

Woche 1

Mathematische Methoden der Physik II

Gil Vieira Pereira

26. Februar, 2025

Einführung, (Lie)-Gruppen, Homomorphismen, Bahnensatz und
Bahnformel

Gruppen

Eine **Gruppe** ist eine Menge G mit einem Produkt $\bullet : G \times G \rightarrow G$, sodass $(g \bullet h \equiv gh)$:

- ▶ $(gh)k = g(hk)$,
- ▶ $\exists e$ mit $eg = ge = g$ für alle $g \in G$,
- ▶ $\forall g \exists g^{-1}$, sodass $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

Die Gruppe ist **abelsch** falls $gh = hg$ für alle $g, h \in G$.

Ausgehend von dem kann man Folgendes zeigen oder definieren:

- ▶ Das neutrale Element e ist eindeutig,
- ▶ das Inverse ist für jedes g eindeutig,
- ▶ Untergruppen, **Ordnung**, (semi)direktes Produkt, ...

Definition. Für ein $g \in G$ definiere die **Ordnung** $|g|$ als das kleinste $n \in \mathbb{N}$ s.d. $g^n = e$. Existiert kein solches n , schreiben wir $|g| = \infty$.

Gruppen - kurze Aufgaben

- 1 Sei $G = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ und definiere die Gruppenoperation

$$\bullet : G \times G \rightarrow G$$
$$(g, h) \mapsto \text{ggT}(g, h),$$

Überprüfe alle Gruppenaxiome. Ist die Gruppe abelsch?

- 2 Sei $|g| = n$. Zeige, dass $\{e, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$ alle verschiedenen Elemente sind. Folgere, dass $|g| \leq |G|$.
- 3 Sei G eine Gruppe mit $|g| = 2$ für alle $g \in G$. Zeige, dass die Gruppe abelsch ist.
- 4 Bis zu welchem n sind alle möglichen Gruppen mit Ordnung n abelsch?

Alte Prüfungsaufgaben

Welche der folgenden Teilmengen ist keine Untergruppe?

- ▶ Die Menge der oberen Dreiecksmatrizen in $GL(n, \mathbb{R})$.
- ▶ $C_n \subset D_n$.
- ▶ Die Menge der durch 5 teilbaren Zahlen in $\mathbb{Z}$, wobei $\mathbb{Z}$ mit Gruppenoperation "+" verstanden ist.
- ▶ Die Menge aller ungeraden Permutationen in der symmetrischen Gruppe S_{10} .

Was ist die grösste Ordnung eines Elementes von S_5 ?

- ▶ 4
- ▶ 5
- ▶ 6
- ▶ 120

Abbildungen auf Gruppen

Auf Gruppen kann man grundsätzlich beliebige Funktionen definieren. Wir interessieren uns jedoch nur für strukturerhaltende Funktionen, i.e. Homomorphismen:

$$\varphi : G \rightarrow H, \quad \varphi(g \bullet h) = \varphi(g) \bullet \varphi(h)$$

wobei $\bullet$ die Gruppenoperation von G und $\bullet$ die Gruppenoperation von H bezeichnet. Falls φ bijektiv ist, sprechen wir von einem Isomorphismus.

Eigenschaften:

- ▶ $\varphi(e_G) = e_H$,
- ▶ $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$,
- ▶ $\text{Ker}(\varphi), \text{Im}(\varphi)$ sind Untergruppen von G resp. H ,
- ▶ φ injektiv $\iff \text{Ker}(\varphi) = \{e\}$.

Homomorphismen - kurze Aufgaben

- 1 Sei $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ definiert als $\varphi(x) = \exp(x)$. Unter welchen Bedingungen ist dies ein Homomorphismus? Ist es ein Isomorphismus?
- 2 Seien $G = \mathbb{Z}_{12}$ und $H = \mathbb{Z}_4$. Betrachte die Abbildung $\varphi : G \rightarrow H$, $\varphi([n]_{12}) = [n]_4$. Zeige, dass φ ein Gruppenhomomorphismus ist und bestimme $\text{Ker}(\varphi)$ und $\text{Im}(\varphi)$.

Lie Gruppen

Den Gruppen kann man zusätzliche Strukturen verleihen, wie z.B. Topologien (d.h. deklarieren, welche Mengen offen sind etc.).

Beispiel: Wir definieren auf der Matrixgruppe $GL(n, \mathbb{R})$ die Metrik

$$d(A, B)^2 = \sum_{i,j=1}^n |A_{ij} - B_{ij}|^2,$$

wobei die Topologie durch die offenen Bälle bzgl. dieser Metrik beschrieben wird. Wenn man zusätzlich noch eine C^∞ -Struktur auf die Gruppe definiert (und $\bullet, \square^{-1}$ glatt) und sie dadurch zu einer glatten Mannigfaltigkeit macht, ist es eine **Lie Gruppe**.

Die endlichen, diskreten Gruppen $D_n, S_n, \mathbb{Z}_n$ sind tatsächlich auch 0 dimensionale Lie Gruppen - und als solche nicht spannend.

Beispiele von (Matrix) Lie Gruppen

- ▶ $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) \neq 0\}$
- ▶ $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$
- ▶ $O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T A = I\}$
- ▶ $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$
- ▶ $U(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid A^\dagger A = I\}$
- ▶ $SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det(A) = 1\}$
- ▶ $Sp(2n) = \{A \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid A^T J A = J\}, \text{ mit}$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ $O(1, 3) = \{\Lambda \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \mid \Lambda^T \eta \Lambda = \eta\}, \text{ mit}$

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Linksnebenklassen

Definition. Sei H eine Untergruppe einer Gruppe G . Die Menge G/H der (Links-) Nebenklassen von H in G ist die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation

$$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H \text{ mit } g_2 = g_1 h$$

G/H mit dem Gruppenprodukt $[g_1][g_2] = [g_1 g_2]$ ist in der Regel keine Gruppe, aber falls H ein Normalteiler ist, schon.

Definition. Ein Normalteiler von G ist eine Untergruppe H mit der Eigenschaft, dass $ghg^{-1} \in H$ für alle $g \in G, h \in H$.

Satz von Lagrange

Für eine Gruppe G mit beliebiger Untergruppe H gilt

$$|G/H| = |G|/|H|$$