

Woche 5

Mathematische Methoden der Physik II

Gil Vieira Pereira

26. März, 2025

Tensorprodukt, Tensorprodukt in der Darstellungstheorie

Motivation

Das Tensorprodukt führt man ein, um multilineare Abbildungen besser zu verstehen. Seien $V_1, \dots, V_k, W$ Vektorräume über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung

$$\Phi : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W$$

heisst **multilinear**, falls sie in jeder Variable linear ist. Das heisst, dass für alle $i = 1, \dots, k$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, v, v' \in V_i$ und $v_j \in V_j$ für alle $j \neq i$ gilt, dass

$$\begin{aligned} \Phi(v_1, \dots, v_{i-1}, \alpha v + \beta v', v_{i+1}, \dots, v_k) \\ = \alpha \Phi(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_k) \\ + \beta \Phi(v_1, \dots, v_{i-1}, v', v_{i+1}, \dots, v_k) \end{aligned}$$

Wir schreiben $\text{Mult}_{\mathbb{K}}(V_1, \dots, V_k; W)$ für den Raum aller solchen multilinearen Abbildungen wie oben definiert.

Beispiel: Bilineare Abbildung

Sei die bilineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(v, w) = (v_2 w_3, v_3 w_1, v_1 w_2)^T.$$

Bilinearität heisst in diesem Fall, dass

$$\Phi(\alpha v + \beta v', w) = \alpha \Phi(v, w) + \beta \Phi(v', w),$$

$$\Phi(v, \alpha w + \beta w') = \alpha \Phi(v, w) + \beta \Phi(v, w').$$

Bei linearen Abbildungen φ haben wir gesehen, dass wir einfach die Bilder der Basisvektoren $e_1, \dots, e_n$ brauchen, um φ für ein beliebigen Vektor zu konstruieren (d.h. aus $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ können wir $\varphi(v)$ eindeutig bestimmen). Wie viele brauchen wir für Φ ? $\rightarrow 3 \cdot 3 = 9$:

▶ $\Phi(e_1, e_1)$

▶ $\Phi(e_2, e_1)$

▶ $\Phi(e_3, e_1)$

▶ $\Phi(e_1, e_2)$

▶ $\Phi(e_2, e_2)$

▶ $\Phi(e_3, e_2)$

▶ $\Phi(e_1, e_3)$

▶ $\Phi(e_2, e_3)$

▶ $\Phi(e_3, e_3)$

Beispiel: Bilineare Abbildung

Allerdings hat unser Vektorraum $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^6$ mit der Basis

$$\mathcal{B} = \{(0, e_1), (0, e_2), (0, e_3), (e_1, 0), (e_2, 0), (e_3, 0)\}$$

schon sowieso die falsche Dimension. D.h. wir können nicht mehr wie bei $\varphi : V \rightarrow W$ unsere Abbildung φ beschreiben mit den Basisvektoren von V ; in unserem Beispiel $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ der Vektorraum $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ungeeignet dafür. Ausweg: **Tensorprodukt**, welcher für unser Beispiel eine Basis der Form

▶ $e_1 \otimes e_1$

▶ $e_2 \otimes e_1$

▶ $e_3 \otimes e_1$

▶ $e_1 \otimes e_2$

▶ $e_2 \otimes e_2$

▶ $e_3 \otimes e_2$

▶ $e_1 \otimes e_3$

▶ $e_2 \otimes e_3$

▶ $e_3 \otimes e_3$

Das Tensorprodukt ist somit der "richtige" Vektorraum, um multilineare Abbildungen zu analysieren.

POV Änderung

Statt den lästigen Vektorraum $U \times V$ mit lästigen **multilinearen Abbildungen** $\Phi : U \times V \rightarrow W$ zu betrachten, möchten wir lieber den Vektorraum $U \otimes V$ mit **linearen Abbildungen** $\varphi : U \otimes V \rightarrow W$ untersuchen.

