Analysis 1 PVW

Organisation

- Mail: falkbe@ethz.ch (Fragen, feedback etc.)
- Notizen auf der Polybox (link per e-mail an euch geschickt)

Wie funktioniert der PVW?

- PVW ist Ergänzung, nicht Ersatz zum Eigenständigen lernen
  - Tipp: nach jedem PVW Tag selbst Aufgabentypen in alten Examen lösen
- Wichtig: Aktive Mitarbeit, d.h. selber Aufgaben lösen und Fragen stellen!!

  ⇒ da ich alle Notizen hochlade empfehle ich: schreibt nicht mit, denkt mit und löst die Aufgaben fürs Verständnis!

Roadmap Themenbereich

- I. Allg. werden wir uns am PVW Skript orientieren
- Mon: Folgen und Reihen
- Die: Stetigkeit
- Mit: Differentialrechnung
- Don: Integralrechnung
- Fre: Puffer / Altklausur lösen

Ana1 PVW Tag 1: Folgen und Reihen

Ana1 PVW Tag 1: Folgen und Reihen

1.1. Supremum und Infimum

1.2. Folgen

1.3 Reihen

1.4 Potenzreihen

1. 1. Supremum und Infimum

(Definition: Obere / Untere Schranke)

Sei $A \subset \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ ist eine obere Schranke falls gilt:

$$\forall a \in A. \quad a \leq b$$

Analog ist $c \in \mathbb{R}$ eine untere Schranke falls gilt:

$$\forall a \in A. \quad a \geq c$$

Bem: · Die Schranken müssen keine Elemente von A sein

· Die Schranken sind nicht eindeutig

Bsp: Bestimme obere Schranken von $A = \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \}$

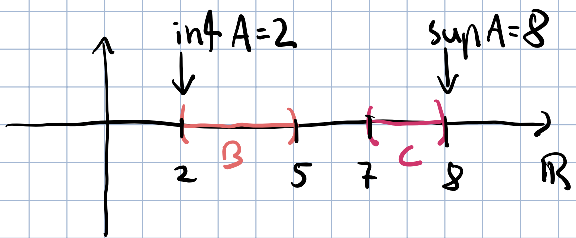
Lös: Obere Schranken: $1, \pi, 42, \dots$

(Definition Supremum, Infimum)

Das Supremum einer Menge A (man schreibt $\sup A$) ist die kleinste obere Schranke.

Analog, das Infimum von A (man schreibt $\inf A$) ist die grösste untere Schranke

Graphisch:



$A = B \cup C$

Bem: · Infimum, Suprenum sind (im vgl. zu Schranken) immer Eindeutig

· Inf, Sup müssen nicht in der Menge enthalten sein

· Ist die Menge nach oben (unten) unbeschränkt, defn. wir: $\sup A = +\infty$ ($\inf A = -\infty$)

(Definition Maximum, Minimum)

Ist das Supremum in der Menge A enthalten ($\sup A \in A$), so gilt das dies das Maximum der Menge ist. Man schreibt $\max A$.

Analog, gilt $\inf A \in A$ so ist dies das Minimum, man schreibt $\inf A$.

Bsp: Bestimme sup, inf und (falls existent) max, min von
$A = \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \}$

Lös: $\sup A = 1$, $\max A = 1$
$\inf A = 0$, $\min A =$ NA

Bsp: Bestimme sup, inf, falls ex. max, min von

$$A = \{ \frac{n-3}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \} \cup (-1,1)$$

Lös: Teleskopiere den ersten Term:

$$\{ \frac{n-3}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \} = \{ -2, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{16}, \frac{2}{25}, \frac{3}{36} \}$$

d.h. ab $n=2$ liegen alle Terme im Intervall $(-1,1)$. A ist also äquivalent formuliert durch

$$A = \{-2\} \cup (-1,1)$$

$\sup A = 1$ als kleinste obere Schranke, aber $\sup A = 1 \notin A$, also $\max A =$ N/A
$\inf A = -2$ als grösste untere Schranke, $\inf A = -2 \in A$, also $\min A = -2$

Ana1 PVW Tag 1: Folgen und Reihen

1.1. Supremum und Infimum

1.2. Folgen

1.2.1 Folgen Definition

1.2.2 Folgen Konvergenzdefinition

1.2.3 Monotone und Beschränkte Folgen

1.2.4 Teilfolgen (liminf, limsup)

1.2.5 Cauchy Kriterium

1.3 Reihen

1.4 Potenzreihen

1.2.1 Folgen Definition

Einführung: Folge als Abbildung

Eine Folge ist eine geordnete Liste von Zahlen

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Formal: Eine Folge ist eine Abbildung

$$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto a_n$$

man schreibt oft $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \widehat{=} (a_n)_{n \geq 1} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

Einführung: Folgen darstellung

Üblicherweise gibt es zwei Arten Folgen anzugeben:

1. Eplizit: Man schreibt das n-te Folgenglied explizit:

$$(a_n)_{n \geq 1} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

bspw. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$

2. Rekursiv: Man gibt i) Anfangswerte, ii) Vorschrift an

bspw. i) Anfangswerte: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$

ii) Vorschrift $(n \geq 2)$: $a_n = a_{n-1} + a_{n-1}$

damit: $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$ wird die Fibonacci Folge induziert

1.2.2 Folgen Konvergenzdefinition

Folgendefinition (Skript)

Die Folge (a_n) konvergiert, falls eine Zahl $l \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $\forall \varepsilon > 0$ die Menge

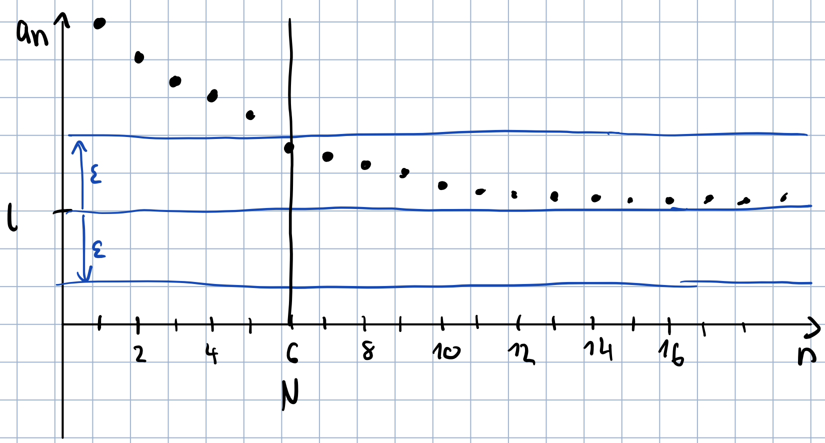
$$\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin (l-\varepsilon, l+\varepsilon)\}$$

endlich ist. Wir bezeichnen l als den Grenzwert der Folge

Äquivalente Definition

Die Folge (a_n) konvergiert gegen $l \in \mathbb{R}$, falls $\forall \varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert (also ein von ε abhängiges N), sodass für alle $n \geq N$ gilt: $|a_n - l| < \varepsilon$

