in (17, +\infty), f: (17, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

Los: f ist streng monoton wachsend da $\frac{df}{dx} = \frac{1}{x-17} > 0 \forall x \in (17, +\infty)$, also ist f injektiv und f ist stetig (ln+poly+const) also ex. eine Umkehrabb. Inverse f^{-1} gegeben als

$$f(x) = y = \ln(x-17) + 2 \Rightarrow y-2 = \ln(x-17)$$

$$\Rightarrow e^{y-2} = x-17$$

$$\Rightarrow e^{y-2} + 17 = x$$

gegeben als $f^{-1}(x) = e^{x-2} + 17$, $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (17, +\infty)$

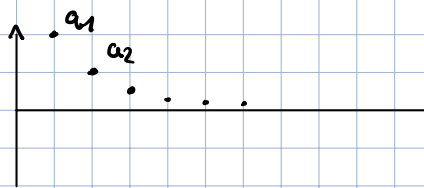
5.2. Punktweise Konvergenz

Einführung in Funktionenfolgen

Anstatt wie im vorherigen Kapitel Folgen von Zahlen (in $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C}$) zu betrachten wie

$$(a_n)_{n \geq 1} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$



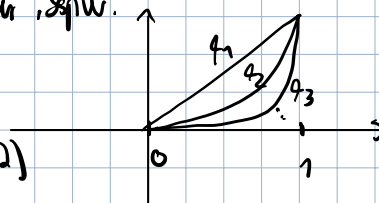
oder Folgen von Partialsummen

$$(S_n)_{n \geq 1}, S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$$

Betrachten wir nun Funktionen als Folgenglieder, d.h.

$$(f_n)_{n \geq 1} = f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

$$(x^n)_{n \geq 1} = x, x^2, \dots, x^n, \dots \quad (f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R})$$



(Defn. Punktweise Konvergenz, Skript 3.7.1)

Eine Folge Funktionen $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ konv. Punktweise gegen eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, falls:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{alternativ} \quad \forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Bsp 8.2.1. (Skript 3.7.1): $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \quad (\text{vgl. Skript 2.2.3}) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$



Bem: $f_n(x) = x^n$ ist stetig, f aber nicht. Begriff der punktweisen Stetigkeit offenbar zu schwach, brauchen stärkeren Begriff: Einführung von gleichmäßig Stetigkeit

(Definition Gleichmässige Konv., Alternative Defn. zum Skript vgl. Vorlesung)

Eine Folge stetiger Funktionen $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ konv. glm. gegen f , falls gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad \text{alternativ} \quad \forall \varepsilon > 0. \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. \forall x \in D. |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Korollar (Skript 3.7.7): Konv. f_n (Folge stetiger Fkt) glm zu f , so ist $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ stetig

Bem: Glm. Stetigkeit $\Rightarrow$ Punktweise Stetigkeit
 $\Leftarrow$

Bem: f unstetig $\Rightarrow$ keine glm. Konv.

Rezept für Glm. Konvergenz

1) Bestimme zuerst Funktion f gegen die f_n konvergiert, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

wenn f wohldefiniert ist, dann konv. f_n punktweise gegen f .

2) Für glm. Konv. zeige

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Falls dies gilt, sagt man, dass f_n bzgl. der Supremumsnorm konvergiert ist.

Dies ist äquivalent zu Defn. 3.7.3 Weierstrass ε -Defn. da Konvergenz bzgl.

allen Normen auf $\mathbb{R}$ äquivalent ist.

Bsp 8.2.2. Untersuche $f_n(x) = x^2 + e^{-nx^2}$ auf gleichmässige Konvergenz auf $D = [1, \infty)$

Lös: 1) Wir haben Punktweise Konvergenz gegeben, da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^2 + \underbrace{e^{-nx^2}}_{\rightarrow 0} = x^2$$

2) Für glm. Konv. müssen wir zeigen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

wir haben

$$\begin{aligned} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x \in D} |(x^2 + e^{-nx^2}) - x^2| \\ &= \sup_{x \in D} |e^{-nx^2}| \end{aligned}$$

$$\sup_{x=1}^n |e^{-nx^2}| = e^{-n}, \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0, \text{ also konv. } f_n \text{ glm. gegen } x^2$$

Bsp. 8.2.2. Konv. f_n (wie oben) auf $D=[0, \infty)$?

Lös: Nein, da gilt:

$$\sup_{x \in D} |e^{-nx^2}| = \sup_{x=0} |e^{-nx^2}| = 1$$

$$\text{also } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 1 \neq 0$$

Bsp. 8.2.3. Konv. $f_n(x) = x^n$ für $D=[0, \frac{1}{2}]$ glm?

Lös: 1) Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ (da $0 \leq x < 1 \forall x \in D$)

2) Für glm. Konv. gegen Grenzfunktion $f(x)=0$ muss gelten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0, \text{ also}$$

$$\sup_{x \in [0, 1/2]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1/2]} |x^n - 0| = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{also } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1/2]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Bsp. 8.2.4. zeige, dass die folgende Funktionenfolge auf dem gegebenen Bereich glm. Konvergenz ist. Finden Sie die Grenzfunktion

$$f_n(x) = \frac{x}{n^2} + x + 1, \quad x \in [0, 1]$$

Lös: 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{x}{n^2}\right)}_{\rightarrow 0} + x + 1 = x + 1$

also ist $f(x)$ punktweise stetig zu $f(x) = x + 1$

2) $\mathbb{Z}$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$

$$\text{mit } \sup_{x \in [0, 1]} \left| \left(\frac{x}{n^2} + x + 1\right) - (x + 1) \right| = \sup_{x \in [0, 1]} \left| \frac{x}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$$

gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$, also ist $f_n(x)$ glm. stetig zu f .

8.4. Punktweise / glm Konvergenz von Funktionenfolgen bei Reihen

(Defn. Partialsumme)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen. Wir definieren

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

als die Folge der Partialsummen. Da $S_n(x)$ eine Summe stetiger Funktionen ist, kann man von Punktweiser bzw. Gleichmässiger Konvergenz sprechen.

(Defn. Punktweise Konv. von Partialsummen)

Sei $f_k: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge, betrachte Folge der Partialsummen $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$. $S_n(x)$ bildet eine Folge stetiger Funktionen (warum?). S_n konv. punktweise auf D , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

für alle $x \in D$ existiert

(Defn. Glm. Konv, Skript 3.7.6)

Sei $f_k: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge, betrachte Folge der Partialsummen $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$. $S_n(x)$ bildet eine Folge stetiger Funktionen (warum?). S_n konv. glm. auf D , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right| = 0$$

d.h. falls die von $S_n(x)$ defn. Funktionenfolge glm konv.

(Vergleichssatz, Skript 3.7.9)

Sei $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen, betrachte $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, gilt

i) $|f_n(x)| \leq c_n$ für alle $x \in D, n \in \mathbb{N}$

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konv.

Dann konv die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ glm. in D und die Grenzfunktionenreihe

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

ist eine in D stetige Funktion

Bem: Damit können wir zeigen, dass alle Potenzreihen in ihrem Konvergenzradius glm. konv.

Bsp 8.4.1. Untersuchen die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2}$ auf $D = [0, 3]$

Lös: Es gilt

$$i) \left| f_n(x) \right| = \left| \frac{x}{n^2} \right| \leq \frac{3}{n^2} =: c_n \quad \forall x \in D$$

$$ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n^2} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konv. als
Riemannsche Zeta Funktion mit $s=2$

also ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{n^2}$ glm. konv. auf D , und da $f_n = \frac{x}{n^2}$ stetig ist, ist auch
f.

Bsp 8.4.2. Zeigen Sie, dass $S_f(x)$ im gegebenen Bereich glm. konv. Finden Sie den Grenzwert.

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{e^{kx}}{k!}, \quad x \in (0, 1]$$

Lös: Es gilt

$$i) \left| \frac{(e^x)^k}{k!} \right| \leq \frac{e^k}{k!} = c_k \quad \forall x \in (0, 1]$$

$$ii) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^k}{k!} \right) - 1 = e^e - 1$$

$$\text{also konv. } S_n(x) \text{ glm zu } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{kx}}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^x)^k}{k!} \right) - 1 = e^{e^x} - 1 = S(x)$$

Alternativ per Defn.

$$\sup_{x \in D} \left| \left(\sum_{k=0}^n \frac{e^{kx}}{k!} - 1 \right) - (e^{e^x} - 1) \right| \overset{\text{gleiche Berechnung wie oben}}{=} \sup_{x=1} \left| \sum_{k=0}^n \frac{e^k}{k!} - e^e \right|$$

$$\text{also } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{e^k}{k!}}_{\rightarrow e^e} - e^e \right| = 0$$

also ist $S_n(x)$ glm. konv. zu $S(x) = e^{e^x} - 1$

Exercise Session 9

9.1. Trigonometrische Funktionen [Skript 3.8]

9.2. Definitionen Grenzwerte von Funktionen [Skript 3.10]

9.3. Rechnen mit Grenzwerten

9.1. Trigonometrische Funktionen

(Defn. sin und cos als Potenzreihen)

Sinus- und cos sind durch ihre Potenzreihen definiert

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Bem: Potenzreihen darstellung von sin, cos wird bei Taylorapprox. relevant

(Satz, Stetigkeit, Skript 3.8.1)

$\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$ und $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)$ sind stetig $\forall x \in \mathbb{R}$

Bem: Ihr solltet die wichtigsten Werte von sin, cos können (einfach da periodisch + phasenverschieben)

(Exponentialdarstellung, Skript 3.8.2)

Es gilt

$$i) \quad e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

$$ii) \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Bem: Vor allem bei der Integration kann die komplexe Darstellung nützlich sein.

$$\int e^{ix} = \frac{1}{i} e^{ix} + C \quad (\text{Bsp: Fouriertransformation, vgl. DumCS Sem 3})$$

9.2. Grenzwerte einer Funktion

(Einführung in Grenzwerte)

Bisher haben wir Grenzwerte von Folgen ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$) und Funktionenfolgen ($\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$) gesehen. Nun betrachten wir für eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, wobei x_0 nicht zwingend in D sein muss.

