Woche 8

Mathematische Methoden der Physik II

Gil Vieira Pereira

16. April, 2025

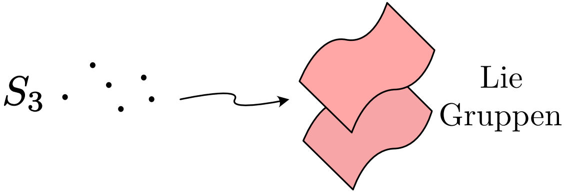
Drehgruppe SO(3), doppelte Überlagerung

Kapitel 6 bis 8

Wir haben bis jetzt (vor allem) Darstellungen $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ untersucht, wobei G eine endliche Gruppe war, d.h. $|G| < \infty$. Nun werden wir uns inbesondere mit Lie Gruppen und ihren Darstellungen beschäftigen.

Die Lie Gruppen mit denen wir uns beschäftigen werden, sind...

- unendlicher Ordnung, $|G| = \infty$,
- ausgestattet mit einer Topologie,
- glatte Mannigfaltigkeiten (mit glatten Operationen),
- Matrix-Lie Gruppen $(\mathrm{O}(n), \mathrm{SU}(n), \mathrm{SL}(n) \ldots)$.



Die Drehgruppe

Die wichtigsten Gruppen für uns werden $\mathrm{O}(3)$ (bzw. $\mathrm{SO}(3)$), $\mathrm{SU}(2)$ und $\mathrm{O}(1,3)$ (bzw. $\mathrm{SO}(1,3)$) sein.
Diese sind Isometrien einer bestimmten Metrik d, d.h. bijektive Abbildungen $f : X \to X$, welche die Abstände erhalten

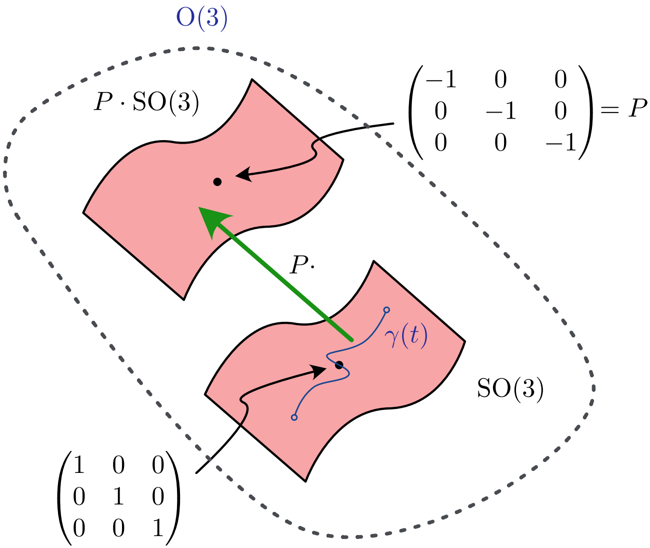
$$d(f(x), f(y)) = d(x, y),\ \forall x, y \in X.$$

Isometrie des Eukldischen Raums (Satz 6.1.1)

Sei f eine Isometrie des Euklidischen Raums ($\mathbb{R}^3$ versehen mit $d(x,y) = |x - y|$). Dann ist f von der Form $f(x) = Rx + a$ wobei $R \in \mathrm{O}(3)$ und $a \in \mathbb{R}^3$. Die Isometriegruppe ist somit $\mathrm{O}(3) \ltimes \mathbb{R}^3$.

Wir möchten nun $\mathrm{O}(3)$ näher untersuchen.

Struktur von $\mathrm{O}(3)$ [Dimension falsch]



Rotationen

Jede Matrix in $\mathrm{SO}(3)$ ist von der Form

$$OR_3(\vartheta)O^{-1}, \quad R_3(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O \in \mathrm{SO}(3).$$

Beliebige Rotation (Lemma 6.2.1)

Sei $O \in \mathrm{SO}(3)$ und $\vec{n} = Oe_3$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}^3$:

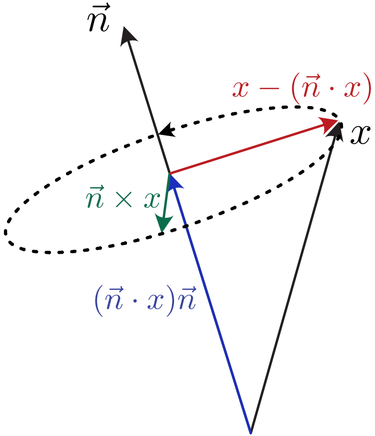
$$R(\vec{n},\vartheta)x = OR_3(\vartheta)O^{-1}x = (x\cdot\vec{n})\vec{n} + [x - (x\cdot\vec{n})\vec{n}]\cos\vartheta + (\vec{n}\times x)\sin\vartheta$$

Lemma 6.2.2

1. $R(n,\vartheta) = R(-n,-\vartheta) = R(n,-\vartheta)^{-1}$
2. $R(n_1,\vartheta_1)\, R(n_2,\vartheta_2) = R(n_2',\vartheta_2)\, R(n_1,\vartheta_1)$, wobei $n_2' = R(n_1,\vartheta_1)\, n_2$.