Kurz: $\forall \varepsilon > 0.\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N : |a_n - l| < \varepsilon$



Bem: Nur wenn der Grenzwert existiert darf man $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = l$ schreiben

Konvergenzbeweise mittels Definition

Bsp: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

Lösung: Wähle beliebig kleines $\varepsilon > 0$, wir müssen zeigen das ein von ε abhängiges N existiert, sodass für alle $n \geq N$ gilt: $|a_n - l| = |1/n - 0| = |1/n| < \varepsilon$

Offenbar haben wir hiermit direkt eine Ungleichung gegeben, löse nach n auf:

$$|a_n - l| = |1/n| \overset{!}{<} \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Wähle $N := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ (Aufrunden da $N \in \mathbb{N}$ sein muss).

Nach Konstruktion gilt somit $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N : |1/n - 0| < \varepsilon$ (d.h. $1/n$ Konv. gegen 0 bzw. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$)

Bsp: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$

Lös: Wahle beliebig kleines ε, dann finde ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ gilt:

$$|a_n - a| = \left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| \overset{!}{<} \varepsilon$$

also $$\left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| = \left|\frac{n^2}{n^2+1} - \frac{n^2+1}{n^2+1}\right| = \left|\frac{-1}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n^2+1} \overset{!}{<} \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon} < n^2+1$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} < n$$

d.h. für $n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$ gilt $|a_n - c| < \varepsilon$ für beliebigen ε, wähle

$$N := \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} + 1$$

(Satz: Rechenregeln für Grenzwerte)

Seien (a_n), (b_n) konvergente Folgen mit Grenzwerten a, b dann gilt:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, falls $b \neq 0$

Bsp: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$

Lös: Derzeit konvergiert weder Nenner noch Zähler, aber da $n \geq 1$ gilt

$$\frac{n \cdot (1)}{n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

also $$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \overset{(1),(3)}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

(Satz. Allgemeines Vergleichsprinzip, "Sandwich Lemma")

Seien (a_n), (b_n), (c_n) konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Angenommen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A, \quad \text{dann} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = A$$

Beweis des Allgemeinen Vergleichsprinzips

Da (a_n), (c_n) jeweils konvergent sind (mit Grenzwert A) gilt nach Definition:

i) defn. Folgenkonvergenz (a_n): $\forall \varepsilon > 0 . \exists N_a \in \mathbb{N} . \forall n \geq N_a \; |a_n - A| < \varepsilon \; (\Leftrightarrow A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon)$

ii) defn. Folgenkonvergenz (c_n): $\forall \varepsilon > 0 . \exists N_c \in \mathbb{N} . \forall n \geq N_c \; |c_n - A| < \varepsilon \; (\Leftrightarrow A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon)$

Vereine Bedingungen i), ii) für N_a, N_c, also definiere $N_b := \max(N_a, N_c)$, dann gelten $\forall n \geq N_b$ beide Bedingungen, also gilt für $N = N_b$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : \; A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon \; (\Leftrightarrow |b_n - A| < \varepsilon)$$

was der Definition einer konvergenten Folge entspricht, d.h. (b_n) ist konvergent mit Grenzwert A.

Bem: Oftmals kann man die eigene Folge approximieren um geeignete Folgen (a_n), (c_n) zu finden

Bsp: Gegen was konvergiert $\frac{1}{n^2}$

Lös: Offenbar gilt $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

Bsp: Gegen was konvergiert $\sqrt[n]{3^n + 5^n}$

Lös: $3^n \geq 0$ also $\sqrt[n]{3^n + 5^n} \geq \sqrt[n]{0 + 5^n} = \sqrt[n]{5^n} = 5$

$5^n \geq 3^n$ also $\sqrt[n]{3^n + 5^n} \leq \sqrt[n]{5^n + 5^n} = 5\sqrt[n]{2}$

aber mit $n \geq 2$ $\sqrt[n]{2} \leq \sqrt[n]{n} = n^{1/n}$ $\left(\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1\text{, siehe Bsp 2.2.5 Skript}\right)$

also $5 \leq \sqrt[n]{3^n + 5^n} \leq \lim_{n\to\infty} 5\sqrt[n]{n} = 5 \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)}_{=1} = 5$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n} = 5$

1.2.3 Monotone und Beschränkte Folgen

(Definition Monotone Folgen)

Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist monoton wachsend falls:

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \geq 1$$

und monoton fallend falls

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \geq 1$$

(Man kann analog streng monoton wachsend und streng monoton fallend mit $<$ bzw $>$ definiere

(Definition Beschränktheit)

Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist nach oben beschränkt, falls es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$a_n \leq C \quad \forall n \geq 1$$

und nach unten beschränkt, falls es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$a_n \geq C \quad \forall n \geq 1$$

(Korollar)

Konvergente Folgen sind immer Beschränkt.

Bem: Die Umkehrung gilt nicht, bspw ist $((-1)^n)_{n\geq 1}$ beschränkt aber nicht konvergent.

(Beweis) Serie 2, Aufgabe 2.2.

(Satz Weierstrass)

Ist die Folge (a_n) nach oben (bzw. unten) beschränkt und monoton wachsend (bzw. monoton fallend) dann ist (a_n) konvergent.

Bem: Oftmals ist dieser Satz bei rekursiv definierten Folgen nützlich

(Kochrezept: Konvergenz von monotonen + beschränkten Folgen)

Sei (a_n) eine rekursiv definierte Folge, um den Grenzwert zu bestimmen Zeige:

(0. Teleskopiere um Verhalten + Grenzwert zu "raten")

1. Zeige: Folge ist monoton wachsend (fallend), oft via Induktion
2. Zeige: Folge ist nach oben (unten) beschränkt, oft via Induktion
3. Aus 1. + 2. Folgen wir mit Weierstrass: Folge konv. gegen ein $A \in \mathbb{R}$
4. Verwende Induktionstrick: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = A$

Bsp: Konvergiert die Folge (a_n), und falls ja wohin. (a_n) ist gegeben als:

$a_1 = 3$, $a_{n+1} = \sqrt{3 \cdot a_n - 2}$ $(n \geq 2)$

0. Teleskopiere: $a_1 = 3$, $a_2 = \sqrt{3 \cdot a_1 - 2} = \sqrt{9-2} = \sqrt{7} \approx 2.5$

$a_3 = \sqrt{3 \cdot a_2 - 2} = \sqrt{3 \cdot \sqrt{7} - 2} \approx \sqrt{7.5 - 2} = \sqrt{5} \approx 2.2$

$\vdots$

es scheint: monoton fallend + unterer Grenzwert bei 2

1. Zeige: Monoton fallend (per Induktion), d.h. $a_n \geq a_{n+1}$

Induktions Anfang $(n=1)$: $a_1 = 3 = \sqrt{9} > \sqrt{7} = a_2$

Induktionsschritt ("$n \Rightarrow n+1$"): Nehme als Induktionshypothese an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \geq a_{n+1}$, wir zeigen $a_{n+1} \geq a_{n+2}$

$$a_{n+1} = \sqrt{3 \cdot a_n - 2} \overset{(IH)}{\geq} \sqrt{3 a_{n+1} - 2} = a_{n+2}$$

Per math. Induktion gilt die Aussage somit für alle $n \in \mathbb{N}$, qed.