(Defn. Häufungspunkt)

Ein Häufungspunkt von $D \subset \mathbb{R}$ ist ein Punkt x_0 , sodass alle offenen Intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, (für $\delta > 0$) mindestens einen von x_0 verschiedenen Punkt $y \in D$ enthalten.

$$\forall \delta > 0. (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \cap D \neq \emptyset$$

Bsp. 9.2.1. Ist $x_0 = 0$ ein Häufungspunkt in $D = [0, 1)$

Lös: Ja, denn alle offenen Intervalle $(0 - \delta, 0 + \delta)$ schneiden $D = [0, 1)$

Bsp. 9.2.2. Ist $x_0 = 2$ ein Häufungspunkt von $D = \{2\} \cup (5, 7)$

Lös: Nein, denn $(2 - 0.1, 2 + 0.1)$ enthält kein Punkt y , sodass $y \in D$ wäre.
mit $\delta = 0.1$

(Definition Grenzwert, Skript 3.10.3)

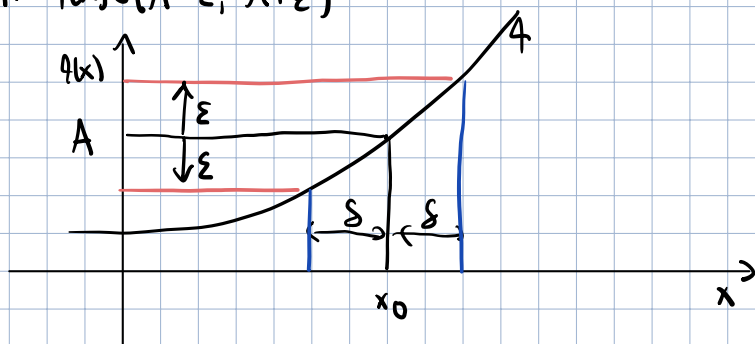
Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 ein Häufungspunkt von D . So ist $A \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von f an der Stelle x_0 , man schreibt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

falls

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in D. |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

d.h. für beliebig kleines $\varepsilon > 0$, existiert ein $\delta(\varepsilon)$, sodass für $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$



Bem.: Vergleiche zur Definition der Stetigkeit: $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in D. |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
(Beweise zu Grenzwerten analog)

(Definition: Linksseitiger und Rechtsseitiger Grenzwert)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 ein Häufungspunkt von D , so gilt

1) f hat an der Stelle x_0 den linksseitigen Grenzwert $L \in \mathbb{R}$, man schreibt

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in D. x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

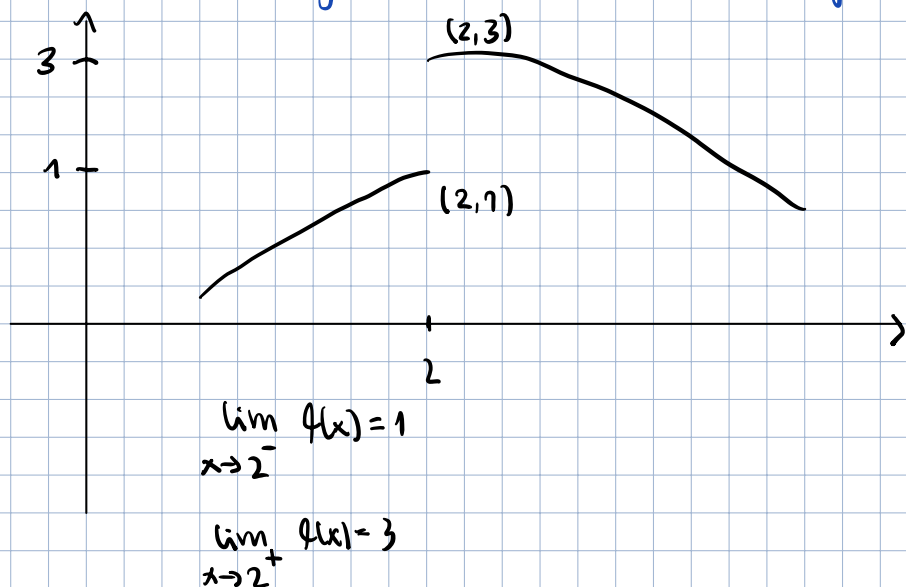
2) f hat an der Stelle x_0 den rechtsseitigen Grenzwert $R \in \mathbb{R}$, man schreibt

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = R$$

falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in D. x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - R| < \varepsilon$$

Graphische Bedeutung von links- und rechtsseitigem Grenzwert



(Bemk./Rolle, Äquivalenz)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 ein Häufungspunkt in D , so gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L = A = R = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

9.3. Rechnen mit Grenzwerten

9.3.1. Allgemeine Rechenregeln, Dominanz

9.3.2. Sandwich Theorem

9.3.3. Wurzeltrick

9.3.4. Variablenwechsel

9.3.5 Fundamentallimites (exp, sin)

9.3.1 Allgemeine Rechenregeln

(Definition: Rechenregeln Grenzwerte)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$, und $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ so gilt

$$i) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ falls } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

Bsp 9.3.1: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

Lös: Problem: Nenner für $x=1$ gleich 0, umformen löst das Problem

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} x+1 = 2$$

(Anmerkung: Problematische Situationen)

• Obige Regeln darf man nur anwenden, sollten beide Grenzwerte existieren.

• D.h. wir können mit obigem Kriterium keine Aussagen für Fälle wie

" $\frac{0}{0}$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ ", " $\infty - \infty$ ", " 1^∞ ", " ∞^0 ", " 0^0 ", " $0 \cdot \infty$ " treffen, dafür

brauchen wir weitere/andere Kriterien (Sandwich, L'Hôpital etc.)

(Defn. Dominanz)

Dominanz bei Grenzwerten sollte aus Anf. bekannt sein, d.h.

für $0 \in \mathbb{R}$, $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 ein Häufungspunkt, $\lim_{x \rightarrow x_0} f, g = +\infty$, gilt

$$f \text{ dominiert } g \text{ falls: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \quad \text{alternativ} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

Sollte gelten

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0, A \in \mathbb{R}$$

so sind f, g von derselben Ordnung

Bem: Aus Anf. sollte bekannt sein, $x \rightarrow +\infty$, $a \in \mathbb{R}$ i) $\log(x) \ll x^a \ll e^x$

$$\text{ii) } a^x \ll x!$$

$$\text{iii) } x! \ll x^x$$

Bsp 9.3.2:
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 2x - 42}{7x^3 + \sqrt{x}}$$

Lös:
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 2x - 42}{7x^3 + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2}{7x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{7x} = 0$$

9.3.2. Sandwich Theorem

Falls $g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$ mit $\lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g_2(x) = A$, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

Bsp 9.3.3:
$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Lös: Es geht nicht $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, da $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ nicht existiert.

Stattdessen gilt aber $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$, also $-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$ und

$$\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0. \text{ also } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Bsp 9.3.4: $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} e^{\sin(1/x)}$

Lös: Da $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$ gilt: $\sqrt{x} e^{-1} \leq \sqrt{x} e^{\sin(1/x)} \leq \sqrt{x} e$
 da $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} e^{-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} e = 0$ gilt $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} e^{\sin(1/x)} = 0$

Bsp 9.3.5: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 2\sin(x)}{3x + 2}$

Lös: $-2 \leq 2\sin(x) \leq 2$, also $5x - 2 \leq 5x + 2\sin(x) \leq 5x + 2$

$$\Rightarrow \frac{5x - 2}{3x + 2} \leq \frac{5x + 2\sin(x)}{3x + 2} \leq \frac{5x + 2}{3x + 2}$$

Dann $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x - 2}{3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 2}{3x + 2}$

also auch $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 2\sin(x)}{3x + 2} = 5/3$ nach Sandwich Theorem

9.3.3. Wurzeltrick

(Defn. Wurzeltrick)

Direkte Anwendung der dritten Binomischen Formel: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Bsp 9.3.6: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

Problem: " $\infty - \infty$ "

Lös: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{\sqrt{x^2 + x} + x}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

Bsp 9.3.7: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

Lös: Problem, Grenzwert wäre " $\frac{0}{0}$ ", umformen:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \cdot \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

Bsp 9.3.8 (HS21): $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3x + 1} - x$

Problem: " $\infty - \infty$ "

Lös: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 1} - x) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 + 3x + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 3x + 1} + x} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 3x + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x + 1} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 1}{x + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

9.3.4. Variablenwechsel (Substitution)

(Defn. Variablenwechsel)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$, f stetig in y_0 , g stetig in x_0 wobei

$$y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \text{ dann gilt}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y)$$

Bsp 9.3.9 : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)$

- Lös: 1. Bestimme Substitution: $y = g(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$
 2. Überprüfe Grenzwert bei x_0 : $y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x} = +\infty$

3. Substituiere: $x \ln(x) = \left(\frac{1}{y}\right) \ln\left(\frac{1}{y}\right)$

4. Bestimme Grenzwert: $\lim_{x \rightarrow x_0} x \ln(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\frac{1}{y}\right) \ln\left(\frac{1}{y}\right)$

konkret hier: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(y)}{y} = 0$
 (dominant)

Achtung: wir bestimmen nur $g(x)=y$, $f(y)$ wird induziert bei der Substitution (hier bspw. $f(y) = \left(\frac{1}{y}\right) \ln\left(\frac{1}{y}\right)$), insb. ist f nicht der urspr. Term!

9.3.5. Fundamentallimites

(Fundamentallimites Exp)

Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, also

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{1}{h(x)}\right)^{h(x)} = e \quad \text{alternativ} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + h(x)\right)^{\frac{1}{h(x)}} = e$$

für $x \rightarrow x_0$

muss $h(x) \rightarrow \infty$

für $x \rightarrow x_0$

muss $h(x) \rightarrow 0$

Bsp. 9.3.10: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x}$

Lös: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)}\right)^{\frac{x}{3}} \right]^{\frac{3}{x} \cdot 2x}$

offenbar gilt für $x \rightarrow \infty$

$$y = \frac{x}{3} \rightarrow \infty$$

insgesamt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)}\right)^{\frac{x}{3}} \right]^{\frac{3}{x} \cdot 2x} = e^{\frac{3}{x} \cdot 2x} = e^6$$

Bsp 9.3.11 (FS18): Bestimme $\lim_{t \rightarrow 0} (1 + 2\sin(t))^{\frac{1}{\sin(t)}}$

Lös: $\lim_{t \rightarrow 0} (1 + 2\sin(t))^{\frac{1}{\sin(t)}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2}{\frac{1}{\sin(t)}}\right)^{\frac{1}{\sin(t)}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{1}{2\sin(t)}\right)}\right)^{\frac{1}{2\sin(t)}} \right]^2 = e^2$

da für $t \rightarrow 0$

$$h(t) = \frac{1}{2\sin(t)} \rightarrow +\infty$$

Bsp 9.3.12

(H514): Bestimme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+n\pi}{n\pi} \right)^n$

Lös:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+n\pi}{n\pi} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n\pi} \right)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n\pi} \right)^{n\pi}}_{\rightarrow e} \right)^{\frac{1}{\pi}}$$

$$= e^{\frac{1}{\pi}} = e^{-\pi}, \text{ da für } n \rightarrow n_0 = \infty$$

$$h(n) = n\pi \rightarrow \infty$$

(Fundamentallimit Sinus)

Es gilt $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, also

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(h(x))}{h(x)} = 1$$

für $x \rightarrow x_0$

muss $h(x) \rightarrow 0$

Bsp 9.3.13 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)}$

Lös:
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \cdot \frac{3x}{3x} \cdot \frac{4x}{4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\left| \frac{\sin(3x)}{3x} \right|}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\left| \frac{1}{\left(\frac{\sin(4x)}{4x} \right)} \right|}_{\rightarrow 1} \cdot \frac{3x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Exercise Session 10

10.1. Stetigkeit über die Grenzwertdefinition

10.2. Differenzierbarkeit: Die Ableitung [Skript 4.1]

10.1. Stetigkeit über die Grenzwertdefinition

(Anmerkung: Zusammenhang Stetigkeit und Grenzwert)

Grenzwertdefn: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, falls $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in D. |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

Stetigkeit: $f(x)$ stetig in x_0 , falls $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in D. |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Offenbar gilt: Eine Funktion, $D \subset \mathbb{R}, f: D \rightarrow \mathbb{R}$, ist an der Stelle x_0 stetig, gdw

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

d.h. der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert und ist gleich dem Wert von f an x_0

Bem: Vor allem dann oft angewendet, wenn Stetigkeit bis auf vereinzelte Punkte klar ist

(Stückweise definierte Funktionen, hier müssen bspw nur die potentiellen Problemstellen geprüft werden)

Bsp 10.1.1: Ist $f(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ x^2 \cos(1/x), & x \neq 0 \end{cases}$ stetig?

