

Darstellungstheorie endlicher Gruppen - Schlachtplan

1. Gruppe G besser verstehen: Ist es eine, die ich bereits kenne, wie z.B. S_n oder D_n ? Ist sie abelsch ($\rightarrow$ nur 1 dimensionale irreduzible Darstellungen)? Wie funktioniert die Gruppenmultiplikation (z.B. bei D_n gilt $R^n = e$, $S^2 = e$, $SRS = R^{-1}$)?
2. Konjugationsklassen der Gruppe G bestimmen: kenne ich sie bereits (z.B. S_n) oder muss ich diese noch herausfinden? Sobald ich die Anzahl habe:

Korollar 3.5.5: *Eine endliche Gruppe hat so viele Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen wie Konjugationsklassen.*

3. Was ist die Gruppenordnung $|G|$? Wichtig, da

Korollar 3.5.2: *Eine endliche Gruppe G besitzt endlich viele Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen. Ist $\rho_1, \dots, \rho_k$ eine Liste von irreduziblen inäquivalenten Darstellungen, eine in jeder Äquivalenzklasse, so gilt für ihre Dimensionen d_i*

$$d_1^2 + \dots + d_k^2 = |G|.$$

Welche Dimensionen kommen hier in Frage? Die triviale Darstellung gibt es immer, d.h. $d_1 = 1$. Kenne ich bereits andere irreduzible Darstellungen der Gruppe G ? Sobald ich einige Dimensionen erschliessen kann: Gibt es eventuell nur einen Weg, wie man eine quadrierte Summe bilden kann, die $|G|$ ergibt? Wenn ja, dann hat man alle Dimensionen bestimmt.

4. **Eindimensionale Darstellungen** bestimmen: Triviale Darstellung klar. Da die Darstellungseigenschaft $\rho(g)\rho(h) = \rho(gh)$ gelten muss, schränkt dies die Möglichkeiten von $\rho(g)$ stark ein. Erinnere dich, wie wir die eindimensionalen Darstellungen von D_n bestimmt haben; dadurch dass z.B. $R^n = e$ gelten muss, muss auch $\rho(R)^n = \text{Id}$ gelten usw. Durch dies findest du oft alle eindimensionalen Darstellungen relativ einfach. Manchmal sind die Orthogonalitätsrelationen auch von Hilfe; dabei schreibst du einfach $(\chi_{\text{triv}}, \chi) = 0$ aus (du möchtest schliesslich eine irreduzible Darstellung χ finden, welche nicht äquivalent zur trivialen Darstellung ist) und beobachtest, was dies für Bedingungen an dein χ gibt. Bemerke, dass falls $\chi(g) \neq \chi'(g)$, dann sind ρ und ρ' tatsächlich inäquivalent! Bei eindimensionalen Darstellungen musst du dir wegen der Reduzibilität auch keine Sorge machen, sie sind sowieso irreduzibel.
5. **Mehrdimensionale Darstellungen:** Im besten Fall hast du bei Punkt 3. herausgefunden, dass es nur eine irreduzible Darstellung gibt, die nicht mehrdimensional ist. In dem Fall ist es Zeit für Sudoku: Auf S. 20 im Skript wird erklärt, dass die Spalten der Charaktertafel orthogonal sind. Du beginnst mit $\chi(e)$, was einfach der Dimension der Darstellung entspricht. Danach benutzt du Orthogonalität für jede Spalte und hast somit die Charaktertafel vollständig ausgefüllt.

Falls es nicht nur eine mehrdimensionale irreduzible Darstellung gibt, musst du meistens darauf hoffen, dass du alle abgesehen von einer (welche du wie oben beschrieben mit Sudoku herausfinden kannst) irgendwie schon kennst (z.B. bei D_n oder S_n). Oft wird aber auch in einer Teilaufgabe eine mehrdimensionale Darstellung definiert, von welcher du eventuell zeigen musst, dass sie in der Tat irreduzibel ist. Dies kannst du

mit dem Skalarprodukt unten schnell zeigen, sobald du χ berechnet hast, indem du einfach $(\chi_\rho, \chi_\rho) = 1$ überprüfst (Korollar 3.4.3). Dadurch hast du eine Zeile in der Charaktertafel mehr.