Rotationen

$$R(\vec{n},\vartheta)x = OR_3(\vartheta)O^{-1}x = (\vec{n}\cdot x)\vec{n} + [x-(\vec{n}\cdot x)\vec{n}]\cos\vartheta + (\vec{n}\times x)\sin\vartheta$$



Eulerwinkel

Eulerwinkel (Satz 6.3.1)

Jedes $A \in \mathrm{SO}(3)$ lässt sich schreiben als

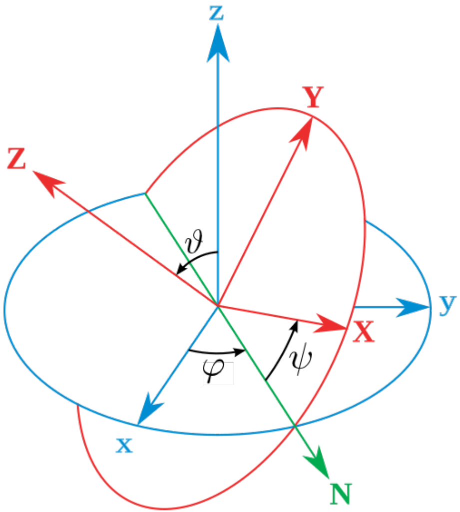
$$A = R_3(\varphi) R_1(\vartheta) R_3(\psi),$$

mit $\varphi \in [0, 2\pi[, \vartheta \in [0, \pi], \psi \in [0, 2\pi[$.

Aufgabe: Finde die Eulerwinkel von

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R\left(e_3, \varphi\right) R\left(e_1, \vartheta\right) R\left(e_3, \psi\right)$$

$R_3(\varphi)R_1(\vartheta)R_3(\psi)$



SU(2)

Die Matrix Gruppe $\mathrm{SU}(2)$ ist definiert als

$$\mathrm{SU}(2) = \{A \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C}) : AA^* = A^*A = \mathrm{Id}, \det(A) = 1\} \subset \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$$

Lemma 6.4.1

Jede Matrix $A \in \mathrm{SU}(2)$ ist von der Form

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Wir führen die Pauli Matrizen ein:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Basis des reellen Vektorraums der hermiteschen 2×2 Matrizen,
- $\mathrm{SU}(2) = \{x_0\sigma_0 + i\vec{x}\cdot\vec{\sigma} | x \in \mathbb{R}^4, |x| = 1\}, \vec{x}\cdot\vec{\sigma} = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3.$

Homomorphismus $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$

Wir möchten zeigen, dass

$$\mathrm{SU}(2)/\{\pm 1\} \cong \mathrm{SO}(3).$$

Idee:

1. Wir betrachten den dreidimensionalen, reellen Vektorraum aller spurfreien hermiteschen 2×2 Matrizen H_0.
2. Wir führen ein Skalarprodukt auf H_0 ein und wählen eine Basis von H_0, sodass die Matrixgruppe, für welche gilt $\langle BX, BY \rangle = \langle X, Y \rangle$, $\forall X, Y \in H_0$ gegeben ist durch $\mathrm{O}(3)$.
3. Wir definieren dann einen Homomorphismus $\phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$, für welchen gilt $\langle \phi(A)X, \phi(A)Y \rangle = \langle X, Y \rangle$, $\forall X, Y \in H_0$, woraus folgt, dass bzgl. obiger Basis tatsächlich $\phi(M) \in \mathrm{SO}(3)$.
4. Schliesslich benutzen wir den ersten Isomorphiesatz

   $$G/\mathrm{Ker}(\varphi) \cong \mathrm{Im}(\varphi),$$

   d.h. wir zeigen dass ϕ surjektiv ist und Kern $\{+\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$ hat.

Homomorphismus $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$

1 Wir betrachten den dreidimensionalen, reellen Vekotrraum aller spurfreien hermiteschen 2×2 Matrizen H_0.

Tatsächlich ist der reelle Vektorraum gegeben durch den reellen Span von den drei Paulimatrizen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (und klarerweise dann $\dim(H_0) = 3$).

Homomorphismus $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$

2 Wir führen ein Skalarprodukt auf H_0 ein und wählen eine Basis von H_0, sodass die Matrixgruppe, für welche gilt $\langle BX, BY\rangle = \langle X, Y\rangle$ $\forall X, Y \in H_0$ gegeben ist durch $\mathrm{O}(3)$.

Definiere auf H_0:

$$\langle X, Y\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(XY),\ X, Y \in H_0$$

und nehme die Basis $e_1 = \sigma_1, e_2 = \sigma_2, e_3 = \sigma_3$. Eine Rechnung gibt uns

$$\langle e_i, e_j\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma_i, \sigma_j) = \delta_{ij}$$

Die Matrixgruppe, die dieses Skalarprodukt invariant lässt, ist genau gegeben durch $\mathrm{O}(3)$.

