Ana1 PVW Tag 2: Stetigkeit

Ana1 PVW Tag 2: Stetigkeit

2.1. Funktions Grenzwerte

2.1.1 Definition Grenzwert

2.1.2. Rechnen mit Grenzwerten

2.1.3. Sandwich Theorem

2.1.4. Wurzeltrick

2.1.5. Variablenwechsel

2.1.6. Fundamentallimites

2.1.7. L'hôspital

2.2. Funktions Stetigkeit

2.3. Funktionsfolgen Stetigkeit

2.1.1 Definition Grenzwert

(Einführung in Grenzwerte)

Bisher haben wir Grenzwerte von Folgen (a_n) für $n \to \infty$ gesehen

Nun betrachten wir für eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ das Verhalten von f

für $x \to x_0$

(Defn. Häufungspunkt)

Ein Häufungspunkt von $D \subset \mathbb{R}$ ist ein Punkt x_0, sodass alle

offenen Intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, (für $\delta > 0$) mindestens einen von x_0 verschiedenen Punkt

$y \in D$ enthalten.

$$\forall \delta > 0. \quad (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \cap D \neq \emptyset$$

Bsp. Ist $x_0 = 0$ ein Häufungspunkt in $D = [0,1)$

Lös: Ja, denn alle offenen Intervalle $(0-\delta, 0+\delta)$ schneiden $D = [0,1)$

Bsp. Ist $x_0 = 2$ ein Häufungspunkt von $D = \{2\} \cup (5,7)$

Lös: Nein, denn $(2-0.1, 2+0.1)$ mit $\delta = 0.1$ enthält kein Punkt y, sodass $y \in D$ wäre.

(Definition Grenzwert)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$, x_0 ein Häufungspunkt von D. So ist $A \in \mathbb{R}$

der Grenzwert von f an der Stelle x_0, man schreibt

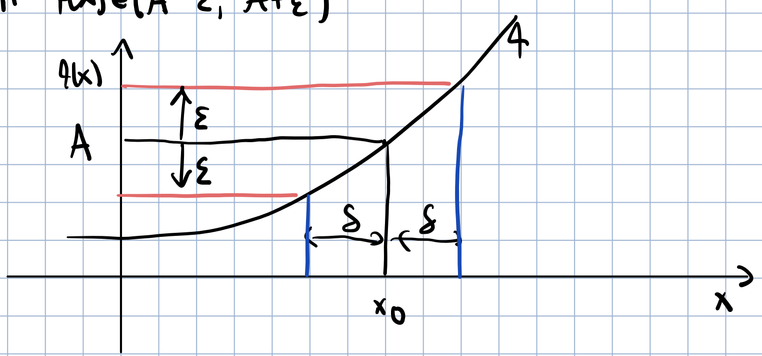
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

falls

$$\forall \varepsilon > 0. \ \exists \delta > 0. \ \forall x \in D \setminus \{x_0\}. \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

d.h. für beliebig kleines $\varepsilon > 0$, existiert ein $\delta(\varepsilon)$, sodass für $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

gilt $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$



Bsp: Beweise mittels Definition $\lim_{x\to 1}(4x-2)=2$, $f(x)=3x-2$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Lös: Es gilt zu zeigen: $\forall \varepsilon>0.\ \exists\delta>0.\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}.\ |x-1|<\delta \Rightarrow |(4x-2)-2|<\varepsilon$

Sei ε beliebig, nun versuchen wir ein δ zu finden, sodass gilt:

$$|(4x-2)-2| \overset{!}{<} \varepsilon$$

$$\Rightarrow 4|x-1|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon<4|x-1|<\varepsilon$$

D.h. entweder $4(x-1)<\varepsilon \Rightarrow x<1+\frac{\varepsilon}{4}$

oder $-\varepsilon<4(x-1) \Rightarrow 1-\frac{\varepsilon}{4}<x$

somit gilt für alle x mit $1-\frac{\varepsilon}{4}<x<1+\frac{\varepsilon}{4}$, das $|f(x)-2|<\varepsilon$.

D.h. mit $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$ gilt

$$|x-1|<\delta \Rightarrow |f(x)-2|<\varepsilon$$

die Definition von $\lim_{x\to 1}(4x-2)=2$

(Definition: Linksseitiger und Rechtsseitiger Grenzwert)

Sei $D\subset\mathbb{R}$, $f:D\to\mathbb{R}$, x_0 ein Häufungspunkt von D, so gilt

1) f hat an der Stelle x_0 den linksseitigen Grenzwert $L\in\mathbb{R}$, man schreibt

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L$$

falls gilt

$$\forall\varepsilon>0.\ \exists\delta>0.\ \forall x\in D.\ x\in(x_0-\delta,x_0) \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

2) f hat an der Stelle x_0 den rechtsseitigen Grenzwert $R\in\mathbb{R}$, man schreibt

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=R$$

falls gilt

$$\forall\varepsilon>0.\ \exists\delta>0.\ \forall x\in D.\ x\in(x_0,x_0+\delta) \Rightarrow |f(x)-R|<\varepsilon$$

(Bmk./ Korollar, Äquivalenz)

Sei $D\subset\mathbb{R}$, $f:D\to\mathbb{R}$, x_0 ein Häufungspunkt in D, so gilt

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)=L=A=R=\lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

2.1.2. Rechnen mit Grenzwerten

(Definition: Rechenregeln Grenzwerte)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f,g: D \to \mathbb{R}$, und $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ so gilt

i) $\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = A \pm B$

ii) $\lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = A \cdot B$

iii) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{A}{B}$, falls $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$

Bsp 9.3.1: $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

Lös: Problem: Nenner für $x=1$ gleich 0, umformen löst das Problem

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

Bem: Wir werden später Stetigkeit definieren als $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Wir werden auch sehen, dass alle Polynome stetig sind:
daher können wir bei $\lim_{x\to 1} (x+1)$ direkt 2 folgern und müssen hier keinen ε-δ Beweis machen

(Anmerkung: Problematische Situationen)

- Obige Regeln darf man nur anwenden, sollten beide Grenzwerte existieren.
- D.h. wir können mit obigem Kriterium keine Aussagen für Fälle wie "$\frac{0}{0}$", "$\frac{\infty}{\infty}$", "$\infty - \infty$", "1^∞", "∞^0", "0^0", "$0 \cdot \infty$" treffen, dafür brauchen wir weitere/andere Kriterien (Sandwich, L'hôpital etc.)

