Woche 6

Mathematische Methoden der Physik II

Gil Vieira Pereira

2. April, 2025

Tensorprodukt in der Darstellungstheorie continued, symmetrisches und alternierendes Produkt, Darstellungstheorie von S_n: Young Tableau

Irreduzibilität von Darstellungen

Seien (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) zwei irreduzible Darstellungen derselben Gruppe G. Dann ist im Allgemeinen $\rho_1 \otimes \rho_2$ nicht irreduzibel.

Zum Beispiel hat die Diedergruppe bekannterweise nur $\dim = 1$ und $\dim = 2$ irreduzible Darstellungen. Ein Tensorprodukt von zwei $\dim = 2$ Darstellungen hätte Dimension 4 - aber D_n hat keine irreduziblen, 4 dimensionale Darstellungen.

Eindimensionale Tensorproduktdarstellungen - Satz

Sei (ρ, V) eine Darstellung von G und sei $(\tau, \mathbb{K})$ eine eindimensionale Darstellung von G. Dann gilt

- $(\tau \otimes \rho, \mathbb{K} \otimes V) \cong (\tau \cdot \rho, V)$ wobei
$$(\tau \cdot \rho)(g) = \tau(g)\rho(g), \quad \tau(g) \in \mathbb{K}$$
- $\tau \otimes \rho$ ist genau dann irreduzibel, wenn ρ irreduzibel ist.

Beispiel: FS21 Alte Prüfungsaufgabe (auf Schlachtplanblatt)

Produkt von Gruppen

Seien G_1 und G_2 zwei Gruppen jeweils mit Darstellungen (ρ_1, V_1) und (ρ_2, V_2). Wir definieren für die Gruppe $G_1 \times G_2$ eine Darstellung $(\rho_1 \boxtimes \rho_2, V_1 \otimes V_2)$ gegeben durch

$$\rho_1 \boxtimes \rho_2 : G_1 \times G_2 \to \mathrm{GL}\left(V_1 \otimes V_2\right),$$
$$\left(\rho_1 \boxtimes \rho_2\right)\left(g_1, g_2\right)\left(v_1 \otimes v_2\right) = \rho_1\left(g_1\right) v_1 \otimes \rho_2\left(g_2\right) v_2$$

Irreduzible Darstellungen von Produktgruppen - Satz

Sei ρ eine irreduzible Darstellung von $G_1 \times G_2$. Dann existieren zwei irreduziblen Darstellungen ρ_1, ρ_2 von G_1 resp. G_2 sodass

$$\rho \cong \rho_1 \boxtimes \rho_2$$

Umgekehrt, sind ρ_1, ρ_2 zwei irreduzible Darstellungen von G_1 resp. G_2, so ist $\rho_1 \boxtimes \rho_2$ irreduzibel.
Es folgt: Falls G_1 m irred. Darstellungen hat und G_2 n solche, dann hat $G_1 \times G_2$ mn viele irreduzible Darstellungen.

Alte Prüfungsaufgabe

Betrachten Sie ein gleichseitiges Dreieck $\boldsymbol{\Delta}$ in $\mathbb{R}^3$, das in der xy-Ebene liegt und im Ursprung zentriert ist; die Eckpunkte seien

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Symmetriegruppe G von $\boldsymbol{\Delta}$ ist die Untergruppe der orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}(3)$, die $\boldsymbol{\Delta}$ auf sich selbst abbildet.

1. Zeigen Sie, dass $G \cong D_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. Zeigen Sie, dass die Konjugationsklassen einer Produktgruppe $G = H_1 \times H_2$ eine Menge der Form

   $$\{C_1 \times C_2 | \, C_1 \subset H_1 \text{ KK}, C_2 \subset H_2 \text{ KK}\}$$

   sind. (KK = Konjugationsklasse)
3. Bestimmen Sie die Charaktertafel.

Es kämen noch zwei weitere Aufgaben.

Symmetrisches und alternierendes Produkt

Eine multilineare Abbildung $\Phi : V \times V \times ... \times V \to W$ heisst symmetrisch, falls

$$\forall \sigma \in S_k \quad \varphi\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}\right) = \varphi\left(v_1, \ldots, v_k\right).$$

Eine multilineare Abbildung $\Phi : V \times V \times ... \times V \to W$ heisst alternierend, falls

$$\forall \sigma \in S_k \quad \varphi\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}\right) = \operatorname{sign}(\sigma)\varphi\left(v_1, \ldots, v_k\right)$$

Diese multinearen Abbildungen sind eine Unterklasse von den multilinearen Abbildungen; es macht darum Sinn, diese nicht auf dem ganzen Tensorprodukt $V \otimes V \otimes ... \otimes V = V^k$ zu betrachten, sondern nur auf dem Untervektorraum, in welchen sie spannend sind.

Theorem für alternierende

Theorem. Sei V ein K-Vektorraum und $k \in \mathbb{N}$. Es existiert ein K-Vektorraum $\bigwedge^k V$ und eine alternierende Abbildung

$$\iota : \begin{aligned} V^k &\to \bigwedge^k V \\ (v_1, \dots, v_k) &\mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \end{aligned}$$

sodass für jede alternierende Abbildung $\Phi : V^k \to W$ eine eindeutige lineare Abbildung $\varphi : \bigwedge^k V \to W$ existiert, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V^k \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\iota"'] & W \\ \bigwedge^k V \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\varphi"] & \end{tikzcd}$$

kommutiert, das heisst $\Phi = \varphi \circ \iota$.