Lös: Für $x \neq 0$ ist $f(x)$ als Komposition stetiger Funktionen stetig, lediglich

$x_0 = 0$ muss separat untersucht werden. Benutzen wir die

Grenzwertdefn. bleibt zu zeigen: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existiert und ist gleich $f(x_0)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x^2}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\in [-1,1]} = 0 = f(0), \text{ also ist } f \text{ stetig}$$

$\Rightarrow$ Sandwich Theorem

Bsp 10.1.2 (FS 19): Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ (-x)^{-x}, & x < 0 \end{cases}$, zeigen Sie dass f stetig ist

Lös: $x^x = e^{x \log(x)}$ ist stetig für $x > 0$, $(-x)^{(-x)} = e^{-x \log(-x)}$ ist stetig

für $x < 0$, bleibt $x_0 = 0$ zu überprüfen und zu zeigen $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(x_0) = f(0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(x)} = 1 \quad (\text{wir wissen } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \text{ vgl. oben})$$

da die Funktion gerade ist, gilt $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^x = 1$, also damit $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ gel.

(Satz: Stetigkeit und Grenzwert, Skript 3.10.6)

Sei $D, E \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow E$, $g: E \rightarrow \mathbb{R}$, und $(g \circ f) = g(f(x)) : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Falls $y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, und g stetig in y_0 so gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right) = g(y_0)$$

Intuitiv: wir dürfen den Grenzwert "in stetige Funktionen ziehen"

Bsp 10.1.3: Bestimme $\lim_{x \rightarrow 1} \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right)$

Lös: $\lim_{x \rightarrow 1} \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) = \sin\left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi}{2} x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

10.2. Differenzierbarkeit: Die Ableitung

Definition Ableitung

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 Häufungspunkt von D . Die Funktion f ist in x_0 diff'bar, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

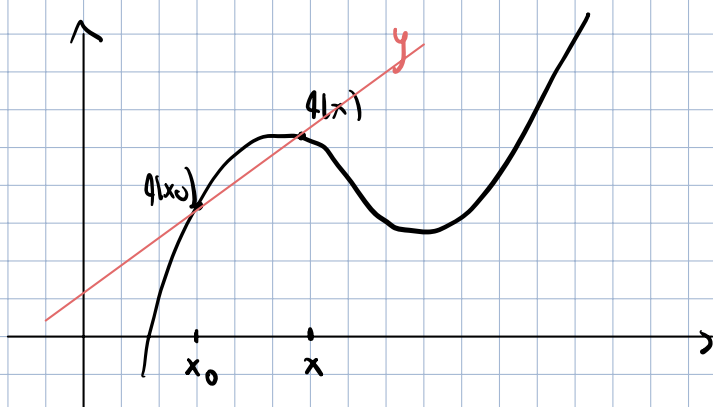
alternativ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

existiert. Man bezeichnet den Grenzwert als $f'(x_0)$

Bem. Notation: Für $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, ist $f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0)$ dasselbe

(Geometrische Interpretation)

Intuitiv ist die Ableitung (das Differenzial) die Steigung der Tangenten der Funktion $f(x)$ am Punkt $(x_0, f(x_0))$. Es ist also die beste lineare Approximation der Funktion am Punkt x_0 .



$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

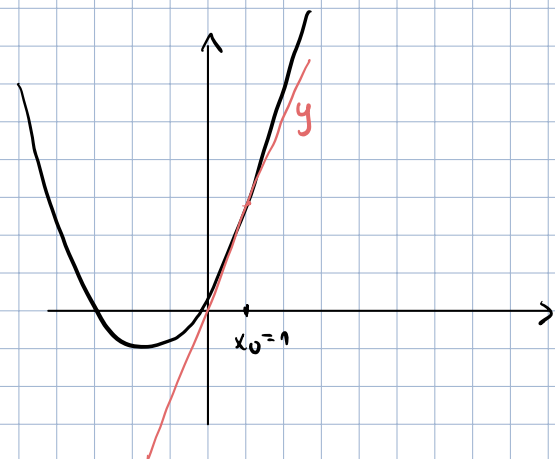
Allgemeine Tangentenformel: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ [vgl. $y = mx + c$]

Bsp 10.2.1 Berechne Ableitung $f(x) = x^2 + 2x$, $x_0 = 1$

Lös: $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((1+h)^2 + 2(1+h)) - (1+2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+2h+h^2+2+h)-3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2+4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{h+4}_{\rightarrow 0} = 4$$



Bsp. 10.2.2, Berechne Ableitung $f(x) = e^x$, bei $x_0 = 0$ (Tipp: Substitution)

$$\begin{aligned} \text{Lsg: } f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \end{aligned}$$

Substitution 1. Bestimme Subs: $y = g(h) = e^h - 1 \Rightarrow h = \log(1+y)$

2. Grenzwert bei x_0 : $y_0 = \lim_{h \rightarrow 0} g(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \log e^h - 1 = 0$

3. Substituiere: $\frac{e^h - 1}{h} = \frac{e^{\log(1+y)} - 1}{\log(1+y)} = \frac{y}{\log(1+y)}$

$$= \frac{1}{\frac{1}{y} \cdot \log(1+y)} = \frac{1}{\log(1+y)^{1/y}}$$

4. Grenzwert: $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\log(1+y)^{1/y}} = \frac{1}{\log\left(\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{1/y}\right)} = \frac{1}{\log(e)} = \frac{1}{1} = 1$

$\xrightarrow{y \rightarrow 0} e$

also $f(x) = e^x$ hat $f'(1) = 1$ (bemerke: $f(x) = g'(x)$ bei $x_0 = 0$)

(Definition: Differenzierbarkeit auf ganz D , Skript 4.1.7)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Wir sagen f ist auf D diffbar, falls f für jeden Häufungspunkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist.

Bem: Um zu zeigen, dass $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ auf ganz D diffbar ist, zeige einf. für jeden Häufungspunkt $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ existiert.

Bsp 10.2.3: Bestimme Ableitung von $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Lsg: Sei x_0 beliebiger Häufungspunkt, so gilt

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0^2 + 2x_0h + h^2) - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_0h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x_0 + h = 2x_0 \end{aligned}$$

also gilt $f'(x) = 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bsp. 10.2.4: Berechne Ableitung von $f(x) = x^n$ (Tipp: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$)

Lös: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot h^k - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\binom{n}{0} x^{n-0} \cdot h^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot h^1 + h^2 \cdot \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-2} \right] - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(x^n + n x^{n-1} \cdot h + h^2 \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-2} \right) - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} n x^{n-1} + h \cdot \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-2}$$

$$= n x^{n-1} + \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\left(h \cdot \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-2} \right)}_{\rightarrow 0}$$

$$= n x^{n-1}$$

also gilt $f(x) = x^n$ hat $f'(x) = n x^{n-1}$ als Ableitung.

(Anmerkung: Stetigkeit und Diffbarkeit)

Es gilt i. Allg. " f diffbar $\Rightarrow f$ stetig", die Umkehrung gilt nicht:
 $\nLeftarrow$

Bsp. $f(x) = |x|$, f ist stetig (vgl. Vorlesung) aber bei $x_0 = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = \pm 1$$

(Raum C^0, C^1)

Recap: $C(D) = C^0(D) = \{f: D \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ stetig}\}$, $C^0(D) \subset F(D) = \{f: D \rightarrow \mathbb{R}, D \in \mathbb{R}\}$

$C^1(D) = \{f: D \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ diffbar auf } D \text{ und } f' \text{ stetig auf } D\}$

Wir sagen, $f \in C^1(D)$ (sprich: f ist von der Klasse C^1), f diffbar und f' stetig nennt sich "stetig differenzierbar".

Anal Exercise Session 11

11.1. Die Ableitung: Definition, Kettenregel und Umkehrsatz

11.2. Zentrale Sätze: Satz von Rolle, Mittelwertsatz

[Herleitung "Diffbar $\Rightarrow$ stetigkeit"]

Defn. Diffbar: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

$$\text{d.h. } \forall \varepsilon_A > 0. \exists \delta_A > 0. \forall x \in D. |x - x_0| < \delta_A \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon_A$$

Defn. Stetigkeit bei x_0 : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\text{d.h. } \forall \varepsilon_S > 0. \exists \delta_S > 0. \forall x \in D. |x - x_0| < \delta_S \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_S$$

Beweis: " f diffbar $\Rightarrow f$ stetig"

Wir dürfen annehmen $\forall \varepsilon_A > 0. \exists \delta_A > 0. \forall x \in D. |x - x_0| < \delta_A \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon_A$.

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon_A \quad \cdot |x - x_0|$$

$$\Leftrightarrow |f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| < \varepsilon_A |x - x_0| \quad (*)$$

Für $|x - x_0| < \delta_A$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |(f(x) - f(x_0)) - f'(x_0)(x - x_0) + f'(x_0)(x - x_0)| \\ &\leq |f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| + |f'(x_0)(x - x_0)| \\ &\stackrel{(*)}{<} \varepsilon_A |x - x_0| + |f'(x_0)(x - x_0)| \\ &= (\varepsilon_A + |f'(x_0)|) \cdot |x - x_0| < \varepsilon_S \end{aligned}$$

mit $\delta_S = \min\left(\delta_A, \frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_A + |f'(x_0)|}\right)$ gilt somit

$$|x - x_0| < \delta_S \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_S$$

die Defn. der Stetigkeit bei x_0 .

11.1. Die Ableitung: Definition und erste Folgerungen

(Satz, Ableitungsregeln, Skript 4.1.4)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 Häufungspunkt von D , f, g diffbar in x_0 , so gilt

$$1) (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$2) (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

$$3) \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Bem: Wichtige Ableitungen die ihr bereits gesehen habt

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = n x^{n-1}$$

$$f(x) = \ln(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\sin(x) \rightarrow \cos(x)$$

$$\uparrow \quad \downarrow$$

$$-\cos(x) \leftarrow -\sin(x)$$

Bsp. 11.1.1: Berechne $f'(x)$ von $f(x) = x^5 + 7x^3 + 2x + 3$

Lös: $f'(x) = 5x^4 + 21x^2 + 2$

Bsp. 11.1.2: Bestimme $f'(x)$ von $f(x) = x e^x$

Lös: Achtung: wir haben die Form $f_1(x) \cdot f_2(x)$ mit $f_1(x) = x$, $f_2(x) = e^x$, also

$$\text{also } f'(x) = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x)$$

$$= 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x (1+x)$$

Bsp. 11.1.3: Bestimme $f'(x)$ von $f(x) = \tan(x)$ (Tipp: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$)

Lös: $f'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos(x)^2}$

$$= \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} \stackrel{\sin^2 + \cos^2 = 1}{=} \frac{1}{\cos(x)^2}$$

(Defn. Kettenregel, Skript 4.1.11)

Sei $D, E \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow E$, $g: E \rightarrow \mathbb{R}$, also $g \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Sei f in x_0 diffbar mit $y_0 = f(x_0)$ ein Häufungspunkt, so ist g in y_0 diffbar, es gilt:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Bsp 11.1.4: $f(x) = 3x$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \exp(x)$, $g: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$
also $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $g \circ f = \exp(3x)$

Lös: $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$, $g'(x) = \exp(x)$, $f'(x) = 3$
 $= \exp(3x) \cdot 3$
 $= e^{3x} \cdot 3$

