Woche 3

Mathematische Methoden der Physik II

Gil Vieira Pereira

5. März, 2025

Darstellungen, Beispiele, Satz von Schur, Orthogonalitätsrelationen, Charakteren

Darstellungen von Lie Gruppen

Finde:

1. Eine surjektive $\dim(V) = 1$ Darstellung von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.
2. Eine injektive $\dim(V) = 4$ Darstellung von $G = \mathbb{R}^3 \rtimes \mathrm{O}(3, \mathbb{R})$.

Reduzibilität von Darstellungen

Definition 2.1.4

Ein invarianter Unterraum einer Darstellung (ρ, V) ist ein Unterraum $W \subset V$ mit $\rho(g)W \subset W \; \forall g \in G$. Eine Darstellung (ρ, V) heisst irreduzibel, falls sie keine invarianten Unterräume ausser V und $\{0\}$ besitzt, sonst reduzibel. Ist $W \neq \{0\}$ ein invarianter Unterraum, so ist die Einschränkung $\rho|_W : G \to GL(W)$, $g \mapsto \rho(g)|_W$ eine Darstellung: $(\rho|_W, W)$ ist eine Unterdarstellung von (ρ, V).

Definition 2.1.5

Eine Darstellung (ρ, V) heisst vollständig reduzibel, falls invariante Unterräume $V_1, \ldots, V_n$ existieren, so dass $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ und die Unterdarstellungen $(\rho|_{V_i}, V_i)$ irreduzibel sind.

Reduzibilität: Aufgabe

Seien $(\mathbb{Z}, +)$ die Gruppe der ganzen Zahlen unter Addition, $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und ρ und τ die Abbildungen

$$\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}\left(\mathbb{R}^2\right), n \mapsto \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix},$$

$$\tau : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}\left(\mathbb{R}^2\right), n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Zeige, dass ρ und τ Darstellungen von $(\mathbb{Z}, +)$ sind.
2. Bestimme alle invarianten Unterräume von ρ und τ.
   Hinweis: Unterscheide die Fälle $a = b$ und $a \neq b$.
3. Welche der beiden Darstellungen sind vollständig reduzibel?

Reduzibilität von Darstellungen

Nicht alle Darstellungen sind also vollständig reduzibel. In der Vorlesung habt ihr zum Beispiel gesehen, dass unitäre Darstellungen vollständig reduzibel sind. Für endliche Gruppen haben wir das folgende Theorem:

Maschke's Theorem

Sei (ρ, V) eine Darstellung einer endlichen Gruppe G über einem Körper $\mathbb{K}$, sodass $\mathrm{char}(\mathbb{K})$ nicht $|G|$ teilt. Dann ist (ρ, V) vollständig reduzibel.

Beweis: Serie 2.

Aufgabe: Finde ein Beispiel einer Darstellung (ρ, V) einer endlichen Gruppe, welche nicht vollständig reduzibel ist.

Homomorphismus von Darstellungen

Definition 2.1.3

Ein Homomorphismus von Darstellungen $(\rho_1, V_1) \to (\rho_2, V_2)$ ist eine lineare Abbildung $\varphi : V_1 \to V_2$ so, dass $\varphi \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \varphi$, für alle $g \in G$. Zwei Darstellungen $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ sind äquivalent (oder isomorph) falls ein bijektiver Homomorphismus von Darstellungen $\varphi : V_1 \to V_2$ existiert.

Der Vektorraum aller Homomorphismen $(\rho_1, V_1) \to (\rho_2, V_2)$ wird mit $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ oder $\mathrm{Hom}_G((\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2))$ bezeichnet.