Wenn wir eine 1-zu-1 Korrespondenz zwischen **diesen** Familien finden, können wir multilineare Abbildungen *komplett vergessen*, und stattdessen nur noch lineare Abbildungen auf Tensorprodukten untersuchen.

Das folgende Theorem ermöglicht dies.

Das Theorem

Theorem. Seien U und V $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Es existiert ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum $U \otimes_{\mathbb{K}} V$ und eine bilineare Abbildung

$$\begin{aligned}\iota : U \times V &\rightarrow U \otimes_{\mathbb{K}} V \\ (u, v) &\mapsto u \otimes v\end{aligned}$$

sodass für jede bilineare Abbildung $\Phi : U \times V \rightarrow W$, wobei W ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist, eine eindeutige lineare Abbildung $\varphi : U \otimes_{\mathbb{K}} V \rightarrow W$ existiert, sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \xrightarrow{\Phi} & W \\ \downarrow \iota & \searrow \exists! \varphi & \\ U \otimes V & & \end{array}$$

kommutiert, das heisst $\Phi = \varphi \circ \iota$. Ausserdem gilt

$$U \otimes_{\mathbb{K}} V = \text{Sp}(\{u \otimes v \mid u \in U, v \in V\}).$$

Tensorprodukt - Eigenschaften

Wegen der erforderlichen Multilinearität gilt (per Konstruktion): Für alle $\alpha \in \mathbb{K}$, $u_1, u_2, u \in U$ und $v_1, v_2, v \in V$:

$$\begin{aligned}(u_1 + u_2) \otimes v &= u_1 \otimes v + u_2 \otimes v, & (\alpha u) \otimes v &= \alpha(u \otimes v), \\ u \otimes (v_1 + v_2) &= u \otimes v_1 + u \otimes v_2, & u \otimes (\alpha v) &= \alpha(u \otimes v).\end{aligned}$$

Falls $\mathcal{B}_U = (u_1, \dots, u_m) \subseteq U$ und $\mathcal{B}_V = (v_1, \dots, v_n) \subseteq V$ jeweils Basen sind, dann ist

$$\mathcal{B}_U \otimes \mathcal{B}_V = \{u_i \otimes v_j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

eine Basis von $U \otimes V$.

Achtung: Nicht alle Tensoren in $U \otimes V$ sind von der Form $u \otimes v$. Vektoren, die von dieser Form sind, heissen **reine Tensoren**. Allerdings folgt aus dem obigen, dass jeder Tensor in $U \otimes V$ als Linearkombination von reinen Tensoren geschrieben werden kann.

Beispiel

Sei $\Phi : \mathbb{R}[x]_2 \times \mathbb{R}[x]_1 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$ ($\mathbb{R}[x]_k$ sind die Polynome $p(x)$ über $\mathbb{R}$ mit $\deg(p) \leq k$) gegeben durch

$$\Phi(p(x), q(x)) = (p(x))'(xq(x))'.$$

- 1 Vergewissere dich, dass Φ bilinear ist.
- 2 Schreibe eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}[x]_2 \otimes \mathbb{R}[x]_1$ auf (benutze die Ordnung von vorhin).
- 3 Sei φ die lineare Abbildung auf $\mathbb{R}[x]_2 \otimes \mathbb{R}[x]_1$, sodass $\varphi \circ \iota = \Phi$. Bestimme die Darstellungsmatrix $[\varphi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$, wobei $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ eine Basis vom Zielvektorraum $\mathbb{R}[x]_2$ ist.
- 4 Bestimme über die multilineare Abbildung den Vektor $\Phi(x^2 + 3x, x + 2)$. Überprüfe dein Ergebnis, indem du stattdessen $\varphi(\iota(x^2 + 3x, x + 2))$ berechnest.
Tipp: Dafür musst du $(x^2 + 3x, x + 2)$ in der Basis $\mathcal{B}$ ausdrücken und dann $[\varphi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ benutzen.