(Defn. Dominanz)

Dominanz bei Grenzwerten sollte aus AnD bekannt sein, d.h.

für $D \subset \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$, x_0 ein Häufungspunkt, $\lim_{x \to x_0} f, g = +\infty$, gilt

f dominiert g falls: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ alternativ $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

Sollte gelten

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0 \quad , A \in \mathbb{R}$$

so sind f, g von derselben Ordnung

Bem: Aus AnD sollte bekannt sein, $x \to +\infty$, $a \in \mathbb{R}$

i) $\log(x) \ll x^a \ll e^x$

ii) $a^x \ll x!$

iii) $x! \ll x^x$

Bsp 9.3.2: $\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2 + 2x - 42}{7x^3 + \sqrt{x}}$

Lös: $\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2 + 2x - 42}{7x^3 + \sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2}{7x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{5}{7x} = 0$

2.1.3. Sandwich Theorem

(Defn. Sandwich Theorem)

Falls $g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$ mit $\lim\limits_{x\to x_0} g_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g_2(x) = A$, so gilt
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

Bsp 9.3.3: $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Lös: Es geht nicht $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, da $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ nicht existiert.

Stattdessen gilt aber $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$, also $-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq x^2$ und
$\lim_{x\to 0} -x^2 = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$. also $\lim_{x\to 0} x^2 \sin(1/x) = 0$

Bsp 9.3.4: $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\, e^{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$

Lös: Da $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$ gilt: $\sqrt{x}\, e^{-1} \leq \sqrt{x}\, e^{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} \leq \sqrt{x}\, e$
da $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\, e^{-1} = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\, e = 0$ gilt $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\, e^{\sin(1/x)} = 0$

Bsp 9.3.5: $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{5x + 2\sin(x)}{3x+2}$

Lös: $-2 \leq 2\sin(x) \leq 2$, also $5x - 2 \leq 5x + 2\sin(x) \leq 5x + 2$

$$\Rightarrow \frac{5x-2}{3x+2} \leq \frac{5x+2\sin(x)}{3x+2} \leq \frac{5x+2}{3x+2}$$

Dann

$$\Rightarrow \lim_{x\to +\infty} \frac{5x-2}{3x+2} = \lim_{x\to \infty} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3} = \lim_{x\to \infty} \frac{5x+2}{3x+2}$$

also auch $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{5x+2\sin(x)}{3x+2} = 5/3$ nach Sandwich Theorem

2.1.4. Wurzeltrick

(Defn. Wurzeltrick)

Direkte Anwendung der dritten Binomischen Formel: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

Bsp 9.3.6: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

Problem: "$\infty-\infty$"

Lös: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\cdot\underbrace{\boxed{\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}}}_{=1}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$$

Bsp 9.3.7: $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

Lös: Problem, Grenzwert wäre "$\frac{0}{0}$", umformen:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\cdot\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

Bsp 9.3.8 (HS21): $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x+1}-x$

Problem: "$\infty-\infty$"

Lös: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-x\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2+3x+1}+x}{\sqrt{x^2+3x+1}+x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+3x+1)-x^2}{\sqrt{x^2+3x+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{x+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$$

2.1.5. Variablenwechsel

(Defn. Variablenwechsel)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f, g: D \to \mathbb{R}$, f stetig in y_0, g stetig in x_0 wobei

$y_0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$, dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{y \to y_0} f(y)$$

Bsp 9.3.9 : $\lim_{x \to 0^+} x \ln(x)$

Lös:
1. Bestimme Substitution: $y = g(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$
2. überprüfe Grenzwert bei x_0: $y_0 = \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x} = +\infty$
3. Substituiere: $x \ln(x) = \left(\frac{1}{y}\right) \ln\left(\frac{1}{y}\right)$
4. Bestimme Grenzwert: $\lim_{x \to x_0} x \ln(x) = \lim_{y \to y_0} \left(\frac{1}{y}\right) \ln\left(\frac{1}{y}\right)$

   konkret hier: $\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = \lim_{y \to +\infty} \frac{-\ln(y)}{y} = 0$

   Dominanz.

Achtung: wir bestimmen nur $g(x) = y$, $f(y)$ wird induziert bei der substitution (hier bspw. $f(y) = \left(\frac{1}{y}\right) \ln\left(\frac{1}{y}\right)$), insb. ist f nicht der urspr. Term!