Bsp 11.1.5: $f(x) = 5x^3$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sin(x)$, $g: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$
also $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $(g \circ f)(x) = \sin(5x^3)$

Lös: $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$, $g'(x) = \cos(x)$, $f'(x) = 15x^2$
 $= \cos(5x^3) \cdot 15x^2$

(Korollar, Umkehrsaatz, Skript 4.1.12)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow E$ bijektiv, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt. Sei f zudem in x_0 diffbar, $f^{-1}: E \rightarrow D$ bei $y_0 = f(x_0)$ stetig. So ist y_0 ein Häufungspunkt von E , d.h. f^{-1} bei y_0 diffbar. Es gilt

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Bsp 11.1.6: Mit $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = e^x$, berechne Ableitung von $f^{-1}: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log(x)$

Lös: Wir haben bereits gesehen, dass f bijektiv ist auf $\mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$

(injektiv da $f(x) = e^x \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, surjektiv da $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$)

Sei nun $f(x) = y = e^x \Rightarrow x = \log(y) = f^{-1}(y)$, und $f'(x) = y' = e^x$

$$\text{also } (f^{-1}(y))' \stackrel{\text{Subst}}{=} \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \begin{aligned} f^{-1}(y) &= \lg(y) \\ f'(x) &= e^x \\ &= \frac{1}{\exp(\lg(y))} \\ &= \frac{1}{y} \end{aligned}$$

Bsp. 11.1.7: Sei $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$. $f(x) = \sin(x)$, berechne Ableitung von $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$ [Tipp: $\cos^2 + \sin^2 = 1$]

Lös: (Zeige, dass f bijektiv)

$$f(x) = y = \sin(x) \Rightarrow x = \arcsin(y) = f^{-1}(y), \quad f'(x) = \cos(x)$$

$$\begin{aligned} \text{also } (f^{-1}(y))' &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(\arcsin(y))} \\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} \\ &\stackrel{\sin^2 + \cos^2 = 1}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \end{aligned}$$

Bsp. 11.1.8: Sei $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$\text{Angenommen: i) } f(x)^2 - g(x)^2 = 1$$

$$\text{ii) } f' = g, \quad g' = f$$

iii) g bijektiv

Zeige die Ableitung von g^{-1}

$$\text{Lös: } (g^{-1}(y))' = \frac{1}{g'(g^{-1}(y))} \stackrel{g'=f}{=} \frac{1}{f(g^{-1}(y))}$$

$$\begin{aligned} (f^2 - g^2 = 1) & \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + g(g^{-1}(y))}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} \end{aligned}$$

11.2. Zentrale Sätze: Satz von Rolle, Mittelwertsatz

(Satz: Maximum und Minimum, Skript 4.2.2)

Sei $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ und f in x_0 diffbar, so gilt

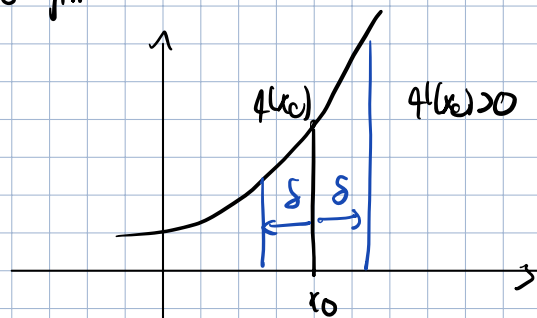
i) Falls

$$f'(x_0) > 0$$

dann gibt es $\delta > 0$ sodass

$$f(x_0) < f(x) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

$$f(x_0) > f(x) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$



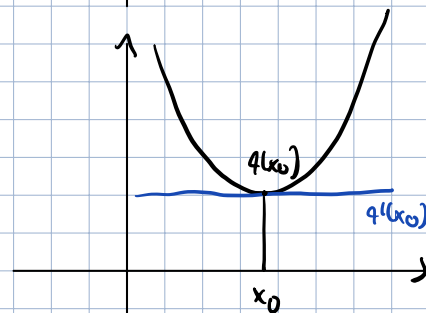
ii) Falls

$$f'(x_0) < 0$$

dann gibt es $\delta > 0$ sodass

$$f(x_0) > f(x) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

$$f(x_0) < f(x) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$



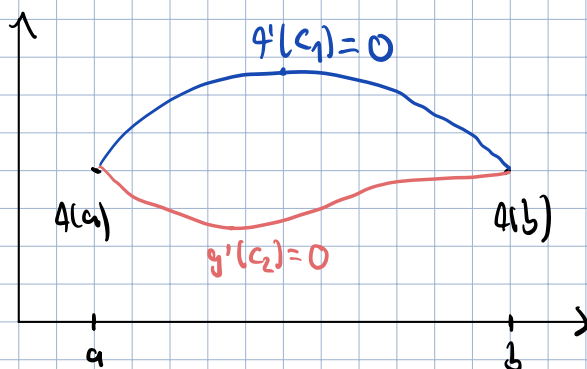
iii) Falls f in x_0 ein lokales Extremum hat, gilt $f'(x_0) = 0$

(Satz von Rolle, Skript 4.2.3)

Sei $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) diffbar.

Gilt $f(a) = f(b)$, dann ex. ein $c \in (a,b)$, mit

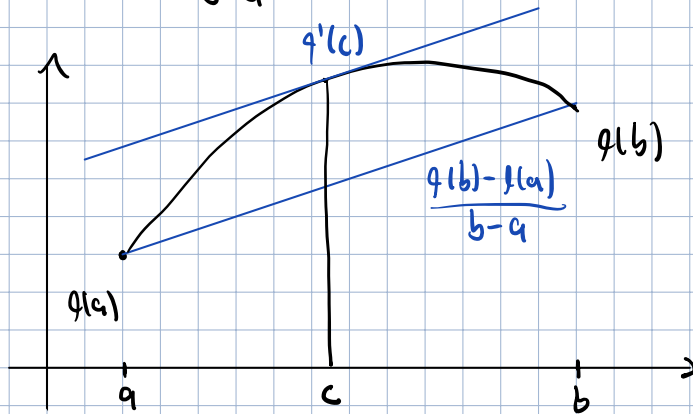
$$f'(c) = 0$$



Bem: Intuitiv, wenn f und g stetig sind (also keine Sprung- oder unendlichkeitsstellen besitzen), sind sie "gezwungen" ein lokales Extremum anzunehmen.

(Mittelwertsatz / Lagrange, Skript 4.2.4)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) diffbar, dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$


Bem: Intuitiv: Es gibt eine Ableitung an einem Punkt, die genau durch die Tangentensteigung des Funktionsgraphen gegeben ist.

Beweis: Sei $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, auf (a, b) diffbar

Sei $g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$ für $x \in [a, b]$, dann gilt

$$g(a) = g(b) = f(a) \quad \left[\begin{array}{l} g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot \underbrace{(a - a)}_{=0} = f(a) \\ g(b) = f(b) - \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{=1} \cdot \underbrace{(b - a)}_{=b-a} = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a) \end{array} \right]$$

Da $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, diffbar auf (a, b) und $g(a) = g(b)$ ex nach Satz von Rolle ein $c \in (a, b)$, sodass

$$g'(c) = 0, \quad \text{mit } g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

folgt

$$g'(c) = 0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Bsp. 11.2.1: Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, auf (a, b) diffbar. Beweise:

$$\forall x \in (a, b). \quad f'(x) = 0 \Rightarrow g(x) \text{ konstant auf } (a, b)$$

Lös: Seien $x_1, x_2 \in (a, b)$ beliebig, wende MWS an (da f stetig und auf (x_1, x_2) diffbar).

Es muss ein c geben, sodass

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

aber nach Voraussetzung ($\forall x \in (a,b). f'(x) = 0$), also insb. $f'(c) = 0$, also

$$0 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$$

für $x_1, x_2 \in (a,b)$ beliebig, muss f auf (a,b) konstant sein.

Bsp. 11.22.: Beweise $|\sin(a) - \sin(b)| \leq |a - b|$

Lös: Sei $f(x) = \sin(x)$, wende MWS an (da f auf ganz $\mathbb{R}$ diffbar), wobei

$a, b \in \mathbb{R}$ beliebig: so muss ein $c \in (a,b)$ existieren, sodass gilt

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

offenbar gilt $f'(x) = \cos(x)$, d.h. $|f'(x)| \leq 1$, also

$$|f'(c)| = \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| = \frac{|f(b) - f(a)|}{|b - a|} = \frac{|f(a) - f(b)|}{|a - b|}$$

also

$$|f'(c)| \leq 1 \Rightarrow \frac{|\sin(a) - \sin(b)|}{|a - b|} \leq 1 \Rightarrow |\sin(a) - \sin(b)| \leq |a - b|$$

Anal Exercise Session 12

(12.0. TA Evaluation: shanten plug)

12.1. Mittelwertsatz Recap: Examsaufgabe

12.2. Ableitung und Grenzwert: Satz von L'Hôpital

12.3. Höhere Ableitungen: Monotonie, Konvexität, Rezept Extrema

12.4. Taylorapproximation

12.1. Mittelwertsatz Recap: Examsaufgabe

(Mittelwertsatz / Lagrange, Skript 4.2.4)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) diffbar, dann existiert ein

$c \in (a, b)$ mit
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(FS22)

Bsp 12.1. $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, mit $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, f diffbar

a) Definiere g als

$$g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \arctan(f(x))$$

Begründen Sie warum auch $g(x)$ diffbar ist und bestimmen Sie $g(0)$, $g(1)$ sowie die Ableitung g' (Tipp: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$)

b) Zeigen Sie, dass

$$\exists c \in [0, 1]: f'(c) = \frac{\pi}{4} (1 + f(c)^2)$$

Hinweis: Benutzen Sie den Mittelwertsatz und a)

Lös a) $g(x)$ ist diffbar nach Annahme, $\arctan$ nach Skript. Die Komposition diffbarer Funktionen ist diffbar (nach Kettenregel)

$$f(x) = y = \tan(x) \Rightarrow x = \arctan(y), \quad g'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\begin{aligned} (f^{-1}(y))' &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(\arctan(y))} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos(\arctan(y))^2} \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\begin{aligned} \text{Es gilt } \sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1 \\ \Rightarrow \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + 1 &= \frac{1}{\cos^2(x)} \\ \Rightarrow \tan^2(x) + 1 &= \frac{1}{\cos^2(x)} \end{aligned} \right] \\ &= \frac{\cos^2(\arctan(y))}{\left(\frac{1}{\tan^2(\arctan(y)) + 1} \right)} = \frac{\cos^2(\arctan(y))}{1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos(x) = \sqrt{\frac{1}{\tan(x)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

also $h(x) = \arctan(x)$, mit $h'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Daher gilt nach Kettenregel mit $h(x) = \arctan(x)$,

$$g(x) = h(f(x)), \quad g'(x) = h'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$= \frac{1}{1+f(x)^2} \cdot f'(x)$$

$$= \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$$

Lös b) g ist diffbar (nach A), nach MWS muss also hier ein $c \in (0,1)$ existieren, sodass

$$g'(c) = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0}$$

In a) haben wir gezeigt

$$g'(c) = \frac{f'(c)}{1+f(c)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{also } g'(c) &= \frac{f'(c)}{1+f(c)^2} = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = g(1) - g(0) \\ &= \arctan(f(1)) - \arctan(f(0)) \\ &= \arctan(1) - \arctan(0) \end{aligned}$$

$f(1)=1, f(0)=0$
gegeben

$$\Rightarrow \frac{f'(c)}{1+f(c)^2} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow f'(c) = \frac{\pi}{4} (1+f(c)^2) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

Also wenn gilt $\exists c \in (0,1), g'(c) = \frac{\pi}{4} (1+f(c)^2) \Rightarrow \exists c \in [0,1], g'(c) = \frac{\pi}{4} (1+f(c)^2)$. qed

11.3. Ableitung und Grenzwert: Satz von L'Hôpital

Einführung: L'Hôpital

Bis jetzt hatten wir Ausdrücke wie

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

die problematisch waren (hier bspw. " $\frac{0}{0}$ "), bis jetzt haben wir einfache direkte Möglichkeiten zum Lösen gesehen, basierend auf Umformungen

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} x+1 = 2$$

(bspw. Dominanz, Sandwich Theorem, Wurzelziehen, Variablenwechsel).