2. Zeige: Nach unten beschränkt (Induktion, benutze erratene 2), d.h. $a_n \geq 2$ für alle $n \geq 1$

IA $(n=1)$: $a_1 = 3 \geq 2$

IS ("$n \Rightarrow n+1$"): Wir nehmen als IH an, dass für ein festes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$a_n \geq 2$, wir zeigen $a_{n+1} \geq 2$

$$a_{n+1} = \sqrt{3 a_n - 2} \overset{IH}{\geq} \sqrt{3 \cdot 2 - 2} = \sqrt{4} = 2$$

Per mathematischer Induktion gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$. qed.

3. Folgere nach Weierstrass

$(a_n)_{n \geq 1}$ ist monoton fallend und nach unten beschränkt

"Weierstrass" $\Rightarrow$ Es existiert ein Grenzwert $A \in \mathbb{R}$, d.h. $\lim_{n \to \infty} a_n = A$

4. Induktionstrick

Es gilt $\lim_{n \to \infty} a_n = A \Rightarrow$ Für jede Teilfolge $\varphi(n)$ gilt $\lim_{n \to \infty} a_{\varphi(n)} = A$

wähle $\varphi(n) = n+1$, so gilt: $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} a_{n+1} = A$

$$\underbrace{\boxed{a_{n+1}}}_{\to A} = \sqrt{3 \cdot \underbrace{\boxed{a_n}}_{\to A} - 2} \Rightarrow A = \sqrt{3 \cdot A - 2} \Rightarrow A^2 = 3 \cdot A - 2 \Rightarrow (A-1)(A-2) = 0$$

d.h $A = 1$ oder $A = 2$, da $a_n \geq 2$ muss $A = 2$ gelten

Bsp: Konvergiert die rekursive Folge $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+6)$, und falls ja wohin

Lös: Teleskopiere etwas, d.h. $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 5$, $a_4 = 5.5$, $a_5 = 5.75$, ...

Schritt 1: Monotonie via vollständiger Induktion zeigen, also $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_{n+1}$

Induktions Anfang $(n=1)$: $a_1 = 2 \leq 4 = a_2$ ✓

Induktionsschritt ("$n \Rightarrow n+1$"): Nehme als Induktionshypothese an, dass $a_n \leq a_{n+1}$ gilt.

$$a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow a_n + 6 \leq a_{n+1} + 6 \Rightarrow \underbrace{\boxed{\tfrac{1}{2}(a_n+6)}}_{:= a_{n+1}} \leq \underbrace{\boxed{\tfrac{1}{2}(a_{n+1}+6)}}_{:= a_{n+2}} \Rightarrow a_{n+1} \leq a_{n+2}$$

Per mathematischer Induktion gilt somit, dass $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_{n+1}$ gilt

Schritt 2: Beschränktheit mittels vollständiger Induktion zeigen

Induktionsanfang $(n=1)$: $a_1 = 2 \leq 6$ ✓

Induktionsschritt ("$n \Rightarrow n+1$"): Nehme als Induktionshypothese an, dass $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq 6$ gilt.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6) \overset{\text{I.H.}}{\leq} \frac{1}{2}(6+6) = 6$$

Per mathematischer Induktion gilt somit, dass $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq 6$ gilt

Schritt 3: Schlussfolgerung über Konvergenz und Bestimmung des Grenzwerts

Da (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, konvergiert a_n.

Der Grenzwert entspricht:

$$\underbrace{\boxed{a_{n+1}}}_{\to a} = \frac{1}{2}(\underbrace{\boxed{a_n}}_{\to a} + 6) \Rightarrow a = \frac{1}{2}(a+6) \Rightarrow a = 6$$

1.2.4 Teilfolgen

(Defn. Teilfolge)

Sei (a_n) eine Folge und $X \subset \mathbb{N}$ eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$, bzw. $X = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \bmod 2 = 0\}$
$= \{0, 2, 4, 6, \dots\}$

Die Folgenglieder (a_n) mit $n \in X$ bilden eine Teilfolge von (a_n).

Bsp: Bestimme Teilfolgen von $a_n = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$

Lös: $X = \{n \mid n \in \mathbb{N},\ n \bmod 2 = 0\}: \{a_0, a_2, a_4, a_6, \dots\}$

$X = \{n \mid n = 4 \cdot m + 1,\ m \in \mathbb{N}\}: \{a_1, a_5, a_9, a_{13}, \dots\}$

(Satz Bolzano Weierstrass)

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ hat mindestens eine konvergente Teilfolge (a_k), $k \in X$ ($X \subset \mathbb{R}$, X unendl.)

Bem: Welche Folge ist beschränkt aber nicht konvergent? Was ist die konv. Teilfolge hier?

(Defn. Limes Inferior)

Sei (a_n) eine beschränkte Folge, definiere (b_n) als Teilfolge von (a_n):

$$b_n := \inf\{a_k \mid k \geq n\} = \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$$

bspw. $b_1 = \inf\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

$b_2 = \inf\{a_2, a_3, a_4, \dots\}$

$b_3 = \inf\{a_3, a_4, a_5, \dots\}$

Es gilt $b_n \leq b_{n+1}$, zudem ist (b_n) beschränkt (da (a_n) nach Annahme beschränkt ist)

Nach Weierstrass gilt b_n ist konvergent zu einem $B \in \mathbb{R}$.

Definiere Limes Inferior als:

$$\liminf_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = B$$

Bsp: Bestimme liminf für $(a_n)_{n \geq 1} = (-1)^n$

Nach Definition $b_n = \inf\{(-1)^k \mid k \geq n\}$

Teleskopiere: $b_1 = \inf\{a_1, a_2, a_3, \dots\} = \inf\{-1, 1, -1, \dots\} = -1$

$b_2 = \inf\{a_2, a_3, a_4, \dots\} = \inf\{1, -1, 1, \dots\} = -1$

$\vdots$

$b_n = -1$, also $\lim\limits_{n \to \infty} (-1)^n = -1$

(Defn. Limes Superior)

Sei (a_n) eine beschränkte Folge, definiere (c_n) als Teilfolge von (a_n):

$$c_n := \sup\{ a_k \mid k \geq n\} = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$$

bspw $c_1 = \sup\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

$c_2 = \sup\{a_2, a_3, a_4, \dots\}$

$c_3 = \sup\{a_3, a_4, a_5, \dots\}$

Es gilt $c_n \geq c_{n+1}$, zudem ist (c_n) beschränkt (da (a_n) nach Annahme beschränkt ist)

Nach Weierstrass gilt b_n ist konvergent zu einem $C \in \mathbb{R}$.