2.1.6. Fundamentallimites

(Fundamentallimites Exp)

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, also

$$\lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{1}{h(x)}\right)^{h(x)} = e \qquad \text{alternativ} \qquad \lim_{x\to x_0}\left(1+h(x)\right)^{\frac{1}{h(x)}} = e$$

für $x\to x_0$ muss $h(x)\to\infty$ | für $x\to x_0$ muss $h(x)\to 0$

Bsp.: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x}$

Lös:
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{\frac{3}{x}\cdot 2x}$$

offenbar gilt für $x\to\infty$

$$y=\frac{x}{3}\to\infty$$

insgesamt

$$\lim_{x\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)}\right)^{\frac{x}{3}}}_{\to e}\right]^{\frac{3}{x}\cdot 2x} = e^{\frac{3}{x}\cdot 2x} = e^6$$

Bsp (FS18): Bestimme $\lim\limits_{t\to 0}\left(1+2\sin(t)\right)^{1/\sin(t)}$

Lös:
$$\lim_{t\to 0}\left(1+2\sin(t)\right)^{\frac{1}{\sin(t)}} = \lim_{t\to 0}\left(1+\frac{2}{\left(\frac{1}{\sin(t)}\right)}\right)^{\frac{1}{\sin(t)}}$$
$$= \lim_{t\to 0}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{(2\sin(t))}}\right)^{\frac{1}{2\sin(t)}}\right]^2 = e^2$$

da für $t\to 0$

$$h(t)=\frac{1}{2\sin(t)}\to +\infty$$

Bsp (HS19): Bestimme $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1 + n\pi}{n\pi} \right)^n$

Lös: $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1 + n\pi}{n\pi} \right)^n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n\pi} \right)^n$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\underbrace{\boxed{\left(1 + \frac{1}{n\pi}\right)^{n\pi}}}_{\to e} \right)^{\frac{1}{\pi}}$$

$$= e^{\frac{1}{\pi}} = e^{-\pi} \text{, da für } n \to n_0 = \infty$$

$h(n) = n\pi \to \infty$

(Fundamentallimes Sinus)

Es gilt $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, also

$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin(h(x))}{h(x)} = 1$

für $x \to x_0$

muss $h(x) \to 0$

Bsp: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)}$

Lös: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \cdot \frac{3x}{3x} \cdot \frac{4x}{4x}$

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\boxed{\frac{\sin(3x)}{3x}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{1}{\underbrace{\boxed{\left(\frac{\sin(4x)}{4x}\right)}}_{\to 1}}}}_{\to 1} \cdot \frac{3x}{4x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}$$

2.1.7. L'hôspital

(Satz L'hospital, Skript 4.2.10)

Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar $(g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b))$, falls

$$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = +\infty$$

so gilt

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls der Grenzwert existiert (d.h. $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$ existiert)

Bem: Im Skript ist nur der Fall $\lim_{x\to b} f(x), g(x) = 0$ definiert, der Fall $\lim_{x\to b} f(x), g(x) = +\infty$ folgt daraus direkt (Reziprokes der Funktion)

Bsp: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1}{x}$

Lös: Form " $\frac{0}{0}$ ", nach l'hop gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\overset{\to 1}{\boxed{e^{-x}}}}{1} = -1$$

Bsp: $x \to \frac{\pi}{2}$ $\frac{x\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$

Lös: Form " $\frac{0}{0}$ ", nach l'hop gilt

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{x\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1 \cdot \overset{\to 0}{\boxed{\cos(x)}} + x \cdot \overset{\to -1}{\boxed{(-\sin(x))}}}{1} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} -x = -\frac{\pi}{2}$$

Bsp: $\lim_{x\to 0^+} x \cdot \log(x)$ [Vgl. Beispiel bei Substitution]

Lös: Problem: " $0 \cdot \infty$ ", können aber nur " $\frac{0}{0}$ " oder " $\frac{\infty}{\infty}$ " berechnen, stelle um:

$$\underset{\text{"}0\cdot\infty\text{"}}{\lim_{x\to 0^+} x\log(x)} = \lim_{x\to 0^+} \underset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\frac{\log(x)}{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

Bsp: (FS18): $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin(\sqrt{1+t}-1)}{t}$

Lös: Form "$\frac{0}{0}$", nach l'hop

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(\sqrt{1+t}-1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos(\sqrt{1+t}-1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+t}}}{1}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cos(\sqrt{1+t}-1)}{2\sqrt{1+t}} = \frac{\overbrace{\boxed{\cos(0)}}^{=1}}{2} = \frac{1}{2}$$

Bsp: (FS18): $\lim\limits_{t\to 0} \frac{a^t-1}{b^t-1}$, $a,b>0$ konstant

Lös: Form "$\frac{0}{0}$", nach l'hop gilt

$$\lim_{t\to 0} \frac{a^t-1}{b^t-1} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{t\cdot\log(a)}-1}{e^{t\log(b)}-1} = \lim_{t\to 0} \frac{\log(a)\cdot\overbrace{\boxed{e^{t\log(a)}}}^{\to 1}}{\log(b)\cdot\underbrace{\boxed{e^{t\log(b)}}}_{\to 1}}$$

$$= \frac{\log(a)}{\log(b)}$$

Bsp: (HS18): $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$

Lös: Form "$\frac{0}{0}$", l'hôp

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} \overset{\text{l'hop}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2x} \overset{\text{l'hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\boxed{-\cos(x)}}^{\to -1}}{2} = -\frac{1}{2}$$

GRENZWERTE HANDS-ON: AUFGABEN

Hands-On 3: 3.1. a), b), d), e)

3.1a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\tan(x))^{(x-\frac{\pi}{2})^2}$

3.1b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \log\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$

3.1d) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}$

3.1.e) $\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} 2x^2 \sin\left(\frac{\log(x)}{x^2}\right)}{\log(x)}$

Lösungen Hands-On 3

3.1 a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\tan(x))(x-\frac{\pi}{2})^2$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Lös: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\tan(x))(x-\frac{\pi}{2})^2 = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\,(x-\frac{\pi}{2})^2}{\cos(x)} \quad (\text{"}\frac{0}{0}\text{"})$

