Woche 4

Reguläre Darstellung

W
F
F
F

Wahr / Falsch

F alle irreps 1D $\Leftrightarrow$ G abelsch

F $|S_5| = 120 < 11^2$ ↯

W $\mathbb{Z}_n$ abelsch, $n \cdot 1^2 = |\mathbb{Z}_n|$

F In diesem Fall müsste ρ' dim 1 sein, $(\rho' \oplus \rho' \oplus \rho', \rho' \oplus \rho' \oplus \rho') = 9 \neq 5$ ↯

(Richtig wäre ρ' käme $2\times$ vor. Dann: $(\rho' \oplus \rho' \oplus \rho'', \rho' \oplus \rho' \oplus \rho'') = 4+1 = 5$ ✓

F
F
W

Nicht abelsch $\Rightarrow \exists d > 1$ Darstellung. $\Rightarrow 12 = 1 + \dots + d^2$. Es gilt $d < 4$.

$12 = 1^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$

$12 = 1^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2$

2 mögliche Optionen

z.B. D_6 z.B. A_4

Kommentar zu diesen zwei: Grundsätzlich beweist die Existenz zwei verschiedener Zerlegungen von 12 als quadrierte Summen noch nichts; um diese Aussagen wirklich zu beweisen, müsste man zwei Beispiele finden mit solcher Zerlegung (wie z.B. A4 und D6).

c) Es ist

$$e_i \oplus e_i \oplus 0 \in \mathrm{im}(F) \qquad 0 \oplus e_i \oplus e_i \in \mathrm{im}(F) \qquad i = 1, 2$$

und daher $\dim \mathrm{im}(F) \geq 4$. Da $\mathrm{im}(F)$ ein invarianter Unterraum von $V_1 \oplus V_1 \oplus V_1$ ist, folgt $\mathrm{im}(F) \cong V_1 \oplus V_1$ oder $\mathrm{im}(F) \cong V_1 \oplus V_1 \oplus V_1$.

Da $\ker(F)$ ein invarianter Unterraum ist folgt somit aus dem Lemma von Schur und (a), dass $\ker(F) \cong V_3$. Die Multiplizitäten sind $n_3 = 1$ und $n_i = 0$ sonst.

d) Invarianz. Sei $X \in U$. Dann ist $X = \sum_i a_i x_i \otimes x_i \otimes x_i$ mit $a_i \in \mathbb{C}$ und $x_i \in \mathbb{C}^2$. Für alle $A \in \mathrm{SU}(2)$ gilt

$$\rho(A)X = \sum_i a_i \rho(A)(x_i) \otimes \rho(A)(x_i) \otimes \rho(A)(x_i) \in U$$

Also ist U ein invarianter Unterraum von $V_1 \oplus V_1 \oplus V_3$.

Isotypische Zerlegung. Wegen der Antisymmetrie von $(-,-)$ ist $U \subset \ker(F) \cong V_3$. Weiter ist $U \neq 0$ und daher $U \cong V_3$, wegen der Irreduzibilität von V_3. Die Multiplizitäten sind also $n_3 = 1$ und $n_i = 0$ sonst.

Lösung 5.

a) Prüfe die Gruppenaxiome:

- Multiplikation ist wohldefiniert, dies ist klar aus den definierenden Relationen von i, j, k.
- Assoziativität folgt aus Assoziativität von $\mathbb{H}$.
- Existenz von Identität: $1 \in Q$ erfüllt $1q = q1 = q$ für alle $q \in Q$.
- Existenz von Inversem: Aus den definierenden Relationen folgt, dass

$$\begin{aligned} i^{-1} &= (-1)i \\ j^{-1} &= (-1)j \\ k^{-1} &= (-1)k \\ (-1)^{-1} &= -1 \\ (-i)^{-1} &= i \\ (-j)^{-1} &= j \\ (-k)^{-1} &= k \end{aligned}$$

Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} ((-1)i)i &= (-1)(-1) = 1 \\ i((-1)i) &= (-1)ii = (-1)(-1) = 1 \end{aligned}$$

b) Die Konjugationsklassen sind

- $[1] = \{1\}$
- $[-1] = \{-1\}$, denn -1 ist im Zentrum der Gruppe.

- $[i] = \{i, -i\}$, denn $iii = -i$; $jij = jk = i$; $kik = jk = i$.
- $[j] = \{j, -j\}$, analog.
- $[k] = \{k, -k\}$, analog.