Jetzt: weiteres Kriterium basierend auf der Ableitung

(Satz L'Hôpital, Skript 4.2.10)

Seien $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar ($g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$), falls

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = +\infty$$

so gilt

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Falls der Grenzwert existiert (d.h. $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$ existiert)

Bem: Im Skript ist nur der Fall $\lim_{x \rightarrow b} f(x), g(x) = 0$ definiert, der

Fall $\lim_{x \rightarrow b} f(x), g(x) = +\infty$ folgt daraus direkt (Reziprokes der Funktion)

Bsp 11.3.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x}$

Lös: Form " $\frac{0}{0}$ ", nach l'Hop gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overset{\rightarrow 1}{-e^{-x}}}{1} = -1$$

Bsp. 11.3.2: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x \cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$

Los: Form " $\frac{0}{0}$ ", nach l'Hop gilt

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x \cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\overbrace{1 \cdot \cos(x)}^{\rightarrow 0} + \overbrace{x \cdot (-\sin(x))}^{\rightarrow -1}}{1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} -x = -\frac{\pi}{2}$$

Bsp 11.3.3: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \log(x)$ [Vgl. Beispiel bei Substitution]

Los: Problem: " $0 \cdot \infty$ ", können aber nur " $\frac{0}{0}$ " oder " $\frac{\infty}{\infty}$ " berechnen, stelle um:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

" $0 \cdot \infty$ " " $\frac{\infty}{\infty}$ "

Bsp. 11.3.4 (FS18): $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\sqrt{1+t}-1)}{t}$

Los: Form " $\frac{0}{0}$ ", nach l'Hop

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\sqrt{1+t}-1)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(\sqrt{1+t}-1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+t}}}{1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(\sqrt{1+t}-1)}{2\sqrt{1+t}} = \frac{\cos(0)}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bsp. 11.3.5 (FS18): $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{b^t - 1}$, $a, b > 0$ konstant

Los: Form " $\frac{0}{0}$ ", nach l'Hop gilt

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{b^t - 1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{t \log(a)} - 1}{e^{t \log(b)} - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(a) \cdot \overbrace{e^{t \log(a)}}^{\rightarrow 1}}{\log(b) \cdot \overbrace{e^{t \log(b)}}^{\rightarrow 1}}} \\ &= \frac{\log(a)}{\log(b)} \end{aligned}$$

Bsp. 11.3.6 (HS18): $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$

Los: Form " $\frac{0}{0}$ ", l'Hop

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} \stackrel{\text{l'Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2x} \stackrel{\text{l'Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{-\cos(x)}^{\rightarrow -1}}{2} = -\frac{1}{2}$$

12.3, Höhere Ableitungen

(Defn. Höhere Ableitungen, Skript 4.3.1)

Sei $D \subset \mathbb{R}$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar in D , sei $f^{(1)} = f'$ die Ableitung von f

(1) f ist n -mal auf D diffbar, falls $f^{(n-1)}$ auf D diffbar, wir nennen $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ die n -te Ableitung von f .

(2) f ist n -mal stetig diffbar in D , falls sie n -mal diffbar ist und $f^{(n)}$ in D stetig. Wir schreiben $f \in C^n(D)$

(3) f ist glatt, falls für alle $n \geq 1$, f n -mal diffbar ist. Wir schreiben $f \in C^\infty(D)$

Bem: Der Raum C^n ist ein Vektorraum für alle $n \geq 1$

Bem: Nicht alle Funktionen sind glatt, bspw.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \text{ damit } f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$f'(x)$ ist unstetig in 0 , da der Graph in der Nähe von Null eine periodische Funktion mit "unendlich grosser Frequenz" ist.

Bem: exp, sin, cos, Polynome sind glatt auf $\mathbb{R}$. Kompositionen, Addition, Multiplikation von glatten Funktionen sind glatt

(Strenge Monotonie und Konvexe Funktionen)

Sei $D \subset \mathbb{R}$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar auf D , so gilt

1) Monoton wachsend: $\forall a, b \in D, a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b) \Leftrightarrow \forall x \in D, f'(x) \geq 0$

2) Streng monoton wachsend: $\forall a, b \in D, a < b \Rightarrow f(a) < f(b) \Leftrightarrow \forall x \in D, f'(x) > 0$

3) Monoton fallend: $\forall a, b \in D, a \geq b \Rightarrow f(a) \geq f(b) \Leftrightarrow \forall x \in D, f'(x) \leq 0$

4) Streng monoton fallend: $\forall a, b \in D, a > b \Rightarrow f(a) > f(b) \Leftrightarrow \forall x \in D, f'(x) < 0$

Bem: Streng monotone Funktionen sind immer injektiv, da aus ihrer Definition direkt folgt $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$, die Definition der Injektivität

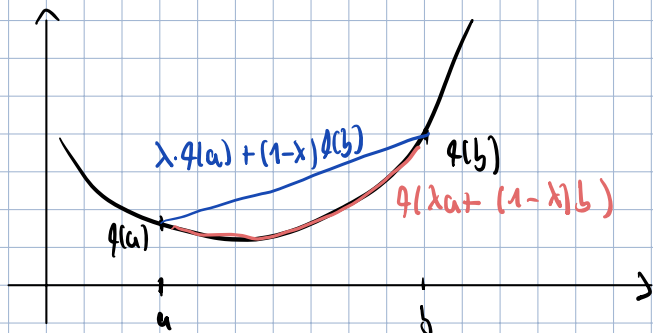
(Definition Konvexität, Skript 4.2.13)

Sei $D \subset \mathbb{R}$ offn, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ so gilt

1) (Streng) Konvex auf D , falls $\forall a, b \in D, a \leq b$ gilt

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda \cdot f(a) + (1-\lambda) \cdot f(b), \quad \lambda \in [0,1]$$

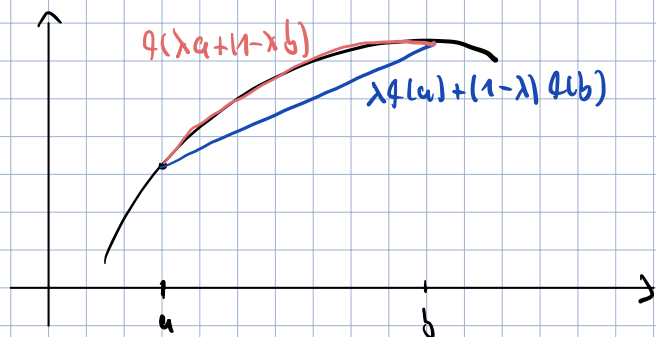
d.h. wenn für beliebige zwei Punkte $a, b \in D$, die die Punkte verbindende Gerade über der Funktion liegt.



1) (Streng) Konkav auf D , falls $\forall a, b \in D, a \leq b$ gilt

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \geq \lambda \cdot f(a) + (1-\lambda) \cdot f(b), \quad \lambda \in [0,1]$$

d.h. wenn für beliebige zwei Punkte $a, b \in D$, die die Punkte verbindende Gerade unter der Funktion liegt.



(Korollar Konvexität, Skript 4.2.17).

Sei $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal diffbar auf (a,b) , so gilt

$$1) f \text{ konvex} \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$$

$$2) f \text{ streng konvex} \Leftrightarrow f''(x) > 0$$

$$3) f \text{ konkav} \Leftrightarrow f''(x) \leq 0$$

$$4) f \text{ streng konkav} \Leftrightarrow f''(x) < 0$$

(Kochrezept: Extremwert aufgeben)

1. Notwendige Bedingung

Wenn f an der Stelle x_0 ein Extremum hat, so muss gelten

$$f'(x_0) = 0$$

Überprüfe also f' auf potentielle Extrema, via $f'(x) = 0$.

Bem: Dies ist eine notwendig, aber keine hinreichende Bedingung, d.h.

$$f \text{ Extremum in } x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

$\nLeftarrow$

2. Hinreichende Bedingung

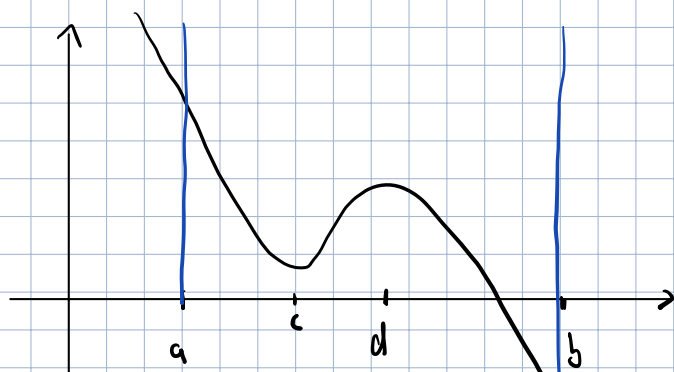
Wenn $f \in C^2(D)$, und $f'(x_0) = 0$, überprüfe mittels $f''(x)$ auf min, max:

- Maximum: wenn f streng konkav ist, d.h. $f''(x) < 0$
- Minimum: wenn f streng konvex ist, d.h. $f''(x) > 0$
- Falls $f''(x) = 0$: überprüfe mittels Vorzeichenwechsel (VZW), d.h. mit einem $\delta > 0$: $f'(x_0 - \delta) < 0$, $f'(x_0 + \delta) > 0$: lokales Minimum

$f'(x_0 - \delta) > 0$, $f'(x_0 + \delta) < 0$: lokales Maximum
sonst: keine Extremstelle (sondern Sattelpunkt)

3. Randwertbetrachtung (auf kompakten Intervallen)

Sollen ausschliesslich globale Extrema gefunden werden, und der Definitionsbereich D (von $f: D \rightarrow \mathbb{R}$) hat Randwerte, so überprüfe f dort,



$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

Bem: Auf $[a, b]$ sind zwar c, d lokale minima bzw. maxima, aber a, b sind die globalen Extrema. (Achtung: a, b lassen sich nicht durch $f'(x) = 0$ finden).