$\overset{\text{l'hôp}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)\underbrace{(x-\frac{\pi}{2})^2}_{\to 0} + 2\sin(x)\underbrace{(x-\frac{\pi}{2})}_{\to 0}}{\underbrace{-\sin(x)}_{\to 1}} = 0$

3.1 b) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\log\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$

Lös: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\log\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}{x}$

Überprüfe ob $\log\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$ gegen 0 strebt

$\lim_{x\to 0} \log\left(\frac{e^x-1}{x}\right) \underset{\text{log stetig}}{=} \log\left(\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}\right) \quad (\text{"}\frac{0}{0}\text{"})$

$\overset{\text{l'hôp}}{=} \log\left(\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{e^x}{1}}_{\to 1}\right) = \log(1) = 0$

Also ist die Form "$\frac{0}{0}$" gegeben, wende l'hôp an

$\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}{x} \overset{\text{l'hop}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}\right) \cdot \frac{(e^x)\cdot x - (e^x-1)\cdot 1}{x^2}}{1}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}}{e^x-1} \cdot \frac{xe^x-(e^x-1)}{x^{\cancel{2}}}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{xe^x - e^x + 1}{(e^x-1)x} \quad (\text{"}\frac{0}{0}\text{"})$

$\overset{\text{l'hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + xe^x - e^x}{e^x\cdot x + (e^x-1)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{xe^x}{xe^x + e^x - 1} \quad (\text{"}\frac{0}{0}\text{"})$

$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + xe^x}{e^x + xe^x + e^x} = \frac{1+0}{1+0+1} = \frac{1}{2}$

3.1 d) $\lim_{x \to 0^+} (1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}$

Lös: Sei $h(x) = x^2$, so gilt $\lim_{x \to x_0} (1+h(x))^{\frac{1}{h(x)}}$ und $\lim_{x \to x_0} h(x) = 0$

also ist es der exp. Fundamentallimes: $\lim_{x \to 0^+} (1+x^2)^{\frac{1}{x^2}} = e$

3.1. e) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 \sin\left(\frac{\log(x)}{x^2}\right)}{\log(x)}$

Lös: $\lim_{x \to \infty} 2 \cdot \dfrac{\sin\left(\frac{\log(x)}{x^2}\right)}{\frac{\log(x)}{x^2}}$

Dominanz $\log(x) \ll x^2$

mit $h(x) = \frac{\log(x)}{x^2}$ gilt $\lim_{x \to \infty} h(x) \overset{\downarrow}{=} 0$, also können wir

Fundamentallimes $\lim_{x \to x_0} \frac{\sin(h(x))}{h(x)} = 1$ anwenden:

$$\lim_{x \to \infty} 2 \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\sin\left(\frac{\log(x)}{x^2}\right)}{\frac{\log(x)}{x^2}}}}_{\to 1} = 2$$

Ana1 PVW Tag 2: Stetigkeit

2.1. Funktions Grenzwerte

2.2. Funktions Stetigkeit

2.2.1. Definitionen von Stetigkeit

2.2.2 Rechenregeln

2.2.3 Zwischenwertsatz

2.2.4 Satz zur Umkehrabbildung

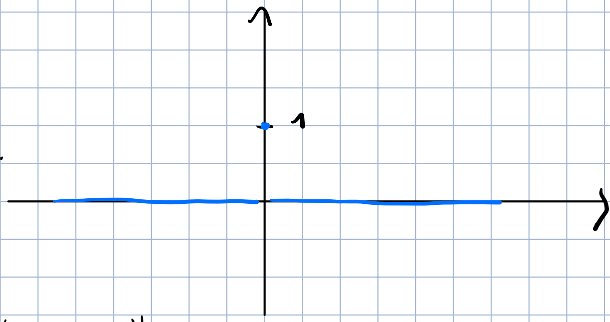
2.2.5 Min-Max Satz

2.3. Funktionsfolgen Stetigkeit

2.2.1. Definitionen von Stetigkeit

Motivation

Betrachte $f(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$ d.h.



Es gilt $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, da per Definition gelten muss

$$\forall \varepsilon > 0.\ \exists \delta > 0.\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.\ \underset{(x-x_0)}{|x-0|} < \delta \Rightarrow \underset{(f(x)-A)}{|f(x)-0|} < \varepsilon$$

aber für $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist $f(x)$ immer konstant 0, d.h. $|0-0| < \varepsilon$ ist immer wahr. Somit gilt also $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, obwohl $f(0) = 1$.

- Wir hätten gerne $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, wann gilt dies?

(Definition Stetigkeit)

Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, f ist stetig in x_0 falls gilt:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Bsp: Ist $f(x) = \begin{cases} 0 & , x=0 \\ x^2\cos(1/x), & x \neq 0 \end{cases}$ stetig?

Lös: Für $x \neq 0$ ist $f(x)$ als Komposition stetiger Funktionen stetig, lediglich $x_0 = 0$ muss seperat untersucht werden. Benutzen wir die Grenzwertregeln. bleibt zu zeigen: $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert und ist gleich $f(x_0)$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \underbrace{\boxed{x^2}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|}_{\in [-1,1]} = 0 = f(0), \text{ also ist } f \text{ stetig}$$

$\Rightarrow$ Sandwich Theorem

Bsp (FS19): Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ (-x)^{-x}, & x < 0 \end{cases}$, zeigen Sie das f stetig ist

Lös: $x^x = e^{x\log(x)}$ ist stetig für $x>0$, $(-x)^{(-x)} = e^{-x\log(-x)}$ ist stetig für $x<0$, bleibt $x_0 = 0$ zu überprüfen und zu zeigen $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(x_0) = f(0)$

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(x)} = 1 \quad \text{(wir wissen } \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 \text{ vgl. oben)}$$

da die Funktion gerade ist, gilt $\lim_{x\to 0^-} x^x = 1$, also damit $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ ged.