Tatsächlich gibt es noch ein paar sehr nützliche Tricks (Tensorprodukte, duale Darstellung etc.) welche wir in den nächsten paar Wochen sehen werden.

6. Mit den obigen fünf Schritten hast du die Charaktertafel. Oft möchte die Aufgabe noch anderes wissen von dir, wie z.B. dass du eine gegebene Darstellung ρ zerlegst. Dafür benutzt du oft das Skalarprodukt

$$(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_1(g)} \chi_2(g).$$

Mit dem Satz

Satz 3.4.1: Seien ρ, ρ' irreduzible Darstellungen der endlichen Gruppe G , und seien $\chi_\rho, \chi_{\rho'}$ ihre Charakteren. Dann gilt

- Sind ρ, ρ' inäquivalent, so gilt $(\chi_\rho, \chi_{\rho'}) = 0$.
- Sind ρ, ρ' äquivalent, so gilt $(\chi_\rho, \chi_{\rho'}) = 1$.

hast du Korollar

Korollar 3.4.2: Sei $\rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_n$ eine Zerlegung einer Darstellung ρ in irreduzible Darstellungen, und sei σ eine irreduzible Darstellung. Dann ist die Anzahl ρ_i , die äquivalent zu σ sind, gleich (χ_ρ, χ_σ) .

Bemerke hier, dass du mit 1.– 5. **nicht** die irreduziblen Darstellungen konstruiert hast; aber du brauchst dies auch nicht um ρ zu zerlegen, denn im Skalarprodukt kommen lediglich die Einträge der Charaktertafel von der Gruppe G vor, welche du in 1.– 5. tatsächlich bestimmt hast.

Alte Prüfungsaufgabe - Charaktertheorie (FS19)

Definiere die Quaternionen

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}^4,$$

wobei i, j, k Symbole mit folgenden Relationen sind

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad ij = -ji = k \quad jk = -kj = i \quad ki = -ik = j$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\mathbb{H}$ eine assoziative $\mathbb{R}$ -Algebra ist (d.h. ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum zusätzlich versehen mit einem Produkt zweier Vektoren, welches mit der Skalarmultiplikation verträglich ist).

- a) Zeige, dass die Menge

$$Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subset \mathbb{H}$$

mit Multiplikation gegeben durch Einschränkung des Produktes $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ eine Gruppe ist.

- b) Bestimme die Konjugationsklassen der Gruppe Q .
- c) Bestimme die Charaktertafel der Gruppe Q .
- d) Bestimme eine komplexe 2-dimensionale irreduzible Darstellung ρ der Gruppe Q . Die Antwort soll eine Liste von 2×2 Matrizen $\rho(\pm 1), \rho(\pm i), \rho(\pm j), \rho(\pm k)$ beinhalten.

Alte Prüfungsaufgabe - Charaktertheorie (FS21)

Sei $G \subset \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ die Untergruppe der invertierbaren Matrizen mit Determinante 1 mit folgenden Eigenschaften:

- Alle Matrixeinträge sind in $\{-1, 0, +1\}$ enthalten.
- In jeder Zeile und jeder Spalte ist genau ein Eintrag ungleich 0.

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass G genau folgende Konjugationsklassen hat:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= [\mathrm{Id}] && \text{mit } |C_1| = 1 \\
 C_2 &= \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] && \text{mit } |C_2| = 3 \\
 C_3 &= \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right] && \text{mit } |C_3| = 6 \\
 C_4 &= \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] && \text{mit } |C_4| = 6 \\
 C_5 &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] && \text{mit } |C_5| = 8
 \end{aligned}$$

- a) Bestimmen Sie die Dimensionen aller irreduziblen Darstellungen von G .
- b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\tau : G \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C})$

$$\tau(A) = \det \left((|A_{ij}|)_{i,j=1,2,3} \right)$$

eine Darstellung ist. Für $A \in G$ bezeichnet $(|A_{ij}|)_{i,j=1,2,3} \in G$ die Matrix deren ij -Eintrag gleich $|A_{ij}|$ ist.

- c) Bestimmen Sie den Charakter der ("definierenden") Darstellung $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^3)$,

$$\rho(A) = A,$$

und zeigen Sie, dass diese Darstellung irreduzibel ist.

- d) Bestimmen Sie die Charaktertafel von G .

Hinweis. Sie kennen dank b) und c) schon 4 irreduzible Darstellungen.