Woche 1

///: Foliennamen
///: Sonstiges

Gruppen – kurze Aufgaben

1) Alle Gruppenaxiome erfüllt ausser Existenz der Inverse; Hier ist $e=12$ (da $ggT(g,12)=g \ \forall g\in G$) und $\forall g \in G$ ausser $g=12$ $\nexists g^{-1}$ s.d. $ggT(g^{-1},g)=e$.

2) Nehme an $g^i=g^l$ für $i<l<n$. Dann gilt $g^i g^{l-i}=g^l$ und da $g^i=g^l$ folgt $g^{l-i}=e$, was ein Widerspruch dazu ist, dass $n > l-i$ die Ordnung ist.

3) Einerseits gilt $abba=aa=e$, andererseits $abab=e$ (für $g=ab$ gilt ja $gg=e$). Es folgt aus der Eindeutigkeit der Inversen, dass $ba=ab$.

4)
- $n=1$: $G=\{e\} \to$ abelsch
- $n=2$: $G=\{e,g\}$, $eg=ge$ klar $\to$ abelsch
- $n=3$: $G=\{e,g_1,g_2\}$: e kommutiert mit allen Elementen, das einzige Problem könnte $g_1g_2 \neq g_2g_1$ sein. Aber bemerke, dass zwingenderweise

$$g_1g_2=\begin{cases} e, \\ g_1, \\ g_2 \end{cases}$$

da die Gruppe nur diese 3 Elemente hat. Da aber $\begin{cases} e\neq g_1 \\ e\neq g_2, \end{cases}$ gilt sofort $g_1g_2\neq g_1$ und $g_1g_2 \neq g_2$, d.h. $g_1g_2=e$ und auch $g_2g_1=e$, also $g_1g_2=g_2g_1$.
$\to$ abelsch

- $n=4$: Sei $G=\{e,g_1,g_2,g_3\}$. Mit denselben Überlegungen, folgern wir dass $g_1g_2=e$ <u>oder</u> $g_1g_2=g_3$. In beiden Fällen gilt dann aber auch $g_2g_1=e$ <u>resp.</u> $g_2g_1=g_3$. Dies gilt auch für g_2g_3, g_3g_1 etc.

$\rightarrow$ abelsch.

- $n=5$: Tatsächlich kann man mit dem Satz von Lagrange zeigen, dass $G \cong \mathbb{Z}_5$ muss (wie? $\rightarrow$ nächste Woche), d.h. abelsch
- $n=6$: z.B. S_3 nicht abelsch.

$S_n, \mathbb{Z}_n, D_n$ – Crashkurs

D_n.

Für $n \geq 3$: $D_n \leq O(2)$ welche ein im Ursprung zentriertes n-Eck invariant lassen. Zwei wichtige Elemente:

$\hookrightarrow$ mit Ecken $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$.

- R: Drehung im Gegenuhrzeigersinn um Winkel $2\pi/n$
- S: Spiegelung um Achse $\overline{0 v_0}$.

$$D_n = \{1, R, R^2, \ldots, R^{n-1}, S, RS, R^2S, \ldots, R^{n-1}S\}.$$

$$\rightarrow |D_n| = 2n$$

Hausaufgabe: $D_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_{g \mapsto g^{-1}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ indem du den Isomorphismus findest. Zeige zuerst, dass $SRS = R^{-1}$.

$\mathbb{Z}_n$.

Notation: $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = C_n$. Besteht aus $\{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ und $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$ wobei $\overline{k} = k \bmod n$.

S_n.

Permutationen von n Elementen. Zwei Schreibweisen:

(A)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

z.B. $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 4$, $3 \rightarrow 3$, $4 \rightarrow 1$, $5 \rightarrow 5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sgn}}$$

Bsp.

