

Alte Prüfungsaufgabe - Induzierte Lie Algebra (FS22)

Sei $\phi : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO_+(1, 3)$ die doppelte Überlagerung, definiert durch

$$\widehat{\phi(A)x} = A\hat{x}A^*, \quad \hat{x} = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}, \quad x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$$

Insbesondere gilt für die Standardbasis $e_0, \dots, e_3$ von $\mathbb{R}^4$, dass $\widehat{e_j} = \sigma_j$. Wir schreiben $\phi_* : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{so}(1, 3)$ für den dazugehörigen Lie-Algebra-Homomorphismus.

- Berechnen Sie die reellen 4×4 -Matrizen $\phi_*(\sigma_1), \phi_*(\sigma_2), \phi_*(\sigma_3)$ sowie $\phi_*(i\sigma_1), \phi_*(i\sigma_2), \phi_*(i\sigma_3)$.
(Hinweis: Verwenden Sie, dass die k -te Spalte von $\phi_*(\sigma_j)$ durch $\phi_*(\sigma_j)e_k$ gegeben ist)
- Bestimmen Sie eine Basis der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(1, 3)$ von $SO_+(1, 3)$. Zeigen Sie, dass $\phi_* : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{so}(1, 3)$ ein Isomorphismus von reellen Lie Algebren ist.

Pauli Matrizen. Die Pauli-Matrizen sind gegeben durch

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sie erfüllen $\sigma_j^* = \sigma_j$, und für $j, k = 1, 2, 3$ gilt

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i \sum_{l=1}^3 \epsilon_{jkl} \sigma_l$$

Weiterhin gilt für $j, k = 1, 2, 3$

$$\sigma_j \sigma_k + \sigma_k \sigma_j = 2\delta_{jk} \sigma_0, \quad \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alte Prüfungsaufgabe - Heisenberg Darstellungen (FS18)

Die Heisenberg Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ ist die Lie-Algebra mit Basis X, Y, C und Lie Klammer gegeben durch

$$[X, Y] = C, \quad [X, C] = 0, \quad [Y, C] = 0.$$

- Zeigen Sie, dass es genau eine Darstellung $\rho : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^3)$ gibt, sodass

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Zeigen Sie, dass ρ und die (ebenfalls dreidimensionale) adjungierte Darstellung $\text{ad} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{h})$ nicht äquivalent sind.
- Ist ρ irreduzibel?

Alte Prüfungsaufgabe - Polynomdarstellungen (FS21)

Betrachten Sie die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Lie Gruppe

$$G = \{A \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}) \mid A^T M A = M\}$$

- a) Bestimmen Sie die Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ von G . Geben Sie dazu eine Basis von $\mathfrak{g}$ an und drücken Sie die Lie Klammer von je zwei Basiselementen wieder durch Basiselemente aus.
- b) Die Gruppe G hat eine Darstellung ρ auf dem Raum der Polynome $V = \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ durch die Formel

$$(\rho(A)f)(x) = f(A^{-1}x) \quad x = (x_1, x_2, x_3)^T$$

mit $A \in G$ und $f \in V$. Bestimmen Sie die zugehörige Darstellung τ der Lie Algebra. Geben Sie dazu für jedes Ihrer Basiselemente $e_i \in \mathfrak{g}$ eine Formel für den Differentialoperator $\tau(e_i)$ an.

- c) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ isomorph ist zur Lie Algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.