Homomorphismus $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$

3 Wir definieren dann einen Homomorphismus $\phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$, für welchen gilt $\langle \phi(A)X, \phi(A)Y \rangle = \langle X, Y \rangle$, $\forall X, Y \in H_0$, woraus folgt, dass bzgl. obiger Basis tatsächlich $\phi(A) \in \mathrm{SO}(3)$.

Für $A \in \mathrm{SU}(2)$ definiere die lineare Abbildung $\phi(A) : H_0 \to H_0$ durch

$$\phi(A)X = AXA^*, \; X \in H_0$$

Wir überprüfen dass...

- $\phi(A)X \in H_0$
- $\phi(AC) = \phi(A)\phi(C)$
- $\langle \phi(A)X, \phi(A)Y \rangle = \langle X, Y \rangle$

Es folgt, dass bzgl. der Basis $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ von H_0 gilt $\phi(A) \in \mathrm{O}(3)$ und da ϕ stetig ist und $\mathrm{SU}(2)$ zusammenhängend, gilt $\phi(A) \in \mathrm{SO}(3)$. Wir haben somit einen Homomorphismus $\phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$.

Homomorphismus $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$

4 Schliesslich benutzen wir den ersten Isomorphiesatz

$$G/\mathrm{Ker}(\varphi) \cong \mathrm{Im}(\varphi),$$

d.h. wir zeigen dass ϕ surjektiv ist und Kern $\{+\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$ hat.

Satz 6.4.3.

Homomorphismus $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$

Wir haben den Homomorphismus $\phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ so definiert, dass für $\phi(A)$ gilt:

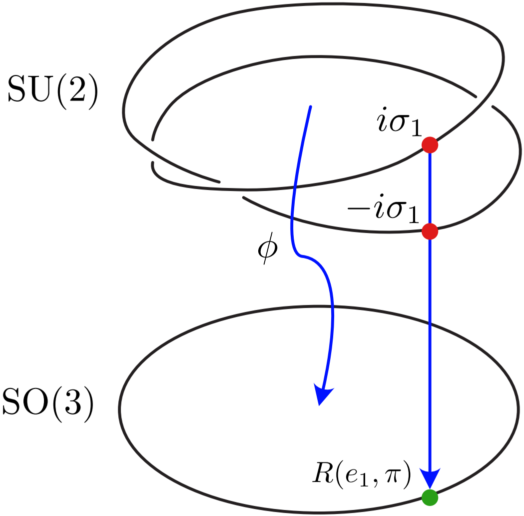
$$\phi(A)X = AXA^*,\ X \in H_0$$

Aufgabe: Bestimme $\phi(\sigma_0), \phi(i\sigma_1), \phi(i\sigma_2)$.
Tipp 1: Du solltest alles in der Basis $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ betrachten.
Tipp 2: Es gilt $\sigma_i \sigma_j \sigma_i = -\sigma_j + 2\delta_{ij}\sigma_i$.

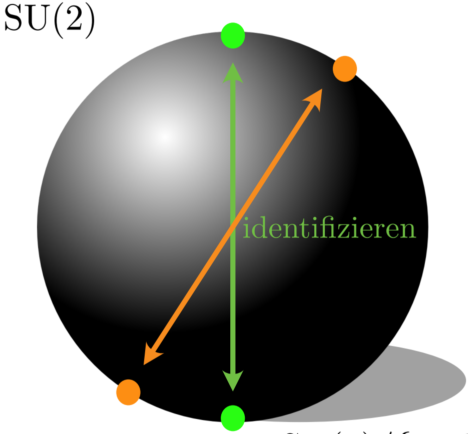
Im Allgemeinen gilt

$$\phi(\mathrm{Id}\cos\vartheta/2 - i\vec{n}\cdot\sigma\sin\vartheta/2) = R(n,\vartheta), \quad n \in \mathbb{R}^3, \quad |n| = 1$$

Doppelte Überlagerung $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$



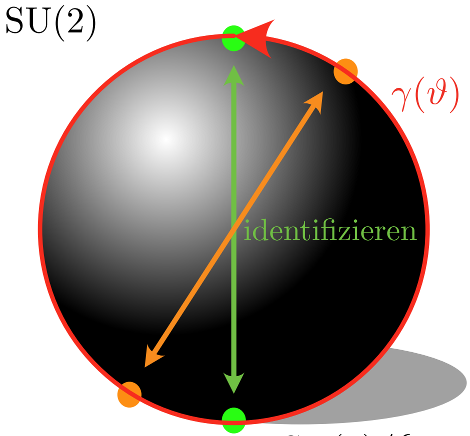
Doppelte Überlagerung $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$



$$\mathrm{SU}(2)/\{\pm\mathrm{Id}\} = \mathrm{SO}(3)$$

Unter Identifikation: $\mathrm{SO}(3)$

Doppelte Überlagerung $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$



$$\mathrm{SU}(2)/\{\pm\mathrm{Id}\} = \mathrm{SO}(3)$$

Unter Identifikation: $\mathrm{SO}(3)$