Woche 2

⊛

Alte Prüfungsaufgabe zu Normalteiler

- Da $\mathrm{sgn}(\pi\sigma\pi^{-1}) = \mathrm{sgn}(\pi\sigma\pi) = \mathrm{sgn}(\pi)^2\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma)$ folgt, dass A_n ein Normalteiler ist
- In der Tat kein Normalteiler (Matrixmultiplikation)
- $C_{10} = \{e, r, r^2, \dots, r^9\}$. Ist Normalteiler: Es gilt $SRS = R^{-1}$

(schreibe es als Matrizen hin). Deshalb,

$$
\begin{aligned}
&(R^l S^i)\, r^k\, (R^l S^i)^{-1} \quad i \in \{0,1\} \\
=\ & R^l S^i r^k S^i (R^{-1})^l \\
=\ & R^l\, r^k (R^{-1})^l \in C_{10} \quad s=0 \\
& \updownarrow \text{ ODER} \\
& (r^{-1})^k \quad s=1
\end{aligned}
$$

- Abelsch, klar.

Follow-Up Frage:

→ Da eine Untergruppe einer abelschen Gruppe immer ein Normalteiler ist, folgt, dass G/H eine Gruppe ist. Nun gilt

$$[g][h] = [gh] = [hg] = [h][g].$$

→ • $\mathbb{Z}_n$ ist abelsch ↯

• D_n: Wähle $C_n \leq D_n$. Wegen der obigen Aufgabe ist C_n ein Normalteiler. Tatsächlich ist D_n/C_n abelsch. Es gibt mehrere Wege, dies zu sehen:

– Es gilt $D_n = \{e, R, R^2, \dots, SR, SR^2, \dots, SR^{n-1}\}$, deshalb $D_n/C_n = \{e, S\}$.

– Mit Satz von Lagrange: $|D_n/C_n| = |D_n|/|C_n| = 2n/n = 2$
$\Rightarrow$ muss abelsch sein.

• S_n: Wähle $A_n \subseteq S_n$. Wieder gibt es mehrere Wege zu sehen, dass die Gruppe abelsch ist:

– Man kann zeigen (s. Menny Skript) dass $|A_n| = \frac{n!}{2}$ ist, mit dem Satz von Lagrange also $|S_n/A_n| = n!/n!/2 = 2 \Rightarrow$ abelsch.

– Isomorphie-Satz: $G/\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$ mit $\varphi(\pi) = \operatorname{sgn}(\pi)$. gibt sofort $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}_2$ abelsch.

Zuletzt

In Serie 3e) habt ihr gezeigt, dass für ein beliebiges $g \in G$ gilt, dass $|g|$ die Ordnung $|G|$ teilt, i.e. $|G|/|g| \in \mathbb{N}$. Da aber $|G|$ nur Teiler 1 oder 5 hat, ist entweder $g = e$ oder $|g| = 5$ d.h. g erzeugt die ganze Gruppe und somit $G = C_5 \Rightarrow$ abelsch.

(*) Aufgabe zu Lie Gruppen:

• $SL(n,\mathbb{R}) \subseteq GL(n,\mathbb{R})$: Da $\det^{-1}(\{1\}) = SL(n,\mathbb{R})$ und det eine stetige Fkt. ist und $\{1\}$ geschlossen in $\mathbb{R}$, ist $SL(n,\mathbb{R})$ als Urbild von einer geschlossenen Menge geschlossen.

• $O(n) \subseteq GL(n,\mathbb{R})$: Definiere $\phi : O(n) \to GL(n,\mathbb{R})$ als $\phi(A) = AA^T$. Dann ist $O(n) = \phi^{-1}(\{Id\})$ und das obige Argument gilt auch hier.

genau diejenigen Elemente von S_3 für die gilt $g^2 = e$. Es folgt, dass die Zahl der Automorphismen von S_3 durch die Zahl der Permutationen der Menge $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ mit drei Elementen beschränkt ist.
Es gilt also $|\mathrm{Aut}(\mathrm{S}_3)| \leq |\mathrm{S}_3| = 6$.
Damit ist c auch surjektiv und folglich ein Isomorphismus, was zu beweisen war.

4 Aufgabe

Welche der folgenden Abbildungen $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ sind Darstellungen?