(Alternative Stetigkeits Definition: Folgenstetigkeit)

Sei $f: D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}$ eine Funktion, so sind die folgenden Kriterien äquivalent

1) $f: D\to\mathbb{R}$ ist an der Stelle x_0 stetig

2) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, d.h. mit Grenzwertdefinition falls gilt

$$\forall \varepsilon>0.\ \exists\, \delta(\varepsilon)>0.\ \forall x\in D\setminus\{x_0\}.\ |x-x_0|<\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

3) Für jede Folge in D mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$

Bem: Vorsicht bei 3): das muss für alle Folgen gelten (nicht nur eine)

Bsp: Beweise die Stetigkeit von $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2$

Damit f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist, sei x_0 beliebig aber fixiert. Sei (a_n) eine beliebige Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$. Bleibt zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n^2 = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = x_0\cdot x_0 = x_0^2 = f(x_0)$$

2.2.2 Rechenregeln

(Korollar: Eigenschaften von stetigen Funktionen)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, so gilt

i) $f+g$ ist stetig

ii) $f \cdot g$ ist stetig

iii) f/g ist stetig, falls $g \neq 0$

Bem: Obiges gilt auch für $f, g|_{x_0}$

Bem: Hat man $f: D \to \mathbb{R}$, $g: f(D) \to \mathbb{R}$, und sind f, g stetig so ist $g \circ f: D \to \mathbb{R}$ stetig

(Definition: Stetigkeit von Polynomen)

Mit den Rechenregeln für Stetigkeit folgt:

- Alle Polynome mit reellen Koeffizienten sind stetig
- Alle Quotienten von Polynomen sind stetig, solange der Nenner nicht verschwindet
- Jede Potenzreihe ist auf ihrem Konvergenzradius eine stetige Funktion, da $\rho = +\infty$ für exp, sin und cos sind diese Funktionen überall stetig

Bsp: Ist $\dfrac{\cos(x)+\sin(x)+x^5-2}{e^x+3} = f(x)$ stetig auf $D = \mathbb{R}$?

Lös: Als Komposition stetiger Funktionen (sin, exp), und da $e^x + 3 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (also nicht verschwindet) ist $f(x)$ stetig

Bsp: Zeige, dass $f(x) = \exp(\exp(x^3-2))$ auf $D = \mathbb{R}$ stetig ist

Die Funktion $x \mapsto (x^3-2)$ und $x \mapsto \exp(x)$ sind stetig in $D = \mathbb{R}$ (vgl. Skript, Polynom und exp-Fkt), so ist auch die Komposition dieser stetig

(Satz: Stetigkeit und Grenzwert)

Sei $D, E \subset \mathbb{R}$, $f: D \to E$, $g: E \to \mathbb{R}$, und $(g \circ f) = g(f(x)) : D \to \mathbb{R}$.

Falls $y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$, und g stetig in y_0 so gilt

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) = g(y_0)$$

Intuitiv: wir dürfen den Grenzwert "in stetige Funktionen ziehen"

Bsp: Bestimme $\lim_{x \to 1} \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right)$

Lös: $\lim_{x \to 1} \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) = \sin\left(\lim_{x \to 1} \frac{\pi}{2} x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Bsp: Bestimme $\lim_{x \to \infty} e^{\frac{3x^5 + 27\sqrt{x}}{8x^5}}$

Lös: Da die exp-Funktion stetig ist, gilt:

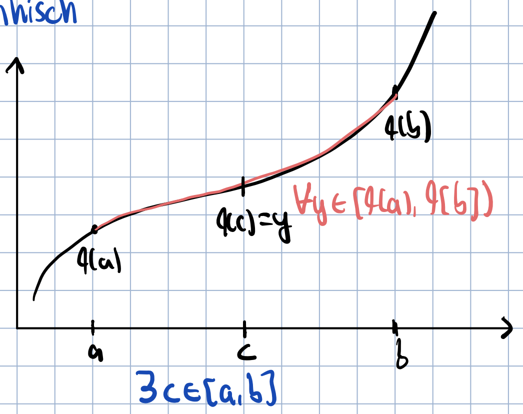
$$\lim_{x \to \infty} e^{\frac{3x^5 + 27\sqrt{x}}{8x^5}} = e^{\lim_{x \to \infty} \frac{3x^5 + 27\sqrt{x}}{8x^5}} \overset{\text{"Dom"}}{=} e^{\lim_{x \to \infty} \frac{3x^5}{8x^5}} = e^{3/8}$$

2.2.3 Zwischenwertsatz

(Zwischenwertsatz)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig. Für alle $a, b \in I$ mit $a < b$ und für alle $y \in [f(a), f(b)]$ gibt es mindestens ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = y$

Graphisch



Konkret: habt ihr eine stetige Funktion und wollt "von f(a) nach f(b), müsst ihr jeden Wert y zwischen $[f(a), f(b)]$ mindestens einmal angenommen haben: d.h. umgekehrt, dass es für diesen y ein $c \in [a,b]$ geben muss mit $y = f(c)$.