1 2 3 4 5

2 4 3 1 5

$4 \cdot \bullet \Rightarrow \text{sgn} = (-1)^4 = 1.$

③ "Zykel-Schreibweise": $(k_1, k_2, \dots, k_r) \in S_n$ ist die Permutation π mit $\pi(k_1)=k_2, \pi(k_2)=k_3, \dots \pi(k_r)=k_1$.
Für die Permutation oben: $(1\,2\,4)$

Signum: $\mathrm{sgn}: S_n \to \{\pm 1\}$ beschreibt die Anzahl Fehlstände d. Permutation (s. Bsp.). Mathematisch: $\mathrm{sgn}(\pi) = |\{(i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\} \mid i<j \text{ und } \pi(i) > \pi(j)\}|$.
Es gilt $\mathrm{sgn}(\pi_1 \circ \pi_2) = \mathrm{sgn}(\pi_1) \cdot \mathrm{sgn}(\pi_2)$

$\hookrightarrow$ $\mathrm{sgn}: S^3 \to \mathbb{Z}_2$ ist ein Homomorphismus!

Alte Prüfungsaufgaben

1) Nummer 4 ist falsch, da $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\mathrm{sgn}=-1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathrm{sgn}=-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{sgn}=1}$

Ein 5er Zyklus hat ord 5
Ein 4+1er Zyklus hat ord 4
$\Rightarrow$ 3+2 Zyklus

2) Systematisches Ausprobieren führt zur Schlussfolgerung, dass z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

maximale Ordnung hat:
$$1 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{3} 1 \xrightarrow{4} 2 \xrightarrow{5} 3 \xrightarrow{6} 1$$
$$4 \to 5 \to 4 \to 5 \to 4 \to 5 \to 4$$

$\Rightarrow$ Ordnung 6

Homomorphismen - kurze Aufgaben

1) Nimm $\varphi: (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R},\cdot)$, dann gilt

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y).$$

2) • $\varphi([m]_{12}+[n]_{12}) = \varphi([m+n]_{12}) = [m+n]_4 = [m]_4+[n]_4$

• $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}\}$

• $\mathrm{Im}\,\varphi = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$

Alte Prüfungsaufgabe zu Normalteiler

- Da $\operatorname{sgn}(\pi \sigma \pi^{-1}) = \operatorname{sgn}(\pi \sigma \pi) = \operatorname{sgn}(\pi)^2 \operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma)$ folgt, dass A_n ein Normalteiler ist
- In der Tat kein Normalteiler (Matrixmultiplikation)
- $C_{10} = \{e, r, r^2, \dots, r^9\}$. Ist Normalteiler: Es gilt $SRS = R^{-1}$

(schreibe es als Matrizen hin). Deshalb,

$$
\begin{aligned}
& (R^l S^i)\, r^k\, (R^l S^i)^{-1} \qquad i \in \{0,1\} \\
= \; & R^l S^i r^k S^i (R^{-1})^l \\
= \; & R^l \underbrace{r^k}_{s=0} (R^{-1})^l \in C_{10}
\end{aligned}
$$

$\updownarrow$ ODER

$\underbrace{(r^{-1})^k}_{s=1}$

- Abelsch, klar.

Follow-Up Frage:

→ Da eine Untergruppe einer abelschen Gruppe immer ein Normalteiler ist, folgt, dass G/H eine Gruppe ist. Nun gilt

$$[g][h] = [gh] = [hg] = [h][g].$$

→ • $\mathbb{Z}_n$ ist abelsch $\lightning$

• D_n: Wähle $C_n \leq D_n$. Wegen der obigen Aufgabe ist C_n ein Normalteiler. Tatsächlich ist D_n/C_n abelsch. Es gibt mehrere Wege, dies zu sehen:

- Es gilt $D_n = \{e, R, R^2, \dots, SR, SR^2, \dots, SR^{n-1}\}$, deshalb $D_n/C_n = \{e, S\}$.

– Mit Satz von Lagrange: $|D_n/C_n| = |D_n|/|C_n| = 2n/n = 2$
$\Rightarrow$ muss abelsch sein.

• S_n: Wähle $A_n \trianglelefteq S_n$. Wieder gibt es mehrere Wege zu sehen, dass die Gruppe abelsch ist:

– Man kann zeigen (s. Lenny Skript) dass $|A_n| = \frac{n!}{2}$ ist, mit dem Satz von Lagrange also $|S_n/A_n| = n!/n!/2 = 2 \Rightarrow$ abelsch.

– Isomorphie-Satz: $G/\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$ mit $\varphi(\pi) = \operatorname{sgn}(\pi)$. gibt sofort $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}_2$ abelsch.