

Woche 2

Mathematische Methoden der Physik II

Gil Vieira Pereira

5. März, 2025

Lie-Gruppen, Quotientengruppen, Normalteiler, Bahnsatz und Bahnformel, Darstellungen, Beispiele, Satz von Schur

Lie Gruppen

Den Gruppen kann man zusätzliche Strukturen verleihen, wie z.B. **Topologien** (d.h. deklarieren, welche Mengen offen sind etc.).

Beispiel: Wir definieren auf der Matrixgruppe $GL(n, \mathbb{R})$ die Metrik

$$d(A, B)^2 = \sum_{i,j=1}^n |A_{ij} - B_{ij}|^2,$$

wobei die Topologie durch die offenen Bälle bzgl. dieser Metrik beschrieben wird. Wenn man zusätzlich noch eine C^∞ -Struktur auf die Gruppe definiert (und $\bullet, \square^{-1}$ glatt) und sie dadurch zu einer glatten Mannigfaltigkeit macht, ist es eine **Lie Gruppe**.

Die endlichen, diskreten Gruppen $D_n, S_n, \mathbb{Z}_n$ sind tatsächlich auch 0 dimensionale Lie Gruppen - und als solche nicht spannend.

Beispiele von (Matrix) Lie Gruppen

- ▶ $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) \neq 0\}$
- ▶ $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$
- ▶ $O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T A = I\}$
- ▶ $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$
- ▶ $U(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid A^\dagger A = I\}$
- ▶ $SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det(A) = 1\}$
- ▶ $Sp(2n) = \{A \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid A^T J A = J\}, \text{ mit}$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ $O(1, 3) = \{\Lambda \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \mid \Lambda^T \eta \Lambda = \eta\}, \text{ mit}$

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Lie Gruppen - kurze Aufgaben

- 1 Zeige, dass $SL(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$ und $O(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$ resp. geschlossen ist.

Linksnebenklassen

Definition. Sei H eine Untergruppe einer Gruppe G . Die Menge G/H der (Links-) Nebenklassen von H in G ist die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation

$$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H \text{ mit } g_2 = g_1 h$$

G/H mit dem Gruppenprodukt $[g_1][g_2] = [g_1 g_2]$ ist in der Regel keine Gruppe, aber falls H ein Normalteiler ist, schon.

Definition. Ein Normalteiler von G ist eine Untergruppe H mit der Eigenschaft, dass $ghg^{-1} \in H$ für alle $g \in G, h \in H$.

Satz von Lagrange

Für eine Gruppe G mit beliebiger Untergruppe H gilt

$$|G/H| = |G|/|H|$$

Alte Prüfungsaufgabe zu Normalteiler

Welche der folgenden Untergruppen ist kein Normalteiler?

- ▶ Die geraden Permutationen in der symmetrischen Gruppe S_{10} .
- ▶ Die oberen Dreiecksmatrizen in $GL(10, \mathbb{R})$.
- ▶ $C_{10} \subset D_{10}$.
- ▶ $\mathbb{Z}^{10} \subset \mathbb{R}^{10}$, wobei die Gruppenoperation " + " ist.

Follow-up Frage:

Sei G eine abelsche Gruppe und H eine Untergruppe von G . Zeige, dass G/H eine abelsche Gruppe ist. Gib ein Beispiel einer nicht-abelschen Gruppe G mit einer echten Untergruppe H ($H \subsetneq G$), sodass G/H eine abelsche Gruppe ist. Du darfst nur $G \in \{D_n, \mathbb{Z}_n, S_n\}$ wählen.

Zuletzt: Zeige mit dem Satz von Lagrange, dass eine Gruppe G mit $|G| = 5$ abelsch sein muss.