Wedge Produkt

Im vorherigen Theorem ist

$$\bigwedge^k V = \mathrm{Sp}\left(\{v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \mid v_i \in V_i\}\right).$$

Das Wedge Produkt hat folgende Eigenschaften:

- $v_{\sigma(1)} \wedge v_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(k)} = \mathrm{sgn}(\sigma) v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k$
- Falls $v_i = v_j$ für irgendein $i \neq j$, dann gilt $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k = 0$
- Falls $\dim V = n$ ist, so ist

  $$\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}$$

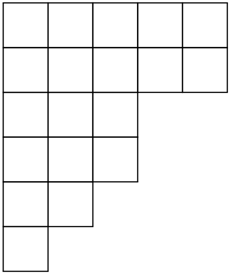
  eine Basis für $\bigwedge^k V$. Somit gilt auch

  $$\dim\left(\bigwedge^k V\right) = \binom{n}{k}.$$

Partitionen

Für eine natürliche Zahl n definieren wir eine Partition als eine Zerlegung von n in eine Summe positiver ganzer Zahlen. Eine solche Partition von n kann man als Young-Diagramm mit n Kästli darstellen.

Beispiel: $19 = 5 + 5 + 3 + 3 + 2 + 1$ lässt sich darstellen als



Permutationen und Konjugationsklassen

Für ein $\sigma \in S_n$ gibt es zwei Schreibweisen: Die Zweizeilenform, z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 7 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

und die Zykelschreibweise, z.B.

$$\sigma = (123)(47)(56).$$

Sei $i_k(\sigma)$ die Anzahl Zyklen der Länge k in der Zykelschreibweise von σ und wir schreiben

$$\underline{i}(\sigma) = (i_1(\sigma), i_2(\sigma), ...)$$

Partitionen und Konjugationsklassen (Korollar 4.2.2)

- Zwei Permutationen $\sigma, \tau \in S_n$ sind genau dann in der gleichen Konjugationsklasse, wenn $\underline{i}(\tau) = \underline{i}(\sigma)$.
- Die Konjugationsklassen von S_n sind also in $1 - 1$ Korrespondenz zu den Partitionen von n.

Gruppenalgebra

Sei G eine endliche Gruppe. Dann ist die Gruppenalgebra $\mathbb{C}[G]$ der Vektorraum der formalen Linearkombinationen

$$\sum_{g \in G} a_g g$$

von Elementen in G mit komplexen Koeffizienten $a_g \in \mathbb{C}$. Insbesondere ist $G \subset \mathbb{C}[G]$ eine Basis von $\mathbb{C}[G]$. Die Gruppenalgebra ist mit der Gruppenoperation ein Ring.

Die Gruppenalgebra trägt eine Darstellung der Gruppe G durch Linksmultiplikation, $\varrho(g)p = gp$.

Irreduzible Darstellungen von S_n

Ein Young-Schema ist ein mit Zahlen aufgefülltes Young-Diagramm

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3}\end{array}$$

Seien G_λ die $\sigma \in S_n$, welche die Zahlen zwischen den Zeilen nicht vermischen und G_{λ^T} dasselbe für die Spalten. Wir bilden die folgenden Elemente der Gruppenalgebra

$$s_\lambda := \sum_{\sigma \in G_\lambda} \sigma, \quad a_\lambda := \sum_{\sigma \in G_{\lambda^T}} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma, \quad c_\lambda = s_\lambda a_\lambda.$$

Definiere $V_\lambda = \mathbb{C}[G]c_\lambda$. Die irred. Darstellungen sind gegeben durch

$$\varrho|_{V_\lambda} : G \to \mathrm{GL}(V_\lambda), \quad \varrho(g)v = gv.$$

Dimension der irreduziblen Darstellungen

X	X	X	X
X			
X			
X			

	X	X	X
	X		
	X		
	X		

	X	X	
	X		
	X		

usw., wir machen dies für jedes Kästchen und tragen dann im Young-Diagramm dort die Länge der Haken ein:

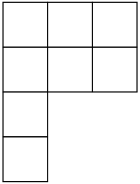
7	6	3	1
5	4	1	
3	2		
2	1		

Seien $h(i,j)$ die Zahlen im linken Schema, dann

$$\dim \varrho|_{V_\lambda} = \frac{n!}{\Pi_{i,j} h(i,j)}$$

Alte Prüfungsaufgabe

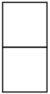
Bestimme die Länge der irreduziblen Darstellung von S_n gegeben durch das folgende Young-Diagramm:



- [ ] 20
- [ ] 56
- [ ] 112
- [ ] 720

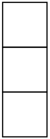
Irreps von S_2

 U

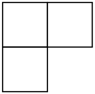
 U'

Irreps von S_3

U



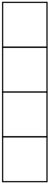
U'

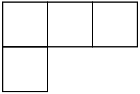


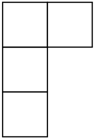
V

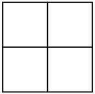
Irreps von S_4


U


U'


V


V'


W

Irreps von S_5