(a) $G = (\mathbb{Z}, +), V = \mathbb{C}, \rho(n)z = e^n z, n \in \mathbb{Z}$

(b) $G = (\mathbb{Z}, +), V = \mathbb{C}, \rho(n)z = nz, n \in \mathbb{Z}$

(c) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}), V = \mathbb{C}^n, \rho(A) = A, A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

(d) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}), V = \mathbb{C}^n, \rho(A) = A^2, A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

(e) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}), V = \mathbb{C}^n, \rho(A) = A^{\mathrm{T}}, A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

(f) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}), V = \mathbb{C}^n, \rho(A) = (A^{\mathrm{T}})^{-1}, A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

(g) $G = GL(n, C), V = Hom(C^n, C^n), \rho(A)\phi = A\phi A^{-1}$

4.1 Lösung

(a) Es gilt $e^n \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Weiterhin gilt $\rho(n)\rho(m) = e^n e^m = e^{n+m} = \rho(n+m)$. Also ist ρ eine Darstellung.

(b) Es gilt $\rho(0) = 0 \notin \mathrm{GL}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$. Also ist ρ keine Darstellung.

(c) Die Darstellungseigenschaft folgt sofort aus der Gruppeneigenschaft. Also ist ρ eine Darstellung.

(d) Wir rechnen $\rho(A)\rho(B) = A^2B^2$ und $\rho(AB) = ABAB$. ρ ist also eine Darstellung, wenn $AB = BA$ für alle $A, B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.
Für $n = 1$ haben wir $\mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$, sodass alle Elemente tatsächlich kommutieren. In diesem Fall ist ρ also eine Darstellung.
Für $n \geq 2$ betrachten wir die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & \mathbb{1}_{n-2} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & \mathbb{1}_{n-2} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}).$$

Es gilt $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \\ & -1 & \\ & & \mathbb{1}_{n-2} \end{pmatrix}$ und $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & -1 & \\ & & \mathbb{1}_{n-2} \end{pmatrix}$. Weiter gilt$\rho(Id) = Id$, klar. Also ist ρ in diesem Fall keine Darstellung.

(e) Nach einem ähnlichen Argument wie in der letzten Teilaufgabe ist ρ eine Darstellung, wenn gilt $A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ für alle $A, B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Betrachten wir die selben Matrizen A und B wie in der letzten Teilaufgabe, sehen wir, dass auch hier ρ nur dann eine Darstellung ist, wenn $n = 1$.
Es gilt allerdings $\rho(AB) = \rho(B)\rho(A)$ und $\rho(Id) = Id$. Eine solche Abbildung wird manchmal als *rechte Darstellung* bezeichnet.

(f) Es gilt $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \implies (A^{\mathrm{T}})^{-1} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Ferner gilt

$$\rho(A)\rho(B) = (A^{\mathrm{T}})^{-1}(B^{\mathrm{T}})^{-1} = (B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})^{-1} = ((AB)^{\mathrm{T}})^{-1} = \rho(AB)$$

für alle $A, B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Weiter gilt $\rho(Id) = Id$, klar.
Also ist ρ eine Darstellung.

(g) Es gilt $\rho(A)\rho(B)\phi = \rho(A)(B\phi B^{-1}) = AB\phi B^{-1}A^{-1} = (AB)\phi(AB)^{-1} = \rho(AB)\phi$ und gemäss Identifikation von linearen Abbildungen mit Martizenmultiplikation ist das ganze auch sicherlich wohldefiniert. Ferner haben wir $\rho(A^{-1})\rho(A)\phi = A^{-1}A\phi A^{-1}{A^{-1}}^{-1} = \phi$, also $\rho(A^{-1}) = \rho(A)^{-1}$ (man hätte Äquivalent natürlich auch einfach $\rho(Id) = Id$ zeigen können).
Also ist ρ eine Darstellung.

Darstellungen von $\mathbb{Z}_n, D_n, S_n$

- D_n: Sei $\rho(R) = \overline{R}$, $\rho(S) = \overline{S}$. Dann muss gelten

$$\overline{R}^n = \mathrm{Id}, \quad \overline{S}^2 = \mathrm{Id}, \quad \overline{S}\,\overline{R}\,\overline{S} = \overline{R}^{-1}.$$

Da $\dim(V) = 1$ sind alles Zahlen. Insb. also $\overline{S} = \pm 1$ und wegen der letzten Relation gilt $\overline{R}^2 = 1 \Rightarrow \overline{R} = \pm 1$. Falls n gerade, haben wir durch $R^n = 1$ keine Einschr. und somit 4 Darst., für n ungerade gilt $\overline{R} = 1$ und somit 2 Darst.

- S_n: Nehme einfach die Signumsdarstellung.