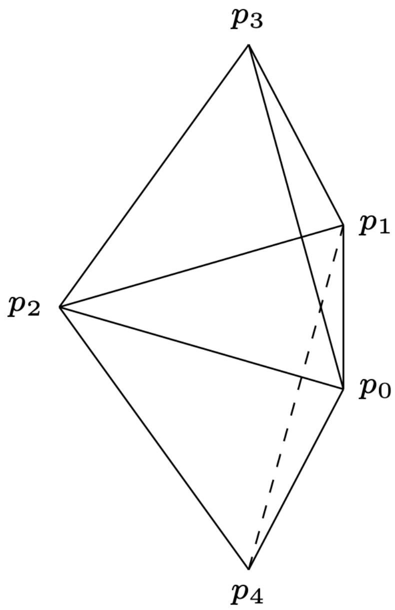
Alte Prüfungsaufgabe - Eigenwertproblem mit Symmetrie

Seien $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{R}^3$ die Ecken einer regulären Bipyramide K; das heisst p_0, p_1, p_2 sind die Ecken eines regulären Dreiecks mit Seitenlänge 1 in der xy-Ebene, und $p_3 = (0,0,1), p_4 = (0,0,-1)$.



Die Symmetriegruppe G von K ist die Untergruppe der orthogonalen Gruppe $O(3)$ die K auf sich selbst abbildet.

a) Bestimmen Sie G.

b) Bestimmen Sie die Charaktertafel von G.

c) Gegeben sei das mechanische System bestehend aus 5 gleichen Massenpunkten auf $p_0, \ldots, p_4$. Betrachten Sie die Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}\left(\mathbb{C}^{3 \cdot 5}\right)$ wobei $\mathbb{C}^{3 \cdot 5} = \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^3$ den Auslenkungen der Massepunkte um ihre Ruhelage entspricht. G wirkt dabei durch Permutation der Massepunkte, und durch die definierende 3-dim Darstellung. Bestimmen Sie den Charakter von ρ.

d) Bestimmen Sie die maximale Anzahl verschiedener Eigenfrequenzen des mechanischen Systems in (c) aufgrund der Symmetriegruppe G.