Definiere Limes Inferior als:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = C$$

Bsp: Bestimme limsup von $(a_n)_{n\geq 1} = (-1)^n$

Lös: Nach Definition $c_n = \sup\{ (-1)^k \mid k \geq n\}$

Teleskopiere: $c_1 = \sup\{a_1, a_2, a_3, \dots\} = \sup\{-1, 1, -1, \dots\} = 1$

$c_2 = \sup\{a_2, a_3, a_4, \dots\} = \sup\{1, -1, 1, \dots\} = 1$

$\vdots$

$c_n = 1$, also $\limsup_{n\to\infty} (-1)^n = 1$

(Lemma: Charackterisierung der Konvergenz)

Eine Folge (a_n) konvergiert $\Leftrightarrow$ (a_n) ist beschränkt und $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$

Bem: Gilt $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = A$, so gilt das (a_n) gegen A konv.

1.2.5 Cauchy Kriterium

(Satz Cauchy Kriterium)

Eine Folge auf $\mathbb{R}$ (a_n) konvergiert, genau dann wenn

$$\forall \varepsilon > 0 . \exists N \in \mathbb{N} . \forall n, m \geq N : \; |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Bsp: Ist $a_n = \frac{n-1}{2n}$ konvergent?

Eine Folge ist konvergent, falls sie eine Cauchy Folge ist. Wir überprüfen anhand der Defn. des Kriteriums (vgl. Satz 2.4.2) wobei o.B.d.A. $m \geq n$ sein soll:

$$|a_n - a_m| = \left| \frac{n-1}{2n} - \frac{m-1}{2m} \right| = \left| \frac{2m(n-1) - 2n(m-1)}{4mn} \right| = \left| \frac{n-m}{2nm} \right|$$

$$= \frac{1}{2n} - \frac{1}{2m} \overset{m \geq n}{\leq} \frac{1}{2n} \overset{!}{<} \varepsilon$$

Für $n > \frac{1}{2\varepsilon}$ ist a_n eine Cauchy Folge, setze also $N = \lceil \frac{1}{2\varepsilon} \rceil$

FOLGEN HANDS-ON: AUFGABEN

- Siehe Website n.ethz.ch/~falkbe/pvw.html

Aufgaben Folgen

A1.1. MC Fragen

(Mehrere richtige Antwortmöglichkeiten)

FS18

(a) Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist die Aussage $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ äquivalent zu

☐ $\forall\, K \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N},$ so dass $\forall\, n \geq N:\ a_n \leq -K.$

☐ $\forall\, \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N},$ so dass $\forall\, n \geq N:\ |a_n| < \epsilon.$

☐ $\forall\, N \in \mathbb{N}\ \exists K \in \mathbb{N},$ so dass $\forall\, n \geq N:\ a_n \leq -K.$

☐ $\forall\, N \in \mathbb{N}\ \exists \epsilon > 0,$ so dass $\forall\, n \geq N:\ |a_n| < \epsilon.$

FS18

(e) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Antwortmöglichkeiten sind korrekt?

☐ Wenn $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, dann ist auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

☐ Wenn $0 \leq b_n \leq a_n^3$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_n \to 0$ für $n \to \infty$, dann konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

☐ Wenn $|a_n - b_n| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann konvergieren beide Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

☐ Wenn $(b_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

HS18

(d) Es gilt $x_n \to x_0$ genau dann wenn,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \geq 1,\ \forall n \geq N,\ |x_n - x_0| < \varepsilon.$$

Wahr ☐ Falsch ☐

FS20

(d) Seien $(a_k)_{k\geq 1}, (b_k)_{k\geq 1}$ und $(c_k)_{k\geq 1}$ drei Folgen. Sei $(d_k)_{k\geq 1}$ definiert durch

$$d_k = \frac{(a_k)^2 + \sin(b_k)}{1 + \exp(c_k)}.$$

Geben Sie für jede folgender Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist.

(i) **[2 pkt]** Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ absolut konvergieren, gilt $\lim_{k\to\infty} d_k = 0$.

(A) wahr.

(B) falsch.

(ii) **[2 pkt]** Wenn $(d_k)_{k\geq 1}$ beschränkt ist, muss mindestens eine der Folgen $(a_k)_{k\geq 1}$, $(b_k)_{k\geq 1}$ und $(c_k)_{k\geq 1}$ beschränkt sein.

(A) wahr.

(B) falsch.

1.MC1 [1 Punkt] Sei (a_n) eine reelle Folge. Was ist die konkrete Bedeutung der folgenden Aussage?

FS23

$$\forall T \geq 1, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, a_n < -T.$$

(A) $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

(B) $\lim_{n\to+\infty} a_n$ existiert nicht.

(C) $\lim_{n\to+\infty} a_n > 0$.

(D) $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$.

FS23

1.MC2 [1 Punkt] Sei (a_n) eine reelle Folge. Welche mathematische Aussage bedeutet, dass (a_n) das Cauchy-Kriterium erfüllt?

(A) $\exists \varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, \forall m \geq N, |a_n - a_m| < \varepsilon$.

(B) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, \exists m \geq N, |a_n - a_m| < \varepsilon$.

(C) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, \forall m \geq N, |a_n - a_m| < \varepsilon$.

(D) $\forall \varepsilon > 0, \forall N \geq 1, \forall n \geq N, \forall m \geq N, |a_n - a_m| > \varepsilon$.

1.MC5 [1 Punkt] Sei (a_n) eine Folge von positiven reellen Zahlen, die das Cauchy-Kriterium erfüllt. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

FS23

(A) Die Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n$ ist konvergent.

(B) Die Folge (a_n) konvergiert gegen 0.

(C) Die Folge $(1/a_n)$ ist beschränkt.

(D) Die Folge (a_n) hat eine konvergente Teilfolge.

