

1. FOLGEN

Folgen: Definition und Rechenregeln

Konvergenzdefinition

Folge (a_n) konv. gegen $A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. |a_n - A| < \varepsilon$

Rechenregeln

Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen mit Grenzwerten a, b dann gilt:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}, \text{ falls } b \neq 0$$

Folgen: Konvergenzkriterien

Konvergenzcharakterisierung (Sandwich Theorem)

Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Angenommen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A, \text{ dann } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$$

Cauchy Kriterium

Eine Folge auf $\mathbb{R}$ (a_n) konvergiert, genau dann wenn

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}. \forall n, m \geq N: |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Weierstrass

Ist die Folge (a_n) nach oben (bzw. unten) beschränkt und monoton wachsend (bzw. monoton fallend) dann ist (a_n) konvergent.

Bsp Konvergiert die rekursive Folge $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6)$, und falls ja wohin

Lsg: Teleskopiere etwas, d.h. $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 5, a_4 = 5.5, a_5 = 5.75, \dots$

Schritt 1: Monotonie via vollständiger Induktion zeigen, also $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_{n+1}$

Induktions Anfang ($n=1$): $a_1 = 2 \leq 4 = a_2$ ✓

Induktionsschritt (" $n \Rightarrow n+1$ ") : Nehme als Induktionshypothese an, dass $a_n \leq a_{n+1}$ gilt.

$$a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow a_n + 6 \leq a_{n+1} + 6 \Rightarrow \underbrace{\left| \frac{1}{2}(a_n + 6) \right|}_{:= a_{n+1}} \leq \underbrace{\left| \frac{1}{2}(a_{n+1} + 6) \right|}_{:= a_{n+2}} \Rightarrow a_{n+1} \leq a_{n+2}$$

Per mathematischer Induktion gilt somit, dass $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_{n+1}$ gilt

Schritt 2: Beschränktheit mittels vollständiger Induktion zeigen

Induktionsanfang ($n=1$): $a_1 = 2 \leq 6$ ✓

Induktionsschritt (" $n \Rightarrow n+1$ ") : Nehme als Induktionshypothese an, dass $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq 6$ gilt.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6) \stackrel{\text{IH.}}{\leq} \frac{1}{2}(6+6) = 6$$

Per mathematischer Induktion gilt somit, dass $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq 6$ gilt

Schritt 3: Schlussfolgerung über Konvergenz und Bestimmung des Grenzwerts

Da (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, konvergiert a_n .

Der Grenzwert entspricht:

$$\underbrace{a_{n+1}}_{\rightarrow a} = \frac{1}{2}(\underbrace{a_n}_{\rightarrow a} + 6) \Rightarrow a = \frac{1}{2}(a+6) \Rightarrow a=6$$

2. REIHEN

Reihen: Definitionen, Rechenregeln

Konvergenzdefinition: Reihe

Wir sagen, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent ist, falls die Folge $(S_n)_{n \geq 1}$ der Partialsummen konvergiert, wir schreiben

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Rechenregeln: Konvergente Reihen

Seien $\sum_k a_k$, $\sum_k b_k$ konvergente Reihen, so gilt das auch die folgenden Reihen konvergent sind, es gilt:

- i) $\sum_k a_k + b_k = \sum_k a_k + \sum_k b_k$
- ii) $\sum_k a_k - b_k = \sum_k a_k - \sum_k b_k$
- iii) $\sum_k A \cdot a_k = A \sum_k a_k$ (mit $A \in \mathbb{C}$)

Definitionen, Absolute Konvergenz, Skript 2.7.9)

Die Reihe $\sum_k a_k$ heisst absolut konvergent, falls

$$\sum_k |a_k|$$

konvergiert

Reihen: Konvergenzkriterien

Nullfolgenkriterium

Sei (a_n) eine Folge, so gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergiert}$$

beziehungsweise äquivalent

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| = 0$$

Majoranten- und Minorantenkriterium, Vergleichssatz

Es sei $0 \leq a_k, b_k$ mit $a_k \leq b_k$, dann gilt:

$$\text{ii) } \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergiert} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert} \quad (\text{Majorantenkriterium})$$

$$\text{ii) } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergiert} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergiert} \quad (\text{Minorantenkriterium})$$

Zusatz zum Vergleichssatz: Absolute Konvergenz

Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent. Zudem gilt

$$|\sum_k a_k| \leq \sum_k |a_k|$$

Leibnizkriterium

Sei eine alternierende Reihe $\sum_k (-1)^k a_k$ gegeben, falls

i) $a_k \geq 0$

ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$

iii) $a_{k+1} \leq a_k$ (monoton fallend)

gilt so konvergiert die Reihe $\sum_k (-1)^k a_k$

Quotientenkriterium

Sei $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$, so gilt

i) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ konvergiert

ii) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ divergiert

Wurzelkriterium

Sei $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$, so gilt

i) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ konvergiert

ii) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ divergiert

Potenzreihen

Definition Potenzreihe,

Eine Potenzreihe ist gegeben als

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

mit z einer Variablen in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und c_k eine reelle oder komplexe Folge.

Potenzreihe: Konvergenzkriterium

Konvergenzradius ρ

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ eine Potenzreihe, so gilt für den Konvergenzradius ρ

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$