Abbildungen für Tensorprodukte

Proposition

Seien $T : U \rightarrow U'$ und $S : V \rightarrow V'$ lineare Abbildungen. Dann existiert eine eindeutige lineare Abbildung, welche wir mit $T \otimes S$ bezeichnen,

$$T \otimes S : U \otimes V \rightarrow U' \otimes V'$$

sodass für alle $u \in U, v \in V$ gilt $T \otimes S(u \otimes v) = T(u) \otimes S(v)$.

Es gilt auch

$$\begin{aligned}(T' \otimes S')(T \otimes S)(u \otimes v) &= T' \otimes S'(T(u) \otimes S(v)) \\ &= T'T(u) \otimes S'S(v).\end{aligned}$$

Darstellungsmatrizen

Seien weiterhin $T : U \rightarrow U'$ und $S : V \rightarrow V'$ lineare Abbildungen. Wie können wir $[T \otimes S]_{\mathcal{B}_U \otimes \mathcal{B}_V}$ aus $[T]_{\mathcal{B}_U}$ und $[S]_{\mathcal{B}_V}$ konstruieren?

Für $\mathcal{B}_U = \{u_1, \dots, u_m\}$ und $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ definiere die Basis

$$\mathcal{B}_U \otimes \mathcal{B}_V = \{u_1 \otimes v_1, u_1 \otimes v_2, \dots, u_1 \otimes v_n, u_2 \otimes v_1, \dots, u_m \otimes v_n\}$$

Die Ordnung spielt eine grosse Rolle! Seien die Matrizen von $[T]_{\mathcal{B}_U}^{\mathcal{B}_{U'}}$ und $[S]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_{V'}}$ gegeben durch A resp. B mit Matrixeinträgen (a_{ij}) resp. (b_{ij}) . In der obigen Basis gilt:

$$[T \otimes S]_{\mathcal{B}_U \otimes \mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_{U'} \otimes \mathcal{B}_{V'}} = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m'1}B & \cdots & a_{m'm}B \end{pmatrix} =: A \otimes B$$

Das ist das sogenannte **Kronecker Produkt** der Matrizen A und B .

Beispiel zu Darstellungsmatrizen

Betrachten wir wieder als Vektorräume die Polynomräume. Seien

$$T : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x], \quad T(p(x)) = p(x)(x + 2)$$

$$S : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x], \quad S(q(x)) = q'(x)$$

Finde nun die Darstellungsmatrix von

$$T \otimes S : \mathbb{R}_1[x] \otimes \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x] \otimes \mathbb{R}_1[x]$$

Indem du eine geeignete Basis für alle Vektorräume definierst.

Überprüfe dann dein Ergebnis, indem du $(T \otimes S)(x \otimes x^2 - x + 1)$

- 1 direkt berechnest (d.h. ohne Koordinaten) und dein Ergebnis dann in einem Koordinatenvektor ausdrückst,
- 2 die Darstellungsmatrix von $T \otimes S$ benutzt.

Vergleiche dann deine zwei Resultate.

Tensorprodukt von Darstellungen

Seien (ρ_1, V_1) , (ρ_2, V_2) zwei Darstellungen derselben Gruppe G .
Definiere dann das **Tensorprodukt von Darstellungen** als

$$\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V_1 \otimes V_2), \quad \rho(g) = \rho_1(g) \otimes \rho_2(g).$$

Diese Darstellung ist also eine Abbildung in $\mathrm{GL}(V_1 \otimes V_2)$ welche einen reinen Tensor $v \otimes w$ folgendermassen abbildet:

$$\rho(g)(v \otimes w) = \rho_1(g)v \otimes \rho_2(g)w$$

Das definierte ρ ist tatsächlich eine Darstellung, da sie die Darstellungseigenschaft erfüllt:

$$\begin{aligned} \rho(gh) &= \rho_1(gh) \otimes \rho_2(gh) = \rho_1(g)\rho_1(h) \otimes \rho_2(g)\rho_2(h) \\ &= (\rho_1(g) \otimes \rho_2(g))(\rho_1(h) \otimes \rho_2(h)) = \rho(g)\rho(h) \end{aligned}$$

Bemerke, dass $\dim(\rho) = \dim(\rho_1)\dim(\rho_2)$.