A.1.2 (PVW Hands-on 2)

Sei $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ mit: $a_1 = \sqrt{6}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$ $(\forall n > 1)$

Untersuche Folge auf Konv. und bestimme Grenzwert (falls existiert)

Lösungen: Übungsaufgaben Folgen

A1.1.a)

(a) Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ist die Aussage $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ äquivalent zu

- ☑ $\forall\, K \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall\, n \geq N:\ a_n \leq -K$.
- ☐ $\forall\, \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall\, n \geq N:\ |a_n| < \epsilon$.
- ☐ $\forall\, N \in \mathbb{N}\ \exists K \in \mathbb{N}$, so dass $\forall\, n \geq N:\ a_n \leq -K$.
- ☐ $\forall\, N \in \mathbb{N}\ \exists \epsilon > 0$, so dass $\forall\, n \geq N:\ |a_n| < \epsilon$.

(e) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Antwortmöglichkeiten sind korrekt?

- ☐ Wenn $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, dann ist auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. ← $a_n = 0,\ b_n = n$
- ☑ Wenn $0 \leq b_n \leq a_n^3$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_n \to 0$ für $n \to \infty$, dann konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ← $a_n \to 0 \Rightarrow a_n^3 \to 0$ mit Vergleichssatz folgt $b_n \to 0$
- ☐ Wenn $|a_n - b_n| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann konvergieren beide Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ← $a_n, b_n = n \Rightarrow n - n = 0$ aber a_n, b_n div!!
- ☐ Wenn $(b_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ← $(-1)^n$ konv. nicht

(d) Es gilt $x_n \to x_0$ genau dann wenn,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \geq 1,\ \forall n \geq N,\ |x_n - x_0| < \varepsilon.$$

Wahr ☑ Falsch ☐

Per Defn.

(d) Seien $(a_k)_{k\geq1}, (b_k)_{k\geq1}$ und $(c_k)_{k\geq1}$ drei Folgen. Sei $(d_k)_{k\geq1}$ definiert durch

$$d_k = \frac{(a_k)^2 + \sin(b_k)}{1 + \exp(c_k)}.$$

Geben Sie für jede folgender Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist.

(i) **[2 pkt]** Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ absolut konvergieren, gilt $\lim_{k\to\infty} d_k = 0$.

(A) wahr.

(B) falsch.

Impliziert $\lim_{n\to\infty} a_k, b_k, c_k = 0$

also $\lim_{n\to\infty} d_n = \frac{0+0}{1+e^0} = 0$

(ii) **[2 pkt]** Wenn $(d_k)_{k\geq1}$ beschränkt ist, muss mindestens eine der Folgen $(a_k)_{k\geq1}$, $(b_k)_{k\geq1}$ und $(c_k)_{k\geq1}$ beschränkt sein.

(A) wahr.

(B) falsch.

← $a, b, c = k \Rightarrow$ dann dominiert e^k und d_k konvergiert, also ist d_k beschränkt

Solution: (A), (B).

FS23

1.MC1 [1 Punkt] Sei (a_n) eine reelle Folge. Was ist die konkrete Bedeutung der folgenden Aussage?

$$\forall T \geq 1, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, a_n < -T.$$

(A) $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

(B) $\lim_{n\to+\infty} a_n$ existiert nicht.

(C) $\lim_{n\to+\infty} a_n > 0$.

(D) $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$.

Lösung:

(A)

1.MC2 [1 Punkt] Sei (a_n) eine reelle Folge. Welche mathematische Aussage bedeutet, dass (a_n) das Cauchy-Kriterium erfüllt?

(A) $\exists \varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, \forall m \geq N, |a_n - a_m| < \varepsilon$.

(B) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, \exists m \geq N, |a_n - a_m| < \varepsilon$.

(C) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, \forall m \geq N, |a_n - a_m| < \varepsilon$.

(D) $\forall \varepsilon > 0, \forall N \geq 1, \forall n \geq N, \forall m \geq N, |a_n - a_m| > \varepsilon$.

Lösung:

(C)

1.MC5 [1 Punkt] Sei (a_n) eine Folge von positiven reellen Zahlen, die das Cauchy-Kriterium erfüllt. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

Cauchy heisst nur: Reihe konvergiert

(A) Die Reihe $\sum_{n\geq1} a_n$ ist konvergent. ← nein, $a_n = 1$ konv

(B) Die Folge (a_n) konvergiert gegen 0. ← nein, $a_n = 1$

(C) Die Folge $(1/a_n)$ ist beschränkt. ← $a_n = 1/n$ konv aber $1/a_n = n$ ist nicht beschränkt

(D) Die Folge (a_n) hat eine konvergente Teilfolge.

← a_n konv $\Rightarrow a_n$ beschr. $\Rightarrow \exists$ konv. Teilfolge Bolz. Weierstrass

Lösung:

(D)

A1.2. $a_1=\sqrt{6}$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n+6}$ $(\forall n\geq 1)$, konv? Falls ja, bestimme Grenzwert

Lös: Via Allgemeines rezept: Z: 1) Monoton wachsend (Induktion)

+ 2) Beschr. von oben (Induktion)

$\Rightarrow$ Konv.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$ um Grenzwert zu bestimmen

1) Monoton wachsend

IA: $a_1=\sqrt{6}\geq 0$, also $a_2=\sqrt{a_1+6}\geq\sqrt{0+6}=a_1$

IS: Wir nehmen als IH an $a_n\leq a_{n+1}$, so gilt

$$a_{n+2}=\sqrt{a_{n+1}+6}\overset{IH}{\geq}\sqrt{a_n+6}=a_{n+1}$$ qed

2) Nach oben beschränkt

Idee: Teleskopie: $\sqrt{6}\leq\sqrt{9}=3$

$\leq\sqrt{a_n+6}=\sqrt{3+6}=3$

Idee: obere Schranke bei 3

IA: $a_1=\sqrt{6}\leq\sqrt{6+3}=3$ ✓

IS: Wir nehmen als IH an $a_n\leq 3$ (für beliebiges aber fixiertes $n\geq 1$)

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n+6}\leq\sqrt{3+6}=3$$ qed

Wegen Punkten 1 und 2 folgt nach Weierstrass (Monoton-Konvergenzsatz) dass (a_n) konv., d.h. $\exists a\in\mathbb{R}$. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$

$\Leftrightarrow$ $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} a_n+6}=\sqrt{a+6}$

$\Rightarrow$ $a^2-a-6=0$ $\Leftrightarrow$ $(a+2)(a-3)=0$ $\Rightarrow$ $a_1=-2$, $a_2=3$

da aber $a\geq 0$ $(\forall n\geq 1)$ entfällt a_1, also ist der Grenzwert $a=3$

Ana1 PVW Tag 1: Folgen und Reihen

1.3.1 Reihen Definition

(Defn. Partialsumme)

Für eine gegebene Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ können wir eine neue Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ definieren durch die Summation der ersten n Glieder von (a_n):

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

bspw. $S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$\ldots$

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

Wir bezeichnen S_n als Partialsumme von (a_n).

der unendlichen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

(Defn. Reihe)

Ist die Folge S_n der Partialsummen von (a_n) konvergent, so heisst der Limes S, Reihe der Folge a_n. Man schreibt:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