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho_1(g)"'] & V_2 \arrow[d, "\rho_2(g)"] \\ V_1 \arrow[r, "\varphi"] & V_2 \end{tikzcd}$$

Isomorphismus von Darstellungen

Seien $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ zwei verschiedene Basen zu einer gegebenen Darstellung (ρ, V). Seien $\rho_{\mathcal{B}}$ und $\rho_{\mathcal{B}'}$ die zwei dazugehörigen Matrizen der Darstellung. Sei T die Basistransformationsmatrix. Dann gilt

$$\rho_{\mathcal{B}'}(g) = T\rho_{\mathcal{B}}(g)T^{-1} \quad (\forall g \in \mathrm{G})$$

oder

$$\rho_{\mathcal{B}'}(g)T = T\rho_{\mathcal{B}}(g) \quad (\forall g \in \mathrm{G})$$

Falls also die zwei Darstellungen im Sinne von Definition 2.1.3 äquivalent sind, beschreiben die Darstellungen bis auf die Wahl der Basis dasselbe.

Das Lemma von Schur

Lemma von Schur (Satz 2.4.1)

Seien $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ irreduzible komplexe endlichdimensionale Darstellungen von G.

- $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) \Rightarrow \varphi \equiv 0$ oder φ ist ein Isomorphismus.
- $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_1)$. Dann ist $\varphi = \lambda \mathrm{Id}, \lambda \in \mathbb{C}$.

Korollar 2.4.2

Jede irreduzible endlichdimensionale komplexe Darstellung einer abelschen Gruppe ist eindimensional.

Wahr / Falsch - Darstellungen

Sei V eine irreduzible, zweidimensionale komplexe Darstellung einer endlichen Gruppe G.

- (W/F) Es gilt, dass G für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ isomorph zur Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist.
- (W/F) Es folgt, dass G für kein $n \in \mathbb{N}$ isomorph zur Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist.
- (W/F) Es folgt, dass G eine eindimensionale Darstellung besitzt.
- (W/F) Es folgt, dass G mindestens fünf Elemente enthält.
- (W/F) Es folgt, dass eine dreidimensionale vollständig reduzible Darstellung von G existiert.
- (W/F) Es folgt, dass eine dreidimensionale irreduzible Darstellung von G existiert.

Unser Ziel

Wir haben nun Darstellungen definiert und dabei gesehen, dass die irreduziblen Darstelluzngen die Bausteine dafür sind. Es ist nicht verwunderlich also, dass uns bei einer gegebenen Gruppe G am meisten interessiert, welche irreduziblen Darstellungen man zu dieser Gruppe G finden kann.

- Gibt es endlich viele? Oder unendlich viele?
- Wie kann man alle finden?
- Wenn wir eine Darstellung ρ haben, wie finden wir schnell ihre Zerlegung?

Systematischer approach mit Charaktertheorie. Ziel: Charaktertabelle.

$6S_3$	$[1]$	$3[s]$	$2[t]$
χ_1	1	1	1
χ_2	2	0	-1
χ_ϵ	1	-1	1

Charakter

Definition Charakter

Der Charakter einer endlichdimensionalen Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ einer Gruppe G ist die komplexwertige Funktion auf G:

$$\chi_\rho(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g)) = \sum_{j=1}^{\dim V} \rho_{jj}(g)$$

Eigenschaften:

1. $\chi_\rho(gh) = \chi_\rho(hg)$
2. $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$
3. $\chi_\rho(e) = \dim(\rho)$
4. $\chi_{\rho^*}(g) = \chi_\rho(g^{-1})$
5. $\chi_{\overline{\rho}}(g) = \overline{\chi_\rho(g)}$
6. $\chi_{\rho \oplus \rho'} = \chi_\rho + \chi_{\rho'}$
7. $\chi_{\rho \otimes \rho'} = \chi_\rho \chi_{\rho'}$
8. $\rho \sim \rho' \Longleftrightarrow \chi_\rho = \chi_{\rho'}$

Konjugationsklassen

Die Eigenschaft, dass $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$ suggeriert eine wichtige Definition.

Definition Konjugationsklassen

Eine Konjugationsklasse von G ist eine Teilmenge von G der Form $\{hgh^{-1}, h \in G\}$.