Äquivalenz von Tensordarstellungen I

Bemerke, dass $(\rho_1 \otimes \rho_2, V_1 \otimes V_2) \cong (\rho_2 \otimes \rho_1, V_2 \otimes V_1)$. Definiere den Vektorraum Isomorphismus

$$\vartheta : V_1 \otimes V_2 \rightarrow V_2 \otimes V_1, \quad v \otimes w \mapsto w \otimes v$$

und bemerke, dass er in der Tat ein Isomorphismus von Darstellungen ist:

$$\begin{array}{ccc} V_1 \otimes V_2 & \xrightarrow{\vartheta} & V_2 \otimes V_1 \\ \rho_1(g) \otimes \rho_2(g) \downarrow & & \downarrow \rho_2(g) \otimes \rho_1(g) \\ V_1 \otimes V_2 & \xrightarrow{\vartheta} & V_2 \otimes V_1 \end{array}$$

$$(\rho_1 \otimes \rho_2, V_1 \otimes V_2) \cong (\rho_2 \otimes \rho_1, V_2 \otimes V_1)$$

Dies lässt sich auf beliebige Tensorprodukte erweitern.

Äquivalenz von Tensordarstellungen II

Für direkte Summen von Vektorräumen lässt sich folgender (offensichtlicher) Vektorraum Isomorphismus definieren:

$$\begin{aligned}\varphi : V \otimes (W_1 \oplus W_2) &\rightarrow (V \otimes W_1) \oplus (V \otimes W_2), \\ v \otimes (w_1 \oplus w_2) &\mapsto (v \otimes w_1) \oplus (v \otimes w_2)\end{aligned}$$

Auch dieser ist ein Isomorphismus von Darstellungen:

$$\begin{array}{ccc} V \otimes (W_1 \oplus W_2) & \xrightarrow{\vartheta} & (V \otimes W_1) \oplus (V \otimes W_2) \\ \rho_V \otimes (\rho_{W_1} \oplus \rho_{W_2}) \downarrow & & \downarrow (\rho_V \otimes \rho_{W_1}) \oplus (\rho_V \otimes \rho_{W_2}) \\ V \otimes (W_1 \oplus W_2) & \xrightarrow{\vartheta} & (V \otimes W_1) \oplus (V \otimes W_2) \end{array}$$

$$\rho_1 \otimes (\rho_2 \oplus \rho_3) = (\rho_1 \otimes \rho_2) \oplus (\rho_1 \otimes \rho_3)$$

Auch dies lässt sich auf beliebige direkte Summen erweitern.

Irreduzibilität von Darstellungen

Seien (ρ_1, V_1) , (ρ_2, V_2) zwei **irreduzible** Darstellungen derselben Gruppe G . Dann ist im Allgemeinen $\rho_1 \otimes \rho_2$ **nicht** irreduzibel.

Zum Beispiel hat die Diedergruppe bekannterweise nur $\dim = 1$ und $\dim = 2$ irreduzible Darstellungen. Ein Tensorprodukt von zwei $\dim = 2$ Darstellungen hätte Dimension 4 - aber D_n hat keine irreduziblen, 4 dimensionale Darstellungen.

Eindimensionale Tensorprodukt Darstellungen - Satz

Sei (ρ, V) eine Darstellung von G und sei $(\tau, \mathbb{K})$ eine **eindimensionale** Darstellung von G . Dann gilt

- ▶ $(\tau \otimes \rho, \mathbb{K} \otimes V) \cong (\tau \cdot \rho, V)$ wobei
$$(\tau \cdot \rho)(g) = \tau(g)\rho(g), \quad \tau(g) \in \mathbb{K}$$
- ▶ $\tau \otimes \rho$ ist genau dann irreduzibel, wenn ρ irreduzibel ist.

Beispiel: FS21 Alte Prüfungsaufgabe (auf Schlachtplanblatt)