1.3.2. Reihen Konvergenzdefinition

(Bemerkung: Konvergenz von Reihen)

- Da wir eine Reihe durch die Konvergenz von (Partialsummen-) Folgen definiert haben, ist es die gleiche Konvergenzdefinition.
- Konvergenzkriterien: Oftmals mühsam Konvergenz per Defn. zu berechnen
  $\Rightarrow$ interessiert uns nur ob die Reihe konvergiert (nicht welcher Wert)
  können wir einen der Konvergenzkriterien benutzen

(Konvergenzbeweis mittels Definition)

- Man sucht nach einer (expliziten Form) für die Partialsumme S_n und bildet den Grenzwert

Bsp 4.4.1: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

Lsg: Offenbar gilt $a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1+k-k}{k(k+1)} = \frac{(1+k)}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

Teleskopieren ergibt: $S_1 = a_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Bilden wir also den Grenzwert folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \Bigg(1 - \underbrace{\boxed{\frac{1}{n+1}}}_{\to 0}\Bigg) = 1$$

d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ ist konvergent mit Wert 1.

(Satz Summenregel für Reihen)

Seien $\Sigma_k a_k$, $\Sigma_k b_k$ konvergente Reihen, so gilt das auch die folgenden Reihen konvergent sind, es gilt:

i) $\Sigma_k a_k + b_k = \Sigma_k a_k + \Sigma_k b_k$

ii) $\Sigma_k a_k - b_k = \Sigma_k a_k - \Sigma_k b_k$

iii) $\Sigma_k A \cdot a_k = A \cdot \Sigma_k a_k$ (mit $A \in \mathbb{C}$)

(Satz Cauchy Kriterium für Reihen)

Die Reihe $\sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergiert, genau dann wenn $\forall \varepsilon > 0.\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}.\ \forall m \geq n \geq N \ \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$

1.3.3 Absolute Konvergenz

(Definition, Absolute Konvergenz)

Die Reihe $\sum_k a_k$ heisst absolut konvergent, falls

$$\sum_k |a_k|$$

konvergiert

(Satz Absolute Konvergenz)

Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent. Zudem gilt

$$\left|\sum_k a_k\right| \leq \sum_k |a_k|$$

Bem: Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz. Kann man also absolute Konvergenz einer Reihe nachweisen (was oft leichter ist) kann man direkt Konvergenz der Reihe folgern

Bem: Die Umkehrung des Satzes ist falsch (warum?), vgl. $\sum_n (-1)^n \cdot 1/n$ konv nach Leibniz, trotzdem ist die Reihe nicht absolut konvergent

1.3.4. Konvergenz Kriterium 1: Nullfolgenkriterium

(Definition, Nullfolgenkriterium)

Sei (a_n) eine Folge, so gilt

$$\lim_{k\to\infty} |a_k| \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergiert}$$

beziehungsweise äquivalent

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} |a_k| = 0$$

d.h. wenn die Reihe $\sum_k a_k$ konvergiert, so müssen die Glieder eine Nullfolge bilden, bzw. umgekehrt, wenn $\lim_{k\to} |a_k|$ nicht Null ist kann $\sum_k a_k$ nicht konv.

Bem: • Das Kriterium ist hinreichend (d.h. wenn eine Reihe konv. muss es erfüllt sein) aber nicht notwendig (d.h. es existieren divergente Reihen die eine Nullfolge als Glieder haben, vgl. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$)

Bsp 5.1.1. Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{1/k}$

Lös: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{1/k}$ divergiert da $|a_k| = k^{1/k}$ für $\lim_{k\to\infty} |a_k| = 1 \neq 0$

1.3.5 Konvergenz Kriterium 2: Majoranten-, Minorantenkriterium

(Satz Majoranten- und Minorantenkriterium, Vergleichssatz Korollar 2.7.7)

Es sei $0 \leq a_k, b_k$ mit $a_k \leq b_k$ ab einem K, dann gilt:

i) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert (Majorantenkriterium)

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergiert (Minorantenkriterium)

Bem: Schätze die Folge (a_n) für das Majorantenkriterium nach oben durch (b_n) ab und zeige, dass die Majorante konvergiert $\sum_k b_k$ ist, woraus folgt dass $\sum_k a_k$ konv. ist (analog für das Minorantenkriterium)

Bem: Offenbar braucht $a_k \leq b_k$ erst ab einem $K \in \mathbb{N}$ zu gelten, falls dies also für endlich viele $k \leq K$ nicht gilt können wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \underbrace{\boxed{\sum_{k=1}^{K-1} a_k}}_{\text{als endliche Summe nicht relevant für konv.}} + \underbrace{\boxed{\sum_{k=K}^{\infty} a_k}}_{\text{Verwende Majoranten-/ Minorantenkriterium}}$$

aufteilen

Bem: Zwei wichtige Reihen für das Vergleichskriterium

i) Geometrische Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergent gdw $|q| < 1$

ii) (Riemmansche) Zeta Funktion: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ konvergent gdw $s > 1$

Bsp: Z: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert

Bew: Sei $a_k = \frac{1}{k^2}$, $b_k = \frac{1}{k(k-1)}$, dann gilt $0 \leq a_k \leq b_k$ für alle $k \geq K = 2$

Wir zeigen (analog zum Bsp 4.4.1.) das $\sum_k \frac{1}{k(k-1)}$ konvergiert mittels Definition

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} b_k = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)}_{\text{vgl. Term oben}} = 1 - \frac{1}{n}$$

also $$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$$

da die Majorante b_k konvergiert, gilt nach dem Satz das $a_k = \frac{1}{k^2}$ konvergiert.

Bem: Wir hätten auch direkt darauf schliessen können, das $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert. (warum?) $\Rightarrow$ Riemannsche Zetafkt, $s=2$

Bsp 4.4.4: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)}$ konvergiert

Lös: Sei $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)}$ und $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}\,k}$, offenbar gilt $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k}$

es gilt also $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}\,k} = \frac{1}{k^{3/2}}$, also ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ eine Majorante, die wegen Riemann mit $s = 3/2 > 1$ konvergiert, von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)}$ also konv. nach dem Majoranten/Minorantenkriterium auch $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}$.

Bsp 4.4.5: Konvergiert oder Divergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k+1}{3^k+1}$

Lös: offenbar gilt $3^k + 1 \geq 3^k$, also

$$\frac{2^k+1}{3^k+1} \leq \frac{2^k+1}{3^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k + \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

offenbar konv. die Majorante $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k + \left(\frac{1}{3}\right)^k$ als Summe zweier geom. Reihen mit $q_1 = 2/3$, $q_2 = 1/3$, womit auch die Minorante $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^k+1}{3^k+1}$ konv ist.