Bsp. 6.2.1 Beweise, dass $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$ eine Nullstelle in $[1,2]$ hat

Lös: f ist ein Polynom und als solches stetig, also dürfen wir den ZWS anwenden. Da gilt

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0 \quad \text{und} \quad f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$$

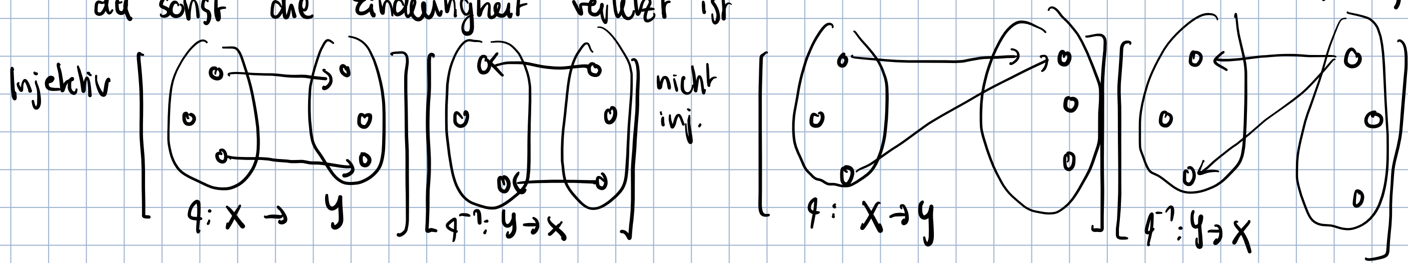
nach dem ZWS muss f alle Werte in $[f(1), f(2)] = [-1, 12]$ annehmen, also muss insb. ein $c \in [1,2]$ liegen, sodass $f(c) = 0 \in [-1, 12]$, unsere gesuchte Nullstelle

2.2.4 Satz zur Umkehrabbildung

(Satz Umkehrabbildung, Skript 3.5.3)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton (d.h. injektiv). Dann ist nach dem Zwischenwertsatz $f(I) = J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall sodass $f^{-1}: J \to I$ stetig und streng monoton ist.

Bem: Wir können nur dann eine Umkehrabbildung erstellen, wenn f injektiv ist, da sonst die Eindeutigkeit verletzt ist (nicht mehr wohldef.)

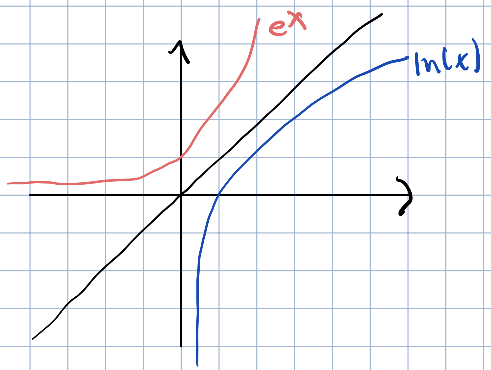


Bsp: Bilde Umkehrfunktion von $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty),\ x \mapsto e^x$

Lös: f ist i) stetig und ii) streng monoton wachsend $\left(\frac{\partial e^x}{\partial x} = e^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\right)$ also injektiv. Damit können wir die Umkehrabbildung bilden:

$$f(x) = y = e^x \Rightarrow \ln(y) = x$$

also ist $f^{-1}(x) = \ln(x)$ die Umkehrabb. mit $f^{-1}: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$



Bsp (FS21): Analysiere folgende Funktion f auf strenge Monotonie und bestimme falls möglich eine Inverse (gebe Defn. + Wertebereich von f^{-1} an)

$$f(x) = \ln(x-17) + 2,\ x \in (17, +\infty),\quad f: (17, +\infty) \to \mathbb{R}$$

Lös: f ist streng monoton wachsend da $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x-17} > 0\ \forall x \in (17, +\infty)$, also ist f injektiv und f ist stetig (ln + poly + const) also ex. eine Umkehrabb. Inverse f^{-1} gegeben als

$$f(x) = y = \ln(x-17) + 2 \Rightarrow y - 2 = \ln(x-17)$$
$$\Rightarrow e^{y-2} = x - 17$$
$$\Rightarrow e^{y-2} + 17 = x$$

gegeben als $f^{-1}(x) = e^{x-2} + 17$, $f^{-1}: \mathbb{R} \to (17, +\infty)$

2.2.5 Min-Max Satz

(Definition kompaktes Intervall, Skript 3.4.2)

Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist kompakt, falls es von der Form

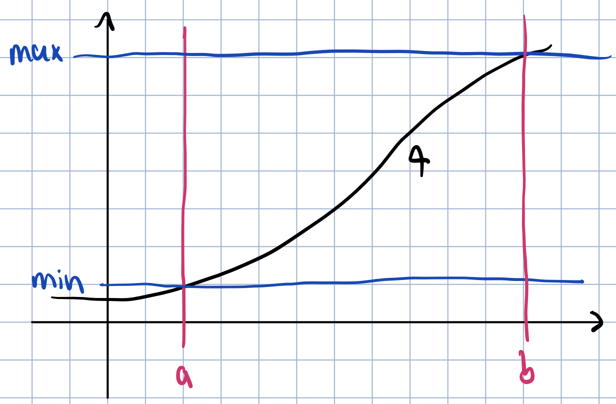
$$I = [a,b] \quad , \quad a \leq b$$

ist, d.h. abgeschlossen (enthält a und b) und beschränkt (liegt zwischen a,b) ist.

(Satz: Min-Max Satz, Skript 3.4.5)

Sei $a \leq b$ in $\mathbb{R}$ und $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt: stetige Funktionen nehmen auf kompakten Intervallen Minimum und Maximum an. Insbesondere ist f beschränkt.

