Woche 3

Darstellungen von Lie Gruppen

1) Determinante
2)

$$(\vec{x}, R) \longmapsto \begin{pmatrix} R & \vec{x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(4, \mathbb{R})$$

da

$$(\vec{x}, R)(\vec{y}, R') = (\vec{x} + R\vec{y}, RR')$$

und

$$\begin{pmatrix} R & \vec{x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R' & \vec{y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RR' & R\vec{y} + \vec{x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Seien $(\mathbb{Z}, +)$ die Gruppe der ganzen Zahlen unter Addition, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und ρ und τ die Abbildungen

$$\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2), n \mapsto \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2), n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass ρ und τ Darstellungen von $(\mathbb{Z}, +)$ sind.

(b) Bestimmen Sie alle invarianten Unterräume von ρ und τ.
Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $a = b$ und $a \neq b$.

(c) Welche der beiden Darstellungen sind vollständig reduzibel?

1.1 Lösung

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} \rho(n)\rho(m) &= \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^m & 0 \\ 0 & b^m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{n+m} & 0 \\ 0 & b^{n+m} \end{pmatrix} \\ &= \rho(n+m). \end{aligned}$$

Also ist ρ eine Darstellung.

Ausserdem gilt

$$\begin{aligned} \tau(n)\tau(m) &= \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n+m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \tau(n+m). \end{aligned}$$

Also ist τ auch eine Darstellung.

(b) Wenn $a \neq b$, dann hat ρ zwei eindimensionale invariante Unterräume $\langle (1,0)^{\mathrm{T}} \rangle$ und $\langle (0,1)^{\mathrm{T}} \rangle$.
Wenn $a = b$, dann ist jeder eindimensionale Unterraum von $\mathbb{R}^2$ invariant.

τ besitzt einen einzigen eindimensionalen Unterraum $\langle (1,0)^{\mathrm{T}} \rangle$.

(c) Sowohl für $a = b$ als auch $a \neq b$ ist ρ vollständig reduzibel, denn $\mathbb{R}^2 = \langle (1,0)^{\mathrm{T}} \rangle \oplus \langle (0,1)^{\mathrm{T}} \rangle$ und die Einschränkungen von ρ auf die invarianten Unterräume sind als eindimensionale Darstellungen automatisch irreduzibel.

τ ist nicht vollständig reduzibel, da die invarianten Unterräume den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ nicht aufspannen.

Wahr / Falsch Darstellungen

F
W
W
W
W
F

Konjugationsklassen D_3

$(R^{-1} = R^2$ da
$R \cdot R^2 = R^3 = e.)$

$[e], [R], [S]$

$[R] \leftarrow R^2$, $[S] \leftarrow SR, SR^2$

$(\text{da } SRS = R^{-1} = R^2)$

da $R^{-1}SR = R(RSR) = RS = SR^{-1}$
$= SR^2$

$(R^2)^{-1} S R^2 = (RSR)R = SR.$

Charakter - Aufgabe

Konj. Klassen: $[e]$, $[R]$, $[S]$. Es gilt
1el. 2el. 3el.

$\chi := \chi_p \rightarrow \chi(e) = 3$
$\chi(R) = 0$
$\chi(S) = -1$

$\chi' := \chi_{p'} \rightarrow \chi'(e) = 3$
$\chi'(R) = 0$
$\chi'(S) = 1$

$\rightarrow$ ungleicher Charakter
$\Rightarrow$ inäquivalente Darstellung

Somit

$$(\chi, \chi) = \frac{1}{6}(9 + 0 + 3 \cdot 1) = 2 \rightarrow \text{nicht irred.}$$

$$(\chi', \chi') = \frac{1}{6}(9 + 0 + 3 \cdot 1) = 2 \rightarrow \text{nicht irred.}$$

Welche Darstellungen kommen wo vor? Für n ungerade kennen wir 3:

1D: • $\rho_+ = 1$ (triviale Darst.)

• $\rho_- \Rightarrow \begin{matrix} \rho(R) = 1 \\ \rho(S) = -1 \end{matrix}$

2D: $\rho_D(R) = R, \ \rho_D(S) = S$ (definierende Darst.)

Chars:

$$\chi_{\rho_+} \begin{cases} 1 & [e] \\ 1 & [R] \\ 1 & [S] \end{cases}$$

$$\chi_{\rho_-} \begin{cases} 1 & [e] \\ 1 & [R] \\ -1 & [S] \end{cases}$$

$$\chi_{\rho_D} \begin{cases} 2 & [e] \\ -1 & [R] \\ 0 & [S] \end{cases}$$

Also:

$$(\chi, \chi_{\rho_+}) = \frac{1}{6}(3-3) = 0$$

$$(\chi, \chi_{\rho_-}) = \frac{1}{6}(3+3) = 1$$

$$(\chi, \chi_D) = \frac{1}{6}(6) = 1$$

Somit $\rho = \rho_+ + \rho_D$

$$(\chi', \chi_{\rho_+}) = \frac{1}{6}(3+0+3) = 1$$

$$(\chi', \chi_{\rho_-}) = \frac{1}{6}(3-3) = 0$$

$$(\chi', \chi_D) = \frac{1}{6}(6) = 1$$

Somit $\rho = \rho_- + \rho_D$.