Bsp. 12.3.1. (§21): Sei $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$

Bestimme alle Extrema und bestimme ob es sich dabei um lokale (resp. globale) Maxima oder Minima handelt,

Lös: Schritt 1: Finde Extrema: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \ln(x) - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}$$

$$f'(x) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2} = 0$$

$$\Rightarrow \ln(x) = 1$$

$$\Rightarrow x = e$$

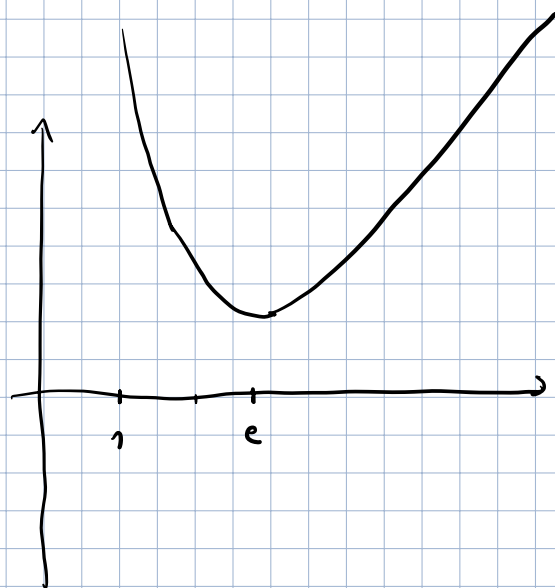
Einziges Kandidat $x_0 = e$, offenbar gilt

• $f' < 0$ auf $(1, e)$ (streikt monoton fallend)

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\boxed{x}}{\boxed{\ln(x)}} \underset{\substack{\rightarrow 1 \\ \rightarrow 0}}{=} +\infty$$

• $f' > 0$ auf $(e, +\infty)$ (streikt monoton wachsend)

$$\cdot \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln(x)} \underset{\substack{= +\infty \\ \uparrow \\ \text{Derivat}}}{=} +\infty$$



also muss $x_0 = e$ lokales Minimum sein

Bem: Das es sich um ein Minimum handelt hätte man zeigen können, dass f konvex ist d.h. $f''(e) > 0$

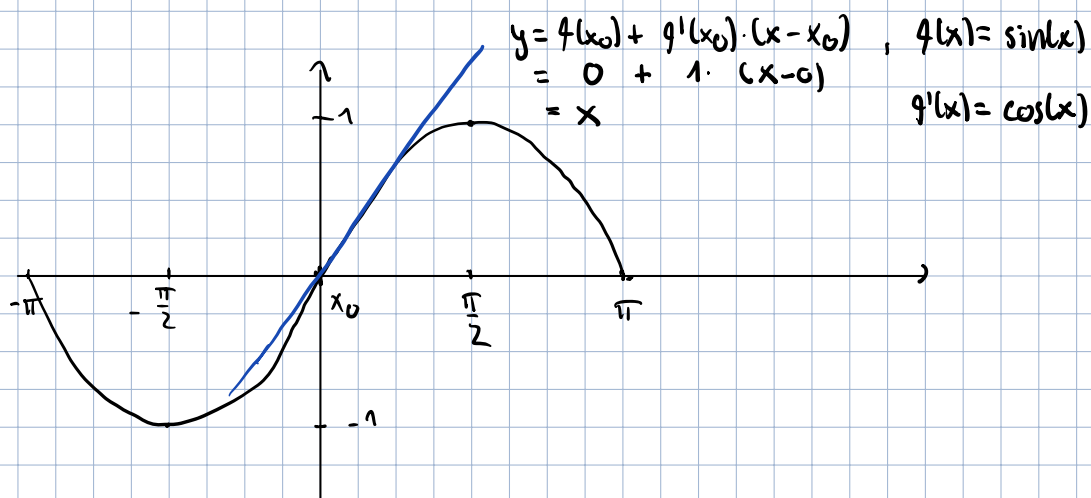
$$f''(x) = \frac{2 - \ln(x)}{\ln(x)^3 x}, \quad f''(e) = \frac{2-1}{e} > 0$$

aber für Entscheidung ob globales Minimum oder lokal muss die Grenzwertbetrachtung (vgl. oben) dennoch gemacht werden

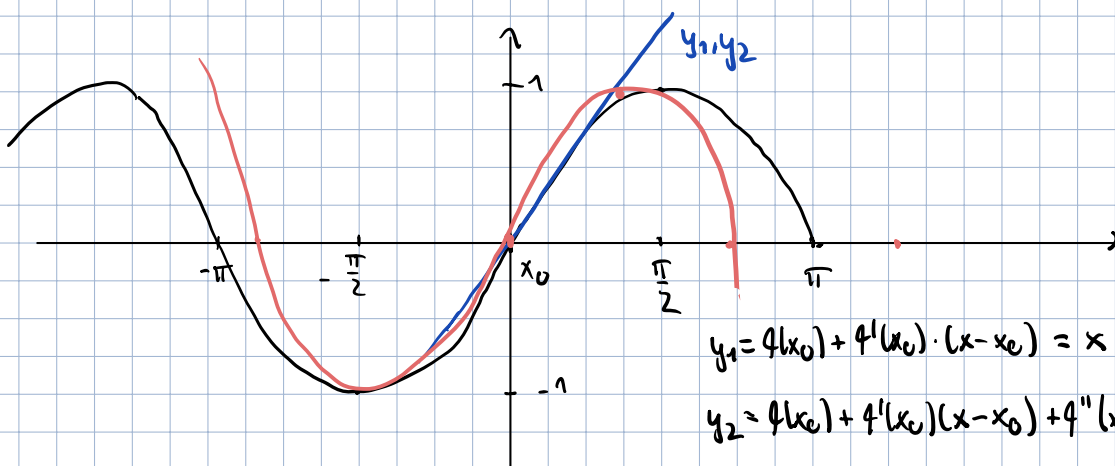
12.4. Taylor Approximation

Einführung in Taylorreihen

- Die Ableitung gibt die Steigung der Tangente am Punkt x_0 an, die Formel für die gesamte Tangente lautet



- Wir haben gesagt: dies ist die beste lineare Approximation von f
- Idee: Benutze Polynome höheren Grades ($n \geq 2$) für Approximation der Funktion an einem Punkt



$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) \\ f'(x) &= \cos(x) \\ f''(x) &= -\sin(x) \\ f'''(x) &= -\cos(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = x \\ y_2 &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot \frac{(x - x_0)^2}{2} \\ &= 0 + 1 \cdot (x - 0) + 0 \cdot \frac{(x - 0)^2}{2} = x \\ y_3 &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &\quad + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot \frac{(x - x_0)^2}{2} \\ &\quad + \frac{f'''(x_0)}{6} \cdot \frac{(x - x_0)^3}{6} = x - \frac{x^3}{6} \end{aligned}$$

- Offenbar approximiert unsere Approximation höheren Grades besser, aber nur lokal um x_0 . Es gibt aber einen Fehler (wie bei der Ableitung), wir erwarten aber dass der Fehler bei x_0 gegen 0 strebt.

(Satz, Taylorapproximation, Skript 4.4.6)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, auf (a, b) $(n+1)$ -mal diffbar, so gilt es existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k + \left(\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \right) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2} (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6} (x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \\ &\quad + \left(\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \right) \end{aligned}$$

Bem: Die Stelle a heisst "Entwicklungspunkt"

Bem: Der letzte Term ist der Fehler der Approximation. Wie oben erwartet geht der Fehlerterm bei x_0 gegen 0 (für unsere Approx. n -ter Ordnung)

$$\frac{\text{Fehler}}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \frac{(x-a)^{n+1}}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-a)$$

$$\text{also } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{Fehler}}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \underbrace{\left[\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right]}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{|(x-a)|}_{\rightarrow 0} = 0$$

Bem: Wir können glatte Funktionen beliebig genau durch die Taylorapproximation approximieren (je höher der Grad des Taylorpolynoms desto besser die Abschätzung)

(Korollar, Abschätzung des Fehlerterms, Vorlesung 12.5.)

Wir können den Fehler abschätzen, es gilt

$$|R_n(f, x, a)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi) (x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \sup_{a \leq \xi \leq x} \left(|f^{(n+1)}(\xi)| \cdot \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \right)$$

Bsp. 12.4.1. Bestimme Taylorapprox; n-ter Ordn. $f(x) = e^x$, Entwicklungspkte: $a = 0$

$$T_1(x) = q(0) + q'(0) \cdot (x-0) = 1 + x$$

$$T_2(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x-0) + \frac{f''(0) \cdot (x-0)^2}{2!} = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

•

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n}$$

Bsp. 12.4.2. Bestimme Taylorapprox. n-ter Ordnung $f(x) = \cos(x)$, Entwicklung: $a = 0$

Üb: $f(x) = \cos(x)$, $f(0) = 1$, Erinnerung $\begin{array}{cc} \sin & \rightarrow & \cos \\ \uparrow & & \downarrow \\ -\cos & \leftarrow & -\sin \end{array}$

$f'(x) = -\sin(x)$, $f'(0) = 0$

$$q''(x) = -\cos(x) \quad , \quad q''(0) = -1$$

$$q'''(x) = -\sin(x) \quad , q'''(0) = 0$$

•

Offener fallen alle "ungeraden" Ableitungen weg, für die "geraden" Ableitungen

alteriert das Vorzeichen

$$T_n(x) = \overbrace{f(0)}^{=1} + \overbrace{f'(0)}^{=0}(x-0) + \overbrace{f''(0)}^{=-1} \frac{(x-0)^2}{2!} + \overbrace{f'''(0)}^{=0} \frac{(x-0)^3}{3!} + \overbrace{f^{(4)}(0)}^{=1} \frac{(x-0)^4}{4!} + \dots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

(Defn. Taylorreihe)

Sei $0 \in \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, und an der Entwicklungsstelle a gilt

$f \in C^\infty(D)$, so nennen wir

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a) \cdot \frac{(x-a)^n}{n!}$$

die Taylorreihe von f am Entwicklungspunkt a .

Bem: Mit der Taylorreihe können wir Funktionen exakt darstellen

(Lösung: die Reihe konvergiert, d.h. auf ihrem Konvergenzradius)

Bem.: Taylorapprox. ist die Summe der ersten n -Glieder der Taylorreihe

(Substitution für die Taylorapproximation)

Da die Taylorreihe selbst wieder nur eine Potenzreihendarstellung

ist, können wir die Potenzreihendarstellung von $\exp, \sin, \cos$

für unsere Taylorapprox. benutzen, FALLS Entwicklungsort $a=0$.