Graphisch



Ana1 PVW Tag 2: Stetigkeit

2.1. Funktions Grenzwerte

2.2. Funktions Stetigkeit

2.3. Funktionsfolgen Stetigkeit

2.3.1. Definition Funktionsfolge

2.3.2. Punktweise Stetigkeit

2.3.3. Gleichmässige Stetigkeit

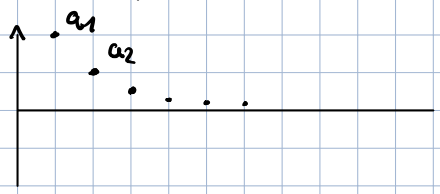
2.3.1. Definition Funktionsfolge

Einführung in Funktionenfolgen

Anstatt wie im vorherigen Kapitel Folgen von Zahlen (in $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C}$) zu betrachten wie

$(a_n)_{n\geq 1} = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

$(\frac{1}{n})_{n\geq 1} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$



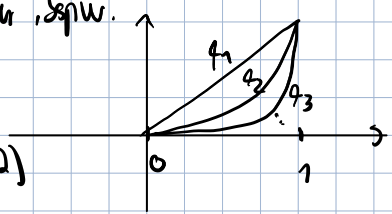
oder Folgen von Partialsummen

$(S_n)_{n\geq 1}, S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \ldots, S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots$

betrachten wir nun Funktionen als Folgenglieder, bspw.

$(f_n)_{n\geq 1} = f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$

$(x^n)_{n\geq 1} = x, x^2, \ldots, x^n, \ldots \quad (f: [0,1] \to \mathbb{R})$



(Definition Funktionenfolge)

Analog zur Definition einer Folge reeller Zahlen ist eine reellwertige Funktionenfolge eine Abbildung. Sei $D \subset \mathbb{R}$, so gilt

$$f_n: \mathbb{N} \to (D \times \mathbb{R})$$

$$f_n: n \mapsto f(n)$$

man schreibt ein Folgenglied als f_n (statt $f(n)$) und die gesamte Funktionenfolge als $(f_n)_{n\geq 0}$.

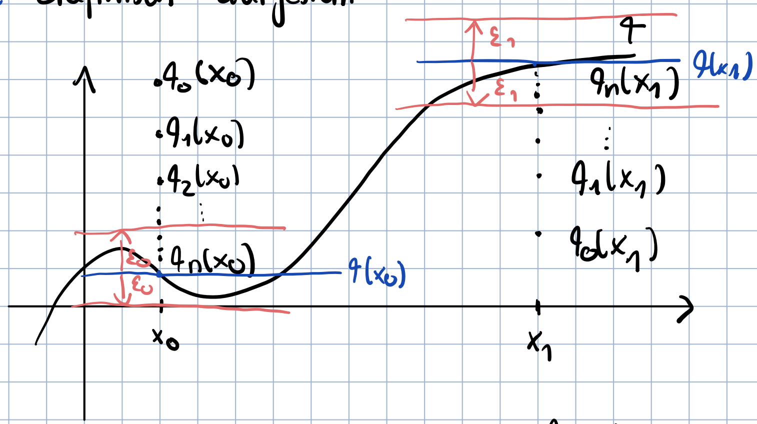
Bem: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ erhält man eine Folge reller Zahlen $(f_n(x))_{n\geq 0}$

(Defn. Punktweise Konvergenz, Skript 3.7.1)

Eine Folge Funktion $f_n : D \to \mathbb{R}$ konv. punktweise gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls:

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ alternativ $\forall x \in D.\ \forall \varepsilon > 0.\ \exists N(x,\varepsilon) \in \mathbb{N}.\ \forall n \geq N.\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

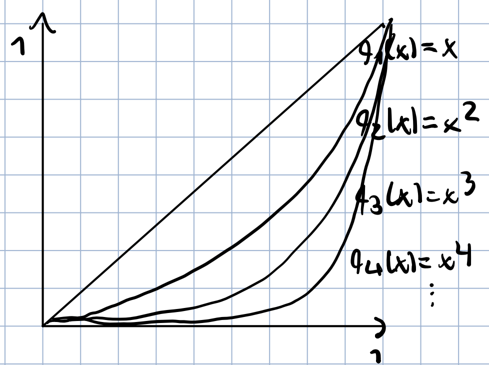
Bem: Graphisch dargestellt



d.h. wir können einen beliebigen Punkt x_0 auswählen, und schauen nun ob die Funktionenfolge hier konvergiert (lokaler ε-Bereich)

Bsp: $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \quad \text{(vgl. Skript 223)} \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$



Bem: $f_n(x) = x^n$ ist stetig, f aber nicht. Begriff der punktweisen Stetigkeit offenbar zu schwach. brauchen stärkeren Begriff: Einführung von gleichmässig Stetigkeit

(Definition Gleichmässige Konv, Alternative Defn. zum Skript vgl. Vorlesung)

Eine Folge stetiger Funktionen $f_n: D \to \mathbb{R}$ konv. glm. gegen f, falls gilt

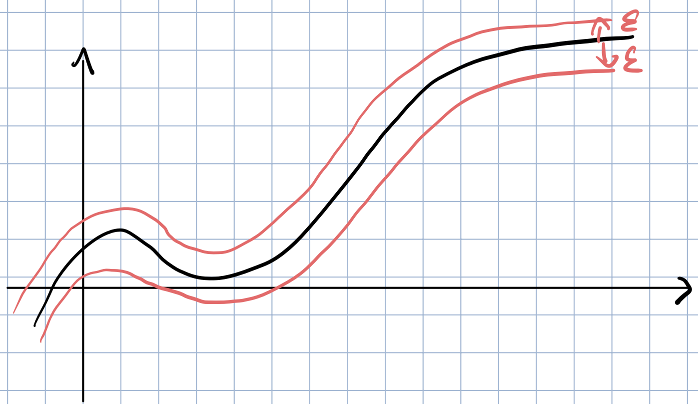
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} \left| f_n(x) - f(x) \right| = 0 \qquad \text{alternativ} \quad \forall \varepsilon > 0.\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}.\ \forall n \geq N.\ \forall x \in D.\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Korollar (Skript 3.7.7): Konv. f_n (Folge stetiger Fkt) glm zu f, so ist $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ stetig

Bem: Glm. Stetigkeit $\Rightarrow$ Punktweise Stetigkeit
$\not\Leftarrow$

Bem: f unstetig $\Rightarrow$ keine glm. Konv.

