Woche 7

Mathematische Methoden der Physik II

Gil Vieira Pereira

9. April, 2025

Eigenwertproblem mit Symmetrie

Ziel

Sei $A : V \to V$ eine lineare Abbildung, sodass $A \in \mathrm{Hom}_G(V,V)$, d.h.

$$\rho(g)A = A\rho(g), \quad \forall g \in G.$$

Was können wir über die Eigenwerte & Eigenvektoren sagen?

Qualitative Aussage (Satz 5.1.1)

Sei $\rho : G \to GL(V)$ eine endlichdimensionale komplexe Darstellung einer kompakten Gruppe G, und ein diagonalisierbares $A : V \to V$, mit $A \in \mathrm{Hom}_G(V,V)$. Sei $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ eine Zerlegung von V in irreduzible Darstellungen. Dann hat A höchstens n verschiedene Eigenwerte. Bezeichnet d_i die Dimension von V_i, so hat A bezüglich einer passenden Basis die Diagonalform

$$\mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{d_1 \text{mal}}, \ldots, \underbrace{\lambda_n, \ldots, \lambda_n}_{d_n \text{mal}})$$

für gewisse komplexe Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Verallgemeinerung von Lemma von Schur

In Kapitel 2 haben wir folgenden Satz gesehen:

Lemma von Schur (Satz 2.4.1)

Seien $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ irreduzible komplexe endlichdimensionale Darstellungen von G.

- $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) \Rightarrow \varphi \equiv 0$ oder φ ist ein Isomorphismus.
- $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_1)$. Dann ist $\varphi = \lambda \mathrm{Id}, \lambda \in \mathbb{C}$.

Erinnerung: $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ wenn das Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho_1(g)"'] & V_2 \arrow[d, "\rho_2(g)"] \\ V_1 \arrow[r, "\varphi"] & V_2 \end{tikzcd}$$

Frage: Was lässt sich sagen, falls ρ nicht irreduzibel ist?

Verallgemeinerung von Lemma von Schur

Sei für (ρ, V) die kanonische Zerlegung $V = W_1 \oplus ... \oplus W_n$. Sei $W_i = V_{i,1} \oplus ... \oplus V_{i,n_i}$ die Zerlegung in irreduzible Unterräume. Sei $A \in \mathrm{Hom}_G(V, V)$. Die Projektoren

$$p_{i,j} : V \to V_{i,j}$$

sind G-äquivariant (d.h. kommutieren mit $\rho(g)\ \forall g$), somit ist auch $p_{i,j} \circ A|_{V_{k,l}} \in \mathrm{Hom}_G(V_{k,l}, V_{i,j})$. Für $k \neq i$ muss laut Schur gelten $p_{i,j} \circ A|_{V_{k,l}} = 0$, da $V_{i,j}, V_{k,l}$ inäquivalent sind für $k \neq i$. Somit ist $AV_{k,l} \subset W_k$ und im Allgemeinen gilt also:

$$AW_k \subset W_k$$

Spezialfall (Satz 5.1.2)

Seien für alle $i \neq j$ die Darstellungen V_i, V_j nicht äquivalent. Dann ist, für alle $i, AV_i \subset V_i$ und die Einschränkung von A auf V_i ist $A|_{V_i} = \lambda_i 1_{V_i}$ für ein $\lambda_i \in \mathbb{C}$

Diagonalisierung

Sei zum Beispiel eine Darstellung gegeben durch ihre Zerlegung in irreduzible Darstellungen $V = V_1{}^2 \oplus V_2{}^2 \oplus V_3{}^2 \oplus V_4{}^3$ (d ist die Dimension) wobei nur $V_1 \cong V_2$ ist. Von den vorherigen Überlegungen, muss A in einer Basis von V mit Basisvektoren $\cup_i V_i$ von der Form

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \mathrm{Id}_{2\times 2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \mathrm{Id}_{3\times 3} \end{pmatrix}$$

wobei A_{ij} 2×2 Matrizen sind.
Die Eigenwerte λ_1 und λ_2 lassen sich eruieren, indem wir mit den Projektionen p_i einen Vektor in V_2 bzw. V_3 finden, und diesen dann mit der Matrix A multiplizieren, und so vom Resultat die Eigenwerte abliest.
Um die Eigenwerte vom oberen Teil der Matrix herauszufinden, müssen wir jedoch weitermachen.

Diagonalisierung

Wir beschränken uns nun nur noch auf den Teil $V = V_1 \oplus V_2$ mit $V_1 \cong V_2$. Sei $\phi : V_1 \to V_2$ der Darstellungsisomorphismus. Nehme eine Basis $(e_i^1)_{i=1,2}$ von V_1 und definiere die Basis von V_2 als $e_1^2 = \phi(e_1^1), e_2^2 = \phi(e_2^1)$. Falls $\rho_1(g)$ die Darstellungsmatrix von $\rho|_{V_1}(g)$ ist bzgl. dieser Basis, dann hat $\rho(g)$ die Darstellungsmatrix

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_1(g) \end{pmatrix}$$

da $\rho_2(g) = \phi\rho_1(g)\phi^{-1}$. Die Matrix von A habe dann bzgl. derselben Basis die Form

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Wir können dann überprüfen, dass $\rho_1(g)A_{ij} = A_{ij}\rho_1(g)$ gilt; da ρ_1 irreduzibel, Schur $\to A_{ij} = \lambda_{ij}\mathrm{Id}_{2\times 2}$. Diagonalisierung: siehe Skript.

Dimension von $\mathrm{Hom}_G(V, V)$

Bestimme die Dimension (und eine Basis) des Raums $\mathrm{Hom}_G(V, V)$ für

- $V = 2V_1^2 \oplus V_2^2 \oplus V_3^3$
- $V = V_1^1 \oplus 3V_2^4$

Im Allgemeinen:

Dimension von $\mathrm{Hom}_G(V, V)$

Für eine Darstellung mit Zerlegung in irreduzible Darstellungen

$$V = n_1 V_1 \oplus n_2 V_2 \oplus ... \oplus n_i V_i,$$

gilt

$$\dim(\mathrm{Hom}_G(V, V)) = \sum_{j=1}^{i} n_j^2.$$

Kleine Schwingungen von Molekülen

Wir haben ein Molekül mit N Atomen, mit Koordinaten $y = (\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n) \in \mathbb{R}^{3N}$ und Gleichgewichtslage y^*. Wir definieren die Darstellung ρ von der Symmetriegruppe $G \subset \mathrm{O}(3)$ von y^* als

$$\rho(R)\,(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_N) = \left(R\vec{y}_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, R\vec{y}_{\sigma^{-1}(N)}\right)$$

wobei $\rho(R)y^* = y^*$. Die Frequenzen der Eigenschwingungen sind dabei Wurzeln der Eigenwerte einer Matrix A, für welche gilt

$$\rho(R)A = A\rho(R).$$

Wir möchten also nun herausfinden, wie viele Eigenwerte / Eigenschwingungen dieses A hat, ohne jemals das A konkret hinzuschreiben.