Bsp 12.4.3. Bestimme Taylorapprox. beliebiger Ordnung (i.e. Taylorreihe) von

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Los: In der VL haben wir gesehen: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\dots$

substituiere x mit $(-x^2)$ so gilt

$$\frac{1}{1-x} \text{ wird zu } \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

Bsp 12.4.4 (FS22): Sei $f(x) = x \cdot \cos(x^3)$. Die Taylorentwicklung von f mit

Entwicklungsort 0 bis zur 3. Ordnung ist

$$\sum_{n=0}^3 \alpha_n \cdot x^n + \frac{f^{(4)}(s)}{4!} \cdot x^4$$

Berechnen sie α_3

Los: $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^4)$

also $\cos(x^3) = 1 - \frac{(x^3)^2}{2} + o((x^3)^4)$

$$\text{also } x \cdot \cos(x^3) = x - \frac{x^7}{2} + o(x^7) = \underbrace{\alpha_0}_{=0} \cdot x^0 + \underbrace{\alpha_1}_{=1} x^1 + \underbrace{\alpha_2}_{=0} x^2 + \underbrace{\alpha_3}_{=0} x^3 + \dots + \underbrace{\alpha_7}_{=1/2} x^7 + \dots$$

also muss der Koeff. von x^3 $\alpha_3=0$ sein

Bsp 12.4.5 (HS20): Das Taylorpolynom 3. Ordnung mit Restglied der Funktion

$f(x) = \exp(x^2+1)$ auf $[0,1]$ um den Punkt $x=0$ sei gegeben durch

$$f(x) = \sum_{n=0}^3 \alpha_n x^n + \frac{f^{(4)}(s)}{24} \cdot x^4 \quad \text{für geeignetes } s \in (0,1)$$

Bestimme α_2 ohne Begründung

63: Vorsichtig! Substitution funktioniert hier nicht, da die resultierende Taylorreihe

$$\left(\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ also } \exp(x^2+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2+1)^n}{n!} \right) \text{ NICHT von der}$$

gegebenen Form ist $\left(\sum_{n=0}^3 \alpha_n \cdot x^n \right)$ Wir müssen den direkten Weg gehen,

$$f(x) = e^{x^2+1}, \quad f'(x) = 2xe^{x^2+1}, \quad f''(x) = 2e^{x^2+1} + 4x^2 e^{x^2+1}$$

$$\Rightarrow f''(0) = 2 \cdot e^{0^2+1} + 4 \cdot 0^2 \cdot e^{0^2+1}$$

$$= 2e$$

$$\text{also } \alpha_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{2e}{2!} = e$$

Anal Exercise Session 13

13.1. Einführung in die Integralrechnung

13.2. Unbestimmte Integrale

13.2.1. Fundamentalintegral

13.2.2. Kettenregel Integral

13.2.3. Produktregel Integral (Partielle Integration)

13.2.4. Substitution

13.2.5. Partialbruchzerlegung

13.3. Bestimmte Integrale, zentrale Sätze

13.4. Uneigentliche Integrale

Abschluss: Tipps für die Examsphase

13.1. Einführung in die Integralrechnung: Zentrale Sätze

(Satz, Integrabilitätsbedingung, Skript 5.2.7)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann ist f integrierbar.

(Satz, Alternative Integrabilitätsbedingung, Skript 5.2.8)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton, dann ist f integrierbar.

(Definition, Stammfunktion)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. F heisst Stammfunktion von f , falls

$$F'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b]$$

gilt.

Bem: Da gilt $(F(x) + C)' = (F(x))' = f(x)$, trägt F immer eine Integrationskonst. C

Bem: Nur weil f intbar ist, impliziert dies noch nicht, dass auch eine Stammfunktion existieren muss

(Definition, Fundamentalsatz der Differentialrechnung, Skript 5.4.3)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, F ihre Stammfunktion, so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

(Definition, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Skript 5.4.1)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Definiere F für $a \leq x \leq b$ als

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

so ist $F(x)$ eine Stammfunktion von f , es gilt $F'(x) = f(x)$.

13.2. Unbestimmte Integrale

Einführung in unbestimmte Integral

- Gegeben sei eine stetige Funktion f . Wir suchen F für die gilt

$$F(x) = \int f(x) dx$$

- Achtung: Jede Stammfunktion trägt die Integrationskonstante $C \in \mathbb{R}$ mit sich

13.2.1. Fundamentalintegral

Idee Fundamentalintegral

- Integrale, bei der die Umkehrung zur Ableitung offenbar ist

$f(x)$	$F(x)$
x^n	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
e^x	$e^x + C$
$\frac{1}{x}$	$\log(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$

Bem: Für $\sin, \cos$ gilt die Umkehrung des Ableitungskreis (mit Int Konstante $C \in \mathbb{R}$)

Ableiten	Integrieren (mit $+C$)
$\sin \rightarrow \cos$ $\uparrow \quad \downarrow$ $-\cos \leftarrow -\sin$	$\sin \leftarrow \cos$ $\downarrow \quad \uparrow$ $-\cos \rightarrow -\sin$

Bsp. 13.2.1.1. Bestimme $\int \frac{1}{1+x^2} + x^5 + 42 \cdot \cos(x) dx$

Lös: $\int \frac{1}{1+x^2} + x^5 + 42 \cos(x) dx$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{Lin}}{=} \int \frac{1}{1+x^2} dx + \int x^5 dx + 42 \int \cos(x) dx \\ &= \arctan(x) + \frac{1}{6} x^6 + 42 \cdot \sin(x) + C \end{aligned}$$

13.2.2. Kettenregel Integral

Idee Kettenregel Integral

Haben wir die Form

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

gegeben, gilt nach Kettenregel offenbar

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C$$

$$\text{da f\"ur } (F(g(x)))' = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Bsp 13.2.2.1. Bestimme $\int \frac{1}{x \log(x)} dx$ $[F(g(x))]$

Lös: $\int \frac{1}{x \log(x)} dx = \int \frac{1}{\log(x)} \cdot \frac{1}{x} dx = \log(|\log(x)|) + C$

$$[f(g(x)) \cdot g'(x)], \text{ mit } f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \log(x), g'(x) = \frac{1}{x}$$

Bsp. 13.2.2.2. Bestimme $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

Lös: $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int \frac{1}{e^x + 1} \cdot e^x dx = \log(|e^x + 1|) + C$

$$[f(g(x)) \cdot g'(x)], \text{ mit } f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = e^x + 1, g'(x) = e^x$$

13.2.3. Produktregel Integral (Partielle Integration)

Idee Produktregel Integral (Skript 5.4.5 mit unbestimmtem Integral)

Haben wir die Form

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx$$

gegeben, gilt nach Produktregel

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

$$\text{da gilt } (f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$$

$$\Leftrightarrow \int (f \cdot g)' = \int f' \cdot g + \int g' \cdot f$$

$$\Leftrightarrow f \cdot g = \int f' \cdot g + \int g' \cdot f$$

$$\Leftrightarrow \int f' \cdot g = f \cdot g - \int g' \cdot f$$

Bem.: Wir versuchen F als $f' \cdot g$ zu schreiben, dabei integrieren wir $f(\uparrow)$ und ableiten z.B. $g(\downarrow)$

Bem.: 1. Allg. (nicht IMMER!): " $\downarrow$ " Polynome

" $\uparrow$ " wiederholende Funktionen ($\sin, \cos, \exp$)

Bem.: Manchmal künstlich mit 1 multiplizieren

Bem.: Wenn wir durch mehrfache part. Integration zum ursprünglichen Integral gelangen haben wir eine Gleichung die wir lösen können

Bsp 13.2.3.1 Bestimme $\int x e^x dx$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Lsg: } \int x e^x dx & = & x e^x & - & \int 1 \cdot e^x dx & = & x e^x - e^x + C = e^x(x-1) + C \\ \downarrow & \uparrow & & & \downarrow & \uparrow & \\ g & f' & & & f \cdot g & g' \cdot f & \end{array}$$

Bsp. 13.2.3.2. Bestimme $\int \log(x) dx$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Lsg: } \int \log(x) dx & = & \int 1 \cdot \log(x) dx & = & x \log(x) & - & \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log(x) - x + C \\ & & f' & g & f \cdot g & & f \cdot g' \end{array}$$

Bsp. 13.2.3.3. Bestimme $\int \cos(x)^2 dx$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Lsg: } \int \cos(x) \cdot \cos(x) & = & \sin(x) \cdot \cos(x) & - & \int \sin(x) \cdot (-\sin(x)) dx \\ \uparrow & \downarrow & & & & & \\ & & \sin(x) \cdot \cos(x) & + & \int \sin(x) \cdot \sin(x) dx & & \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \sin^2 + \cos^2 &= 1 \\
 &= \sin(x) \cdot \cos(x) + \int 1 - \cos(x)^2 dx \\
 \text{lin.} \\
 &= \sin(x) \cos(x) + \int 1 dx - \int \cos(x)^2 dx \\
 &= \sin(x) \cos(x) + x - \int \cos(x)^2 dx
 \end{aligned}$$

Ursprüngliches Integral erhalten auf RHS, dies ergibt eine Gleichung

$$\int \cos(x)^2 dx = \sin(x) \cos(x) + x - \int \cos(x)^2 dx \quad | + \int \cos(x)^2 dx$$

$$\Rightarrow 2 \int \cos(x)^2 dx = \sin(x) \cos(x) + x$$

$$\Rightarrow \int \cos(x)^2 dx = \frac{\sin(x) \cos(x) + x}{2}$$

13.2.4. Substitution

Idee Substitution (Skript S.4.6 mit unbestimmten Integral)

Haben wir die Form

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

gegeben, gilt nach Kettenregel mit $y = g(x) \Rightarrow x = g^{-1}(y)$

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(y) dy$$

da nach der Kettenregel gilt

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\Rightarrow \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) = F(y) = \int f(y) dy$$

Bem: Mit $y = g(x)$ gilt $\frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx} g(x) = g'(x)$

$$\Leftrightarrow dy = g'(x) dx \Leftrightarrow dx = \frac{dy}{g'(x)}$$

d.h. ihr sucht eine Substitution (bspw. $y = x^2$), sodass wenn ihr mit

dem Reziproken der Ableitung multipliziert (hier: $\frac{1}{y'} = \frac{1}{(x^2)'} = \frac{1}{2x}$)

sich der Term vereinfacht (bspw. $2x \sin(x^2) dx$, $y = x^2$: $2x \cdot \sin(y) \cdot \frac{1}{2x} \cdot dy = \sin(y) dy$)

Bem: Für bestimmte Integrale (d.h. Integrale auf einem gegebenem Intervall) gilt:

1. Entweder wir lassen die Grenzen wie sie sind und rücks substituieren
2. Wir rücks substituieren nicht, passen stattdessen die Grenzen der Substitution an

Bsp 13.2.4.1. Bestimme $\int 2x \sin(x^2) dx$
 $g'(x) \cdot f(g(x))$

$$\text{d.h. } y = g(x) \text{ hier } y = x^2 \Rightarrow \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x \Rightarrow dy = 2x \cdot dx$$

$$\Rightarrow dx = \frac{1}{2x} \cdot dy$$

$$\text{damit } \int 2x \sin(x^2) dx \stackrel{y=x^2}{=} \int 2x \cdot \sin(y) \cdot \left(\frac{1}{2x} \cdot dy\right)$$

$$= \int \sin(y) dy = -\cos(y) + C = -\cos(x^2) + C$$

↑
Rücks substitution $y = x^2$

Bsp. 13.2.4.2 Bestimme $\int \frac{\ln(\ln(x))}{x \cdot \ln(x)} dx$

Lös: Subs: $y = \ln(\ln(x))$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln(x)} \Rightarrow dx = x \ln(x) \cdot dy$

$$\text{also } \int \frac{\ln(\ln(x))}{x \ln(x)} dx = \int \frac{y}{x \ln(x)} \cdot x \ln(x) dy = \int y dy \\ = \frac{y^2}{2} + C$$

Bsp. 13.2.4.3 Bestimme $\int \frac{1}{x \cdot \ln(x)^4} dx$

Lös: Subs: $y = \ln(x)$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x \cdot dy$

$$\text{also } \int \frac{1}{x \ln(x)^4} = \int \frac{1}{x \cdot y^4} \cdot x \cdot dy = \int \frac{1}{y^4} dy = \frac{y^{-3}}{-3} + C$$

Bem: Substitution kann aber auch helfen, wenn wir nicht die "keinstische" Form haben
d.h. wo sich der Term direkt vereinfacht indem man mit $\frac{1}{y}$ multipliziert;
dies ist dann "nichttriviale" Subs., auf die Subs. zu kommen ist schwer!!
Oftmals gibt es aber immer wiederkehrende Darstellungen (siehe bsp. Wurzel unten)
die man lernen kann: schaut euch dafür alle Serien + Examen + Literatur an

Bsp 13.2.4.2. Bestimme $\int \cos(\sqrt{x}) dx$

Lös: Für Wurzeln: Allg. gilt

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y^2 = x, \text{ also } \frac{d}{dy}(y^2) = \frac{d}{dy}(x)$$

$$\begin{matrix} y = \sqrt{x} \\ 2y dy = dx \end{matrix}$$

$$\Rightarrow 2y = \frac{dx}{dy} \Rightarrow dx = 2y \cdot dy$$

$$\text{Jetzt: } \int \cos(\sqrt{x}) dx = \int \underset{\uparrow}{\cos(y)} \cdot \underset{\downarrow}{2y} dy \\ = \sin(y) \cdot 2y - \int \sin(y) \cdot 2 dy \\ = 2y \sin(y) + \cos(y) + C \\ = 2\sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) + 2\cos(\sqrt{x}) + C \\ \uparrow \\ \text{Rücksubs.}$$

13.2.5. Partialbruchzerlegung

Einführung

Geeignet für rationale Funktionen, wie bspw.