Dies sind alle Äquivalenzklassen, denn ihre Vereinigung ist Q.

c) Es gibt mit (b) genau 5 irreduzible Darstellungen $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$, wobei ρ_1 die triviale Darstellung ist. Diese haben Dimension $1, 1, 1, 1, 2$ (Summe der Quadrate der Dimensionen ist gleich der Gruppenordnung). Die eindimensionalen Charaktere sind gleich der korrespondierenden Darstellung und sind daher Gruppenhomomorphismen. Aus $(-1)^2 = 1$ folgt daher $\chi_i(-1) \in \{\pm 1\}$. Aus $ij = -ji$ und $i^4 = j^4 = 1$ folgt nun $\chi(-1) = 1$.

Somit ist auch $\chi_i(i)^2 = \chi_i(j)^2 = \chi_i(k)^2 = 1$ und daher $\chi(i), \chi(j), \chi(k) \in \{\pm 1\}$.

Mit der Orthogonalitätsrelation $(\chi_1, \chi_i) = 0$ erhalten wir die notwendige Gleichung

$$\chi_i(i) + \chi_i(j) + \chi_i(k) = -1$$

und somit

$$\begin{array}{lll} \chi_2(i) = 1 & \chi_2(j) = -1 & \chi_2(k) = -1 \\ \chi_3(i) = -1 & \chi_3(j) = 1 & \chi_3(k) = -1 \\ \chi_4(i) = -1 & \chi_4(j) = -1 & \chi_4(k) = 1 \end{array}$$

Aus den Orthogonalitätsrelationen $(\chi_i, \chi_5) = 0$ mit $i = 1, 2, 3, 4$ kann man den Charakter χ_5 ablesen, es ist

$$\chi_5(-1) = -2 \qquad \chi_5(i) = \chi_5(j) = \chi_5(k) = 0$$

Die Charaktertafel ist

	$[1]$	$[-1]$	$2[i]$	$2[j]$	$2[k]$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

d) Wir identifizieren $\mathbb{H} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j$ als 2 dimensionalen komplexen Vektorraum. Sei

$$\rho : Q \to \mathrm{GL}(\mathbb{H}) \qquad q \mapsto (h \mapsto h\bar{q})$$

wobei $\bar{\cdot}$ die Konjugation in $\mathbb{H}$ bezeichnet. Die Abbildung ist wohldefiniert, insbesondere gilt für alle $q \in \mathbb{H}$ ist $\rho(q)$ $\mathbb{C}$-linear. Weiter gilt die Darstellungseigenschaft

$$\rho(p)\rho(q)h = h\bar{q}\bar{p} = h\overline{pq} = \rho(pq)h$$

Wir schreiben die Darstellung in der $\mathbb{C}$-Basis $1, j$. Es ist

$$\begin{aligned} \rho(-1)1 &= -1 & \rho(-1)j &= -j \\ \rho(i)1 &= -i & \rho(i)j &= -ji = ij \\ \rho(j)1 &= -j & \rho(j)j &= -jj = 1 \\ \rho(k)1 &= -k = -ij & \rho(k)j &= -jk = -i \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \rho(\pm 1) &= \pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \\ \rho(\pm i) &= \pm \left(\begin{smallmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{smallmatrix}\right) \\ \rho(\pm j) &= \pm \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \\ \rho(\pm k) &= \pm \left(\begin{smallmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{smallmatrix}\right) \end{aligned}$$

Der Charakter χ der Darstellung ist ist $\chi = \chi_5$ und daher irreduzibel.

c) Definiere die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $\phi : \mathbb{C} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ durch

$$\phi(e_1) = e \qquad \phi(e_2) = \frac{1}{2} f \qquad \phi(e_3) = \frac{1}{2} h$$

wobei e, f, h die Standardbasis von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ist.

- ϕ ist ein Homomorphismus von Lie Algebren, denn

$$\begin{aligned}
[\phi(e_1), \phi(e_2)] &= [e, \frac{1}{2} f] = \frac{1}{2} h = \phi(e_3) = \phi([e_1, e_2]) \\
[\phi(e_2), \phi(e_3)] &= [\frac{1}{2} f, \frac{1}{2} h] = \frac{1}{4} [f, h] = \frac{1}{2} f = \phi(e_2) = \phi([e_2, e_3]) \\
[\phi(e_3), \phi(e_1)] &= [\frac{1}{2} h, e] = \frac{1}{2} [h, e] = e = \phi(e_1) = \phi([e_3, e_1])
\end{aligned}$$

- ϕ ist ein Isomorphismus, weil es eine Basis auf eine Basis abbildet.