Isomorphiesatz und Bahnensatz

Isomorphiesatz (Satz 1.1.5)

Sei $\varphi : G \rightarrow H$ ein Homomorphismus von Gruppen. Dann gilt

$$G/\text{Ker}(\varphi) \cong \text{Im}(\varphi),$$

mit dem Isomorphismus $[g] \mapsto \varphi(g)$.

Definitionen. Eine Gruppe G **operiert** auf einer Menge X , wenn eine Abbildung $G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto gx$ gegeben ist, welche die Eigenschaften $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$ und $ex = x$ erfüllt. Wir definieren ausserdem für ein $x \in X$ die **Bahn** von x als

$$Gx := \{gx \mid g \in G\} \subset X$$

und den **Stabilisator** von x als

$$\text{Stab}_x := \{g \in G \mid gx = x\} \subset G.$$

Darstellungen

Definition Darstellung (Def. 2.1.1)

Eine (reelle bzw. komplexe) **Darstellung** einer Gruppe G auf einem $\mathbb{R}$ - (bzw. $\mathbb{C}$)-Vektorraum $V \neq 0$ ist ein Homomorphismus $\rho : G \rightarrow GL(V)$. Der Vektorraum V heißt dann Darstellungsraum der Darstellung ρ .

Da ρ ein Homomorphismus ist, wissen wir bereits, dass

- ▶ $\rho(e) = \text{Id}$
- ▶ $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1}$

Die **Dimension** einer Darstellung (ρ, V) ist definiert als $\dim(V)$.

Darst. als Operationen auf Vektorräumen

Erinnere dich wie wir eine Gruppenoperation auf einer Menge X definiert haben: Eine Gruppe G operiert auf einer Menge X , wenn eine Abbildung $G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ gegeben ist, welche die Eigenschaften $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$ und $e \cdot x = x$ erfüllt.

Wir können also eine Darstellung auch als eine Gruppenoperation auf Vektorräumen verstehen: Wir definieren für eine Darstellung (ρ, V) die Gruppenoperation $G \times V \rightarrow V$ auf V als

$$g \cdot v := \rho(g)v$$

Die Eigenschaften $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$ und $e \cdot x = x$ werden automatisch durch die Homomorphismuseigenschaften von ρ erfüllt.

Darstellungen sind Gruppenoperationen auf Vektorräumen, die durch **bijektive lineare Abbildungen** operieren!

Darstellungen - kommende Serienaufgabe

Welche der folgenden Abbildungen $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ sind Darstellungen?

- ① $G = (\mathbb{Z}, +), V = \mathbb{C}, \rho : n \mapsto e^n.$
- ② $G = (\mathbb{Z}, +), V = \mathbb{C}, \rho : n \mapsto n.$
- ③ $G = \text{GL}(n, \mathbb{C}), V = \mathbb{C}^n, \rho : A \mapsto A.$
- ④ $G = \text{GL}(n, \mathbb{C}), V = \mathbb{C}^n, \rho : A \mapsto A^2.$
- ⑤ $G = \text{GL}(n, \mathbb{C}), V = \mathbb{C}^n, \rho : A \mapsto A^T.$
- ⑥ $G = \text{GL}(n, \mathbb{C}), V = \mathbb{C}^n, \rho : A \mapsto (A^T)^{-1}.$
- ⑦ $G = \text{GL}(n, \mathbb{C}), V = \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n), \rho(A)\phi = A\phi A^{-1}.$

Darstellungen von $\mathbb{Z}_n, D_n, S_n$

- ▶ $G = \mathbb{Z}_n, V = \mathbb{C}$ mit

$$\rho(m) = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}m\right)$$

wobei $GL(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- ▶ $G = D_n, V = \mathbb{R}^2, \varphi = 2\pi m/n$ und $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$:

$$\rho(R_\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \rho(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- ▶ $G = S_n, V = \mathbb{C}^n, \rho(\sigma)e_i = e_{\sigma(i)}$.

Aufgabe: Finde $\dim(V) = 1$ Darstellungen der Gruppen D_n und S_n .