(Aufgaben: Majoranten/ Minorantenkriterium + Absolute Konvergenz)

Bsp 5.1.2. Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2k}{3k+42}\right)^k$

Lös: Betrachten wir den Absolutbetrag der Reihe erhalten wir die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2k}{3k+42}\right)^k$$

es gilt offenbar $\frac{2k}{3k+42} \leq \frac{2k}{3k} \leq \frac{2}{3}$

damit konvergiert der absolut Betrag der Reihe da die Majorante als Geometrische Reihe mit $q = 2/3 < 1$ konvergiert. nach Satz 2.7.10 über absolute Konvergenz konvergiert also auch die ursprüngliche Reihe

Bsp 5.1.3. Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k!}$

Lös: offenbar wechselt das VZ permanent wegen $\sin k$, da $|\sin k| \leq 1$ ist $\sum_k \frac{1}{k!}$ eine Majorante der Absolutbetragsreihe, die Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium (siehe Bsp. später), damit also auch die ursprüngliche Reihe.

1.3.6. Konvergenz Kriterium 3: Leibnizkriterium

(Satz, Leibniz)

Sei eine alternierende Reihe $\sum_k (-1)^k a_k$ gegeben, falls

i) $a_k \geq 0$ ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ iii) $a_{k+1} \leq a_k$ (monoton fallend)

gilt so konvergiert die Reihe $\sum_k (-1)^k a_k$

Bem · Wenn wir die Konvergenz einer Majoranten einer Absolutreihe zeigen wollen aber bestenfalls auf $|(-1)^k a_k| \leq b_k = 1/n$ kommen, dann haben wir durch das eliminieren des $(-1)^k$ Terms zu groß abgeschätzt

(vgl. Harmon Reihe $\sum_k 1/k$ div. aber alternierende Harmon. Reihe $\sum_k (-1)^k 1/k$ konv.)

$\Rightarrow$ hier kann das Leibnizkriterium helfen

Bsp. 5.2.1 Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$

Lös: i) $a_k = \frac{1}{k} \geq 0$ ✓ ii) $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$ ✓, iii) $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k}$ ✓

damit folgt, dass die alternierende harmon. Reihe nach dem Leibnizkriterium konv. ist.

Bsp 5.2.2. Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{k^2}$

Lös: Offenbar gilt $\cos(n\pi) = (-1)^n$, also haben wir $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k^2}$

i) $a_n = \frac{1}{n^2} \geq 0$ ✓ ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, iii) $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2+2n+1} \leq \frac{1}{k^2} = a_k$

nach dem Leibnizkrit. ist die Reihe also konv.

Bem: Man hätte konv. in diesem Fall auch schneller als mit dem Leibnizkrit zeigen können (warum? die Absolutbetragsreihe konv. als Riemann mit $s=2$)

1.3.7 Konvergenz Kriterium 4: Quotientenkriterium

(Satz, Quotientenkriterium)

Sei $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$, so gilt

i) $\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ konvergiert

ii) $\liminf_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ divergiert

Bem: · In der Vorlesung wurde das Kriterium mit limsup, liminf definiert, falls $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ konvergent ist, sind obige Aussagen äquivalent mit lim

· Kriterium eignet sich bei Polynomen, Exponentialtermen und Fakultäten in a_n

Bsp 5.3.1 Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Lös: $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{(n!)}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$

also konv. die Reihe nach dem Quot. krit.

Bsp. 5.3.2. Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

Lös: $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2 \, 2^n}{2^{n+1} \, n^2} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{n+1}{n} \right)^2}_{\to 1} = \frac{1}{2} < 1$

Bsp 5.3.3. Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$

QK: $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 > 1$, also divergiert die Folge

Bsp 5.3.4 Konv. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

QK: $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$

Bem: Was wenn $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$? Dann können wir i. Allg. keine Aussage machen und müssen die Konvergenz anders charakterisieren

1.3.8 Konvergenz Kriterium 5: Wurzelkriterium

[Satz, Wurzelkriterium]

Sei $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$, so gilt

i) $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ konvergiert

ii) $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ divergiert

Bem: · Kriterium eignet sich bei Gliedern mit Potenzen in Abhängigkeit von n

Bsp. 5.3.5 Konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n^{1/n} - 1)^n$

Lös: WK: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{n^{1/n}}_{\to 1} - 1 = 0 < 1$

also konv. die Reihe nach dem WK

Bsp 5.3.6. Konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2 + \frac{1}{n})^n$

WK: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} 2 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} = 2 > 1$,

also div. die Reihe nach dem WK

Ana1 PVW Tag 1: Folgen und Reihen

1.1. Supremum und Infimum

1.2. Folgen

1.3 Reihen

1.4 Potenzreihen

1.4.1 Definition

1.4.2 Konvergenzdefinition

1.4.1 Definition

(Definition, Potenzreihe)

Eine Potenzreihe ist gegeben als

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

mit z einer Variablen in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und c_k eine reelle oder komplexe Folge.

(Def. Exponentialfunktion)

Die Exponentialfunktion ist definiert durch ihre Potenzreihe, die gegeben ist als

$$e^z = \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

1.4.2 Konvergenzdefinition

(Defn. Konvergenzradius)

Offenbar hängt die Konvergenz der Reihe von der Wahl von z ab.

Die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ sodass $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ konvergiert, nennen wir Konvergenzradius. (Bspw. $\sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot x^k$, $x \in \mathbb{R}$ konv. $\Leftrightarrow |x| < 1$ nach geom. Reihe)

(Satz Konvergenzradius ρ)

Es gibt drei Möglichkeiten für eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

i) Für $z \neq 0$ divergiert $\sum_k c_k z^k$, wir sagen der Konvergenzradius ist $\rho = 0$

ii) Für alle $z \in \mathbb{R}$ (bzw. $z \in \mathbb{C}$) konvergiert $\sum_k c_k z^k$ absolut, wir sagen $\rho = \infty$ (bspw. $\exp(z)$)

iii) Es gibt ein $\rho \in (0, \infty)$, sodass

- $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ konv. absolut für $|z| < r$
- $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ divergiert für $|z| > r$
- Für $z = \rho$ hat man keine Aussage

(Satz, Bestimmung des Konvergenzradius ρ)

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ eine Potenzreihe, so gilt für den Konvergenzradius ρ

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Bem: Lässt sich c_k nicht direkt ablesen, gehe über ein passendes standard Konvergenzkriterium, es gilt bspw nach Wurzelkrit:

$$\sum \underbrace{c_n z^n}_{=a_n} \text{ konv. falls } \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |z| \cdot \limsup |c_n|^{1/n} \overset{!}{<} 1$$

$$\Leftrightarrow \quad |z| < \frac{1}{\limsup |c_n|^{1/n}}$$

Bsp. 5.4.1. Bestimme den Konvergenzradius ρ von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{k!}\right) \cdot z^k}_{c_k \cdot z^k}$, $z \in \mathbb{R}$