Bem: Graphisch dargestellt



d.h. wir fixieren erst das ε, und nun muss für dieses ε die gesamte Funktionenfolge (ab einem $N(\varepsilon)$) im Schlauch liegen

Rezept für Glm. Konvergenz

1) Bestimme zuerst Funktion f gegen die f_n konvergiert, also

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

wenn f wohldefiniert ist, dann konv. f_n punktweise gegen f.

2) Für glm. Konv. zeige

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Falls dies gilt, sagt man, dass f_n bzgl. der Supremumsnorm konvergent ist.
Dies ist äquivalent zu Defn. 3.7.3 Weierstrass ε-Defn. da Konvergenz bzgl. allen Normen auf $\mathbb{R}$ äquivalent ist.

Bsp. 8.2.2. Untersuche $f_n(x) = x^2 + e^{-nx^2}$ auf gleichmässige Konvergenz auf $D=[1,\infty)$

Lös: 1) Wir haben Punktweise Konvergenz gegeben, da

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^2 + \underbrace{e^{-nx^2}}_{\to 0} = x^2$$

2) Für glm. Konv. müssen wir zeigen

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

wir haben

$$\sup_{x\in D} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in D} |(x^2+e^{-nx^2})-x^2|$$

$$= \sup_{x\in D} |e^{-nx^2}|$$

$$\overset{n\in\mathbb{N}}{=} \sup_{x=1} |e^{-nx^2}| = e^{-n}$$, und $\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$, also konv f_n glm. gegen x^2

Bsp. 8.2.2. Konv. f_n (wie oben) auf $D=[0,\infty)$?

Lös: Nein, da gilt:

$$\sup_{x\in D} |e^{-nx^2}| = \sup_{x=0} |e^{-nx^2}| = 1$$

also $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x)-f(x)| = 1 \neq 0$

Bsp. 8.2.3. Konv. $f_n(x) = x^n$ für $D=[0,\frac{1}{2}]$ glm?

Lös: 1) Es gilt $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ (da $0 \le x < 1$ $\forall x\in D$)

2) Für glm Konv. gegen Grenzwertfunktion $f(x)=0$ muss gelten

$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$, also

$$\sup_{x\in[0,1/2]} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[0,1/2]} |x^n - 0| = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

also $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1/2]} |f_n(x)-f(x)| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Bsp. 6.2.4. Zeige, dass die folgende Funktionenfolge auf dem gegebenen Bereich glm. konvergent ist. Finden Sie die Grenzwerte

$$f_n(x) = \frac{x}{n^2} + x + 1, \quad x \in [0,1]$$

Lös: 1) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left| \underbrace{\frac{x}{n^2}}_{\to 0} \right| + x + 1 = x+1$

also ist $f_n(x)$ punktweise stetig zu $f(x) = x+1$

2) Z: $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$

mit $\sup_{x\in[0,1]} \left| \left(\frac{x}{n^2} + x + 1\right) - (x+1) \right| = \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{x}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$

gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, also ist $f_n(x)$ glm. stetig zu f.

STETIGKEIT HANDS-ON AUFGABEN

Hands On 2: 2.2. Funktionenfolge a) und b)

Konvergieren die Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ punktweise? Falls ja, bestimme f und untersuche auf gleichmässige Konvergenz.

2.2a) $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^2$

2.2 b) $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x + 1, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} < x \end{cases}$

Hands-On 2 Lösungen

2.2a) $f_n(x) = (1+\frac{x}{n})^2$

Lös: 1) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} (1+\underbrace{\boxed{\frac{x}{n}}}_{\to 0})^2 = 1$, für $x \in [0,1]$

d.h. $f_n(x)$ konv. punktweise zu $f(x)=1$

2) $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} \left|(1+\frac{x}{n})^2 - 1\right|$

$= \lim_{n\to\infty} \left|(1+\frac{1}{n})^2 - 1\right| = \lim_{n\to\infty} \left|1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}-1\right|$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}+\frac{1}{n^2} = 0$

2.2 b) $f_n(x) = \begin{cases} n^2x+1, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} < x \end{cases}$

Lös: Fallunterscheidung für Punktweise und Glm Konvergenz:

1) i) $x=0$: $f_n(x) = 1$: $\lim_{n\to\infty} 1 = 1$

ii) $x>0$: $f_n(x) = 1 \ \forall n \ge \lceil \frac{1}{x} \rceil$ (da $f_n(x)=1$ für $\frac{1}{n} < x$) : $\lim_{n\to\infty} 1 = 1$

Also konv. $f_n(x)$ punktweise zu $f(x)=1$

2) Sei $n>0$ beliebig. Es gilt $f_n(\frac{1}{n}) = n^2 \cdot \frac{1}{n} + 1 = n+1$

$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |(n+1)-1| = \lim_{n\to\infty} n = +\infty \neq 0$

also ist f nicht glm konvergent