Lösung 4.

a) Wir zerlegen zuerst $S^2 V_3$. Mit Clebsch Gordan gilt $V_3 \otimes V_3 \simeq V_0 \oplus V_2 \oplus V_4 \oplus V_6$ mit Dimensionen $1, 3, 5, 7$. Mit $\dim S^2 V_3 = 10$ folgt $S^2 V_3 \simeq V_2 \oplus V_6$. Wieder mit Clebsch Gordan folgt

$$V_2 \otimes S^2 V_3 \simeq V_2 \otimes (V_2 \oplus V_6) \simeq V_0 \oplus V_2 \oplus 2V_4 \oplus V_6 \oplus V_8$$

b) Ja. In der Zerlegung von V in irreduzible Darstellungen kommen nur Darstellungen mit ungerader Dimension vor. Diese setzen fort zu einer Darstellung von SO(3), und daher auch V. *(Beweis dieser Aussage wird nicht verlangt.)*

c) In der Zerlegung $V = V_0 \oplus V_2 \oplus 2V_4 \oplus V_6 \oplus V_8$ sind 4 Darstellungen mit Multiplizität 1 und eine Darstellung mit Multiplizität 2 enthalten. Mit dem Lemma von Schur folgt $\dim W = 1 + 1 + 1 + 1 + 2^2 = 8$.

Lösung 5.

a) Die Ordnung von G ist $|G| = 24$. Weil es 5 Konjugationsklassen gibt, hat es genau 5 irreduzible Darstellungen. Seien $d_1, \ldots, d_5$ deren Dimensionen mit $d_1 = 1$ (triviale Darstellung). Aus der Dimensionsformel

$$24 = 1 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2$$

folgt $d_2 = 1$, $d_3 = 2$, $d_4 = 3$, $d_5 = 3$.

b) Weil in jeder Zeile und Spalte genau ein Eintrag verschieden von 0 ist gilt für $A, B \in G$ und $i, j = 1, 2, 3$

$$|(AB)_{ij}| = \sum_{\ell=1}^{3} |A_{i\ell}||B_{\ell j}|$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\tau(AB) &= \det((|(AB)_{ij}|)_{i,j=1,2,3}) = \det((\textstyle\sum_\ell |A_{i\ell}||B_{\ell j}|)_{i,j=1,2,3}) \\
&= \det((|A_{i\ell}|)_{i,\ell=1,2,3}) \det((|B_{\ell j}|)_{\ell,j=1,2,3}) = \tau(A)\tau(B)
\end{aligned}$$

c) Der Charakter χ_3 von ρ ist

$$\begin{aligned}
\chi_3(C_1) &= \mathrm{tr}(\mathbb{1}) = 3 \\
\chi_3(C_2) &= \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = -1 \\
\chi_3(C_3) &= \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1 \\
\chi_3(C_4) &= \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 \\
\chi_3(C_5) &= \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0
\end{aligned}$$

Irreduzibilität folgt aus

$$(\chi_3, \chi_3) = \frac{1}{24}\left(3^2 + 3 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 1\right) = 1$$

d) Die zwei eindimensionalen Darstellungen sind die triviale Darstellung ρ_1 und die Darstellung τ aus (b). Deren Charaktere sind:

$$\begin{array}{lllll}
\chi_1(C_1) = 1 & \chi_1(C_2) = 1 & \chi_1(C_3) = 1 & \chi_1(C_4) = 1 & \chi_1(C_5) = 1 \\
\chi_\tau(C_1) = 1 & \chi_\tau(C_2) = 1 & \chi_\tau(C_3) = -1 & \chi_\tau(C_4) = -1 & \chi_\tau(C_5) = 1
\end{array}$$

Die 3-dim Darstellung ρ in (c) ist irreduzibel. Die zweite 3-dim Darstellung ist dann $\rho' = \tau \otimes \rho$ mit Charakter $\chi_{3'} = \chi_3 \chi_\tau$. Irreduzibilität folgt aus $(\chi', \chi') = (\chi_3\chi_\tau, \chi_3\chi_\tau) = (\chi_3, \chi_3) = 1$. Es gilt

$$\chi_{3'}(C_1) = 3 \quad \chi_{3'}(C_2) = -1 \quad \chi_{3'}(C_3) = 1 \quad \chi_{3'}(C_4) = -1 \quad \chi_{3'}(C_5) = 0$$

Insbesondere ist $\chi_3 \neq \chi_{3'}$ und daher sind ρ und ρ' inequivalent.

Sei nun χ_2 der Charakter der irreduziblen 2-dimensionalen Darstellung. Spaltenorthogonalität der Charaktertafel liefert

$$\chi_2(C_1) = 2 \quad \chi_2(C_2) = 2 \quad \chi_2(C_3) = 0 \quad \chi_2(C_4) = 0 \quad \chi_2(C_5) = -1$$

Zusammenfassend:

$24G$	$1C_1$	$3C_2$	$6C_3$	$6C_4$	$8C_5$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_τ	1	1	-1	-1	1
χ_3	3	-1	-1	1	0
$\chi_{3'}$	3	-1	1	-1	0
χ_2	2	2	0	0	-1