Lös: $\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$

also konv. die Potenzreihe $\forall z \in \mathbb{R}$

Bsp 5.4.2. Bestimme ρ von $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{a}{k}\right)^{k^2} z^n$, wobei $a \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{a}{n}\right)^n} = \frac{1}{e^a} = e^{-a}$$

also konv. die Potenzreihe $\forall z \in \mathbb{R}.\ |z| < e^{-a}$ und div. $\forall z \in \mathbb{R}.\ |z| > e^{-a}$

REIHEN HANDS-ON: AUFGABEN

- Siehe Website n.ethz.ch/~galkbe/pvw.html
- Hands-on 3

Aufgaben Reihen

A2.1: Untersuche $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(\log n)^n}$ auf Konvergenz

A.2.2. Betrachte die Folge (a_n) die induktiv durch

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \left(\frac{1}{n} + \sin(n)\right) a_n, \; n \geq 1$$

definiert ist. Untersuche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz

A.2.3 Welchen Wert hat

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\pi i}{3}\right)^n$$

A2.4. Untersuche folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

A.2.5 Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe. Untersuche

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3+\sin(a_n)}{4}\right)^n$$ auf Konvergenz

A2.6. (Hands-On Reihen PVW: a) – d))

Untersuche das Konvergenzverhalten folgender Reihen

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + (-1)^n}{2^n 3^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+2n+n^2+\sin(2n)}{n^3+1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^8+n^3-1}}$

d) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-k}$ (Berechne zusätzlich den Wert der Reihe)

A.2.7. (Hands-On PVW Potenzreihen)

Bestimme den Konvergenzbereich der folgenden Reihen

a) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n e^{2nx}$

Lösungen: Aufgaben Reihen

A2.1. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(\log n)^n}$ konv?

Lös: $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{n}{(\log n)^n}\right|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{n^{1/n}}{\log(n)} \overset{\lim_{n\to\infty} n^{1/n}=1}{=} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n)} = 0 < 1$

nach dem WK konv. die Reihe absolut

A2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, mit $a_1 = 2$ $\quad a_{n+1} = \frac{1+\sin(n)}{n} a_n$, $n \geq 1$, konv?

Lös: $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \limsup_{n\to\infty} \frac{|1+\sin(n)|}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0 < 1$

nach dem QK konv. die Reihe absolut

A.2.3. Wert von $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{3} i\right)^n}{n!}$

Lös: Erinnerung: $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. und Euler ($\mathbb{C}$): $e^{ix} = \exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi i}{3}\right)^n}{n!} = \exp\left(\frac{\pi i}{3}\right) \overset{\text{Euler}}{=} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

A2.4 $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right)$ konv.?

Lös: Achtung: teleskopreihe, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = (\log(1) - \log(2)) + (\log(2) - \log(3)) + (\log(3) - \log(4)) + \dots$$

also ist der Wert $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \log(1) - \log(n+1) = -\infty$

also divergiert die Reihe

A2.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3+\sin(a_n)}{4}\right)^n$, konv? (Annahme: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konv.)

Lös: Was folgt aus Annahme? $\sum_n a_n$ konv $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{|3+\sin(a_n)|^n}{|4|^n}\right)^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{3+\sin(a_n)}{4} = \frac{3 + \overset{\to 0}{\boxed{\limsup_{n\to\infty} |\sin(\overset{\to 0}{\boxed{a_n}})|}}}{4}$$

$= \frac{3}{4} < 0$

nach dem WK konv $\sum_n a_n$ absolut

A 2.6. a; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + (-1)^n}{2^n 3^n}$

Lös: $\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{|5^n + (-1)^n|}{6^n} \right)^{1/n} \overset{\Delta\text{-Ungl}}{\leq} \limsup_{n\to\infty} \frac{(5^n+1)^{1/n}}{6}$

$\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{(2 \cdot 5^n)^{1/n}}{6}$

$= \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2} \cdot 5}{6}$

$\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\sqrt[n]{n}}^{\to 1}\, 5}{6} = \frac{5}{6} < 1$

also konv. Reihe abs. nach WK

A. 2.6. b: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+2n+n^2+\sin(2n)}{n^3+1} := a_n$

Lös: Nullfolge offensichtlich mit $\frac{O(n^2)}{O(n^3)}$, sieht aber nach $O(\frac{1}{n})$ aus also versuche $O(1/n)$ Minorante zu finden

$$a_n \geq \frac{2+2n+n^2-1}{n^3+1} = \frac{n^2+2n+1}{n^3+1} = \frac{\overbrace{(n+1)^2}^{\geq 1}}{\underbrace{n^3+1}_{\geq n+1}} \geq \frac{1}{n+1}$$

da $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \right) - 1$, div. die Reihe (da harmon. Reihe Minorante ist)

A 2.6. c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^8+n^3-1}} := a_n$

Lös: Nullfolge offensichtlich da $\frac{O(n^{1/2})}{O(n^{8/3})}$

es gilt $|a_n| = \frac{\overbrace{\sqrt{n+1}}^{\leq 2n}}{\sqrt[3]{n^8 + \underbrace{n^3-1}_{\geq 0}}} \leq \frac{(2n)^{1/2}}{n^{8/3}} = \sqrt{2} \cdot \frac{n^{3/6}}{n^{16/6}} = \frac{\sqrt{2}}{n^{13/6}}$

also konv. Reihe da die Majorante der Absolutreihe als Riemannsch

A2.6. d) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-k}$

Lös: Es gilt: $a_k = \frac{1}{k^2-k} = \frac{1+k-k}{k(k-1)} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

d.h. $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

$= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$

$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \left(1 + \boxed{\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}}\right) - \left(\boxed{\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}} + \frac{1}{n}\right)$

$= 1 - \frac{1}{n}$

d.h. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-k} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$

also konv. die Reihe mit Grenzwert 1

A2.7. a. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n e^{2nx}$

Lös: Bem: c_k lässt sich nicht direkt ablesen, gehe über Wurzelkrit

$\sqrt[n]{\|a_n\|} = 2 \cdot e^{2x} \overset{!}{<} 1$

$\Leftrightarrow \quad e^{2x} < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad 2x < \underbrace{\boxed{\ln(1)}}_{=0} - \ln(2)$

$\Leftrightarrow \quad x < -\ln(2)/2$

Untersuche den Rand, d.h. $x = -\frac{\ln(2)}{2}$ seperat:

$2^n \cdot e^{2n\left(-\frac{\ln(2)}{2}\right)} = 2^n e^{-n\ln(2)} = 2^n \cdot 2^{-n} = 1$

und $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ divergiert offenbar, also konv die Potenzreihe auf $\rho = -\ln(2)/2$