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx$$

Bsp. 13.2.5.1. Bestimme $\int \frac{1}{x^2-1} dx$

Lös: Offenbar gilt $(x^2-1) = (x+1)(x-1)$, schreibe also

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \quad \text{für } A, B \in \mathbb{R}$$

haben wir diese Form, ist das Integral einfach

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx = \int \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)} dx = A \cdot \log(|x+1|) + B \cdot \log(|x-1|) + C$$

Löse für A, B auf:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)}$$

$$\Rightarrow 1 = A(x-1) + B(x+1)$$

Setze nun die Nullstellen von x^2-1 , d.h. $x^2-1=0$ ($x_{1/2} = \pm 1$) in die obige Gleichung ein

$$x=1: \quad 1 = A(1-1) + B(1+1) = 2B \Rightarrow B = 1/2$$

$$x=-1: \quad 1 = A(-1-1) + B(1-1) = -2A \Rightarrow A = -1/2$$

$$\text{also: } \int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{-1/2}{x+1} + \frac{1/2}{x-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx = \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \log(|x-1|) - \frac{1}{2} \log(|x+1|) + C$$

wie erwartet (vgl. Ausdruck oben mit gelösten A, B)

Bsp. 13.2.5.2. Bestimme $\int \frac{3x+4}{x(x+2)} dx$

Lös:

Falls ihr die Faktorisierung bemerkt, ist das Integral einfach:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+4}{x(x+2)} dx &= \int \frac{2(x+2) + x}{x(x+2)} dx = \\ &= \int \frac{2(x+2)}{x(x+2)} + \frac{x}{x(x+2)} dx \\ &= 2 \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{(x+2)} dx = 2 \log(|x|) + \log(|x+2|) + C\end{aligned}$$

Ansonsten, typische PBZ Aufgabe:

$$\frac{3x+4}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$$

$$\Rightarrow 3x+4 = A(x+2) + B \cdot x$$

$$x=0: 4 = 2A \Rightarrow A=2$$

$$x=-2: -6+4=-2 = -2B \Rightarrow B=1$$

$$\text{d.h. } \int \frac{3x+4}{x(x+2)} dx = \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{1}{x+2} dx = 2 \log(|x|) + \log(|x+2|) + C$$

13.3. Bestimmte Integrale, wichtigste Sätze

Einführung in bestimmte Integrale

Bisher haben wir nur i. Allg. Stammfunktionen bestimmt. Nun können wir diese mittels dem Fundamentalsatz auf einem gewissen Intervall ausweiten, d.h.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

(Satz, Linearität, Skript S.2.10)

Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt

$$\int_a^b A \cdot f(x) + B \cdot g(x) dx = A \cdot \int_a^b f(x) dx + B \cdot \int_a^b g(x) dx$$

(Satz, Monotonie, Skript S.3.1)

Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$ so gilt

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Bem: Insb. gilt für $f(x) = 0$, d.h. $g(x) \geq 0$, das $\int_a^b g(x) dx \geq 0$

(Korollar, Dreiecksungleichung, Skript S.3.2)

Falls $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

(Satz, Cauchy-Schwarz Ungleichung, Skript S.3.3.)

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g(x)^2 dx}$$

(Satz, Mittelwertsatz, Skript S.3.4)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gibt es ein $c \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a)$$

(Satz, Cauchy, Skript 5.3.6)

Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f stetig, $g(x) \geq 0$ integrierbar, so existiert ein $c \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x) dx$$

(Korollar, Symmetrisches Intervall über einer ungeraden Funktion)

Sei $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$, f integrierbar und ungerade, d.h. $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in [-a, a]$

so gilt

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

(Korollar, Nullintegral)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f integrierbar so gilt für alle $c \in [a, b]$

$$\int_c^c f(x) dx = 0$$

Bem: Die Fläche an einem Punkt ist stets null

(Korollar, Grenzwertschiebung)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f integrierbar und $a < b$ so gilt

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

Bsp. 13.3.1 (H518): Bestimme $\int_0^1 x e^{-2x} dx$

$$\begin{aligned} \text{Stammfunktion: } \int \underset{\downarrow}{x} \underset{\uparrow}{e^{-2x}} dx &= x \frac{e^{-2x}}{-2} - \int 1 \cdot \frac{e^{-2x}}{-2} dx \\ &= \frac{-x e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx \\ &= \frac{-x e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{-2x}}{-2} \right) \\ &= \frac{-x e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} \end{aligned}$$

$$\text{also } \int_0^1 x e^{-2x} dx = F(1) - F(0) = \left(\frac{-e^{-2}}{2} - \frac{e^{-2}}{4} \right) - \left(-\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}$$

Bsp. 13.3.2. Bestimme $\int_0^y x \cos(x^2) dx$

Substitution $y = x^2 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} \cdot dy$

$$\begin{aligned} \int x \cos(x^2) dx &= \int x \cdot \cos(y) \cdot \frac{1}{2x} \cdot dy \\ &= \frac{1}{2} \int \cos(y) dy \\ &= \frac{1}{2} \sin(y) = \frac{1}{2} \sin(x^2) \end{aligned}$$

also: $\int_0^y x \cos(x^2) dx = F(y) - F(0) = \frac{1}{2} \sin(y^2) - \left[\frac{1}{2} \sin(0^2) \right] = \frac{1}{2} \sin(y^2)$

$\uparrow$ Rücksub. $y = x^2$ $= 0$

Bsp. 13.3.3 (WS19): Bestimme $\int_3^{10} \frac{1}{x \cdot \ln(x)^4} dx$

Substitution $y = \ln(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x \cdot dy$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x \ln(x)^4} dx &= \int x \frac{1}{y^4} \cdot x dy = \int \frac{1}{y^4} dy \\ &= \frac{y^{-3}}{-3} \\ &= \frac{\ln(x)^{-3}}{-3} \end{aligned}$$

$\uparrow$ Rücksubst.

also $\int_3^{10} \frac{1}{x \ln(x)^4} dx = \left[\frac{\ln(x)^{-3}}{-3} \right]_3^{10} = \frac{\ln(10)^{-3}}{-3} - \frac{\ln(3)^{-3}}{-3}$

Bsp. 13.3.4. (WS20) Bestimme $\int_e^e \frac{\ln(\ln(x))}{x \cdot \ln(x)} dx$

Lös: Substitution bei bestimmtem Integral heisst: entweder 1) rücksubst oder 2) grenzen subst.
(siehe Bemerkung bei der Substitution)

Substitution: $y = \ln(\ln(x)) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln(x)} \Rightarrow dx = x \ln(x) \cdot dy$

$$\int_e^e \frac{\ln(\ln(x))}{x \ln(x)} dx = \int_{\ln(\ln(e))}^{\ln(\ln(e^e))} \frac{y}{x \ln(x)} \cdot x \ln(x) dy = \int_0^1 y dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

13.4. Uneigentliche Integral

Einführung uneigentliche Integral

Bisher haben wir Integrale auf einem endlichen Intervall gesehen, bspw.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $\int_a^b f(x) dx$, was wenn das Integral unendlich ist?

(Definition, Uneigentliches Integral, Skript S. 6.1)

Sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, und auf allen Intervallen $[c, d] \subset (a, b)$ integrierbar, so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \lim_{d \rightarrow b^-} \int_c^d f(x) dx$$

Insbesondere gilt also

1. $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) dx$

2. $f: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^0 f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx$

3. $f: (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$

Bem: Vorsicht in Fall 3: Es braucht zwei Limes, der Ausdruck ist nicht gleich zu

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c f(x) dx$$

Bsp. 13.4.1 (HS18) Bestimme $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ (Tipp: Fundamentallintegral, $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$)

Lös: $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctan(x)]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctan(b) - \underbrace{\arctan(0)}_{=0})$$
$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan(b) = \frac{\pi}{2}$$

Bsp 13.4.2 (FS20): Bestimme $\int_e^{+\infty} \frac{(\ln x)^{-100}}{x} dx$

Lös: Subs $y = \ln(x)$, $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x \cdot dy$

$$\int_e^{+\infty} \frac{(\ln x)^{-100}}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_e^b \frac{(\ln x)^{-100}}{x} dx$$
$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\ln(e)}^{\ln(b)} \frac{y^{-100}}{x} \cdot x dy$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^{\ln(b)} y^{-yy} dy \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{y^{-yy}}{-yy} \right]_1^{\ln(b)} \\
&= -\frac{1}{yy} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\left| \ln(b)^{-yy} \right|}_{\rightarrow 0} - 1^{-yy} \right) \\
&= \frac{1}{yy}
\end{aligned}$$

Bsp. 12.4.3. (FS20) Bestimme $\int_{-\infty}^0 x \cdot e^{3x} dx$

Lös: Part. Integration:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0 x e^{3x} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 x e^{3x} dx \\
&= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[x \frac{e^{3x}}{3} \right]_a^0 - \int_a^0 1 \cdot \frac{e^{3x}}{3} dx \\
&= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\underbrace{\left(-\frac{e^{3a}}{3} \right)}_{\rightarrow 0} - \left[\frac{e^{3x}}{9} \right]_a^0 \right] dx \\
&= \lim_{a \rightarrow -\infty} - \left[\frac{e^0}{9} - \underbrace{\left(\frac{e^{3a}}{9} \right)}_{\rightarrow 0} \right] = -\frac{1}{9}
\end{aligned}$$

Exams-Tipps

- Schreibt ever Cheat-Sheet, am besten nachdem ihr ein Thema fertig habt auf dem CS löst die entsprechenden Serie Aufgaben + alle Examenaufgaben in dem Themenbereich
- **Wichtig:** Aufgaben lösen hilft dabei die Theorie zu verstehen und ist das Wichtigste in der Analysis.
- Versteh zudem die Theorie soweit das ihr ein intuitives Verständnis für die Sätze/Korollare habt (d.h. wisst was der Satz aussagt und warum)
⇒ Versucht dann damit alle Beweise aus Serien + Examen zu lösen (oftmals einfach Definition + gegebene Einschränkung in der Aufgabenstellung dann noch ein paar Äquivalenzumformungen und ihr seid fertig!)
- **Noch sehr unsicher?** Eventuell PVW (wird aber ähnlich sein zu den Übungsstunden: wir werden aber noch mehr alle Examenaufgaben etc. lösen und ihr könnt Fragen bei Unklarheiten stellen)

Viel Glück, ihr schafft das!!