Die Gruppe G zerfällt in Konjugationsklassen, der Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$: $g \sim g'$ falls ein $h \in G$ existiert, so dass $g' = hgh^{-1}$.

Die Eigenschaft oben impliziert also, dass χ_ρ für alle Elemente aus der Konjugationsklasse den gleichen Wert liefert, i.e. $\chi_\rho([g])$ ist wohldefiniert.

Aufgabe: Bestimme die Konjugationsklassen der Gruppe D_3.

Orthogonalitätsrelationen

Orthogonalitätsrelationen der Darstellungsmatrizen (Satz 3.1.1)

Seien $\rho : G \to \mathrm{GL}(V), \rho' : G \to \mathrm{GL}\left(V'\right)$ irreduzible unitäre Darstellungen einer endlichen Gruppe G. Es bezeichnen $(\rho_{ij}(g))$, $(\rho'_{kl}(g))$ die Matrizen von $\rho(g), \rho'(g)$ bezüglich orthomormierten Basen von V, bzw. V'.

- Sind ρ, ρ' inäquivalent, so gilt für alle i, j, k, l,

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\rho_{ij}(g)} \rho'_{kl}(g) = 0.$$

- Für alle i, j, k, l gilt

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\rho_{ij}(g)} \rho_{kl}(g) = \frac{1}{\dim V} \delta_{ik} \delta_{jl}.$$

Orthogonalitätsrelationen der Charakteren

Wir definieren auf dem Raum der komplexwertigen Funktionen $f : G \to \mathbb{C}$ das Skalarprodukt

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{f_1(g)} f_2(g).$$

Aus den Orthogonalitätsrelationen folgt ein enorm wichtiger Satz:

Orthogonalitätsrelationen der Charakteren (Satz 3.4.1)

Seien ρ, ρ' irreduzible Darstellungen der endlichen Gruppe G, und seien $\chi_\rho, \chi_{\rho'}$ ihre Charakteren. Dann gilt

- Sind ρ, ρ' inäquivalent, so gilt $\left(\chi_\rho, \chi_{\rho'}\right) = 0$.
- Sind ρ, ρ' äquivalent, so gilt $\left(\chi_\rho, \chi_{\rho'}\right) = 1$.

Orthogonalitätsrelationen der Charakteren

Orthogonalitätsrelationen der Charakteren (Satz 3.4.1)

Seien ρ, ρ' irreduzible Darstellungen der endlichen Gruppe G, und seien $\chi_\rho, \chi_{\rho'}$ ihre Charakteren. Dann gilt

- Sind ρ, ρ' inäquivalent, so gilt $\left(\chi_\rho, \chi_{\rho'}\right) = 0$.
- Sind ρ, ρ' äquivalent, so gilt $\left(\chi_\rho, \chi_{\rho'}\right) = 1$.

Sei $\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_n$ eine Zerlegung einer Darstellung ρ in irreduzible Darstellungen, und sei σ eine irreduzible Darstellung.

Korollar

- Dann ist die Anzahl ρ_i, die äquivalent zu σ sind, gleich (χ_ρ, χ_σ).
- ρ irreduzibel $\iff (\chi_\rho, \chi_\rho) = 1$.

Charakter - Aufgabe

Es seien die zwei zweidimensionalen Darstellungen ρ, ρ' der Diedergruppe D_3 gegeben:

$$\rho(R) = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rho'(R) = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2\sqrt{2} & \sqrt{3}/2\sqrt{2} \\ -\sqrt{3}/2\sqrt{2} & 1/4 & -3/4 \\ -\sqrt{3}/2\sqrt{2} & -3/4 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad \rho'(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Was müsstest du zuerst überprüfen, um sicherzustellen, dass dies in der Tat eine Darstellung definiert? (Mache dies aber nicht)
2. Sind ρ, ρ' irreduzibel? Sind sie äquivalent?
3. Zerlege ρ, ρ' in irreduzible Darstellungen.
   Tipp: Welche Darstellungen von D_3 kennst du bereits?