

② $\Phi: \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ definiert durch

$$\Phi(p(x), q(x)) = p'(x)(xq(x))'$$

Bilinearität: • $\Phi(p_1(x) + p_2(x), q(x)) = (p_1(x) + p_2(x))'(xq(x))'$
 $= p_1'(x)(xq(x))' + p_2'(x)(xq(x))'$
 $= \Phi(p_1(x), q(x)) + \Phi(p_2(x), q(x))$

• $\Phi(p(x), q_1(x) + q_2(x)) = p'(x)(x(q_1(x) + q_2(x)))'$
 $= p'(x)(xq_1(x) + xq_2(x))'$
 $= p'(x)(xq_1(x))' + p'(x)(xq_2(x))'$
 $= \Phi(p(x), q_1(x)) + \Phi(p(x), q_2(x))$

Skalarlinearität ist offensichtlich.

$\Rightarrow \Phi$ ist eine multilineare (hier bilineare) Abbildung.

Als Basis von $\mathbb{R}_2[x]$ bzw. $\mathbb{R}_1[x]$ können wir

$$\mathbb{R}_2[x]: \{1, x, x^2\} = \mathcal{C}$$

$$\mathbb{R}_1[x]: \{1, x\}$$

Benutzen. Somit ist die Basis von $\mathbb{R}_2[x] \otimes \mathbb{R}_1[x]$ gegeben durch

$$B = \{1 \otimes 1, 1 \otimes x, x \otimes 1, x \otimes x, x^2 \otimes 1, x^2 \otimes x\}.$$

Das Theorem sagt nun, dass

(2)

$$\varphi(\varphi(v, w)) = \Phi(v, w)$$

gelten muss.

$$\varphi(v \otimes w)$$

↳ Um $[\varphi]_C^B$ zu finden, müssen wir nur herausfinden, ^{wohin} ~~was~~ mit den Basisvektoren B geschieht werden.
Da aber z.B. $\varphi(x \otimes x^2) = \Phi(x, x^2)$ müssen wir einfach letzteres berechnen.

B

$$\varphi(1 \otimes 1) = 0$$

$$\varphi(1 \otimes x) = 0$$

$$\varphi(x \otimes 1) = 1$$

$$\varphi(x \otimes x) = 2x$$

$$\varphi(x^2 \otimes 1) = 2x$$

$$\varphi(x^2 \otimes x) = 4x^2$$

Somit gilt

$$[\varphi]_C^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Überprüfen wir dieses Ergebnis nun an einem Beispiel. Laut dem Theorem muss gelten z.B.

$$\Phi(x^2 + 3x, x + 2) = \varphi((x^2 + 3x) \otimes (x + 2))$$

Die linke Seite ergibt

(3)

$$\begin{aligned}\Phi(x^2+3x, x+2) &= (2x+3)(2x+2) \\ &= 4x^2 + 10x + 6.\end{aligned}$$

In Koordinaten C :

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Die rechte Seite lässt sich mit $[\varphi]_C^B$ berechnen, sobald wir $(x^2+3x) \otimes (x+2)$ in der Basis B ausgedrückt haben. Mit der Linearität folgt

$$(x^2+3x) \otimes (x+2) = x^2 \otimes x + 3x \otimes x + 2x^2 \otimes 1 + 6x \otimes 1$$

In der Basis B also:

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = v$$

Dann ist $\varphi((x^2+3x) \otimes (x+2)) = [\varphi]_C^B v =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

was mit dem obigen übereinstimmt.

Definiere: $(E_1: \{1, x\}, E_2: \{1, x, x^2\})$

(4)

$$T: \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x], T(p(x)) = p(x)(2x+2)$$

$$S: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x], S(q(x)) = q'(x)$$

und betrachte nun

$$T \otimes S: \mathbb{R}_1[x] \otimes \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x] \otimes \mathbb{R}_1[x]$$

$\nearrow$ Basis $B_1: \{1 \otimes 1, 1 \otimes x, 1 \otimes x^2, x \otimes 1, x \otimes x, x \otimes x^2\}$
 $\nearrow$ Basis $B_2: \{1 \otimes 1, 1 \otimes x, x \otimes 1, x \otimes x, x^2 \otimes 1, x^2 \otimes x\}$

$$[T]_{E_2}^{E_1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, [S]_{E_1}^{E_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [T \otimes S]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Check: $(T \otimes S)(x \otimes x^2 - x + 1)$

$$= T(x) \otimes S(x^2 - x + 1)$$

$$= x^2 + 2x \otimes 2x - 1$$

$$= 2x^2 \otimes x + 4x \otimes x - x^2 \otimes 1 - 2x \otimes 1$$

$$\stackrel{B_2}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

müsste dasselbe geben wie $[T \otimes S]_{B_2}^{B_1} [V]_{B_1}$ wobei (5)

$$\begin{aligned} [V]_{B_1} &= [x \otimes x^2 - x + 1]_{B_1} \\ &= [x \otimes x^2 - x \otimes x + x \otimes 1]_{B_1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ gleich.

- c) Definiere die $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung $\phi : \mathbb{C} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ durch

$$\phi(e_1) = e \quad \phi(e_2) = \frac{1}{2}f \quad \phi(e_3) = \frac{1}{2}h$$

wobei e, f, h die Standardbasis von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ist.

- ϕ ist ein Homomorphismus von Lie Algebren, denn

$$[\phi(e_1), \phi(e_2)] = [e, \frac{1}{2}f] = \frac{1}{2}h = \phi(e_3) = \phi([e_1, e_2])$$

$$[\phi(e_2), \phi(e_3)] = [\frac{1}{2}f, \frac{1}{2}h] = \frac{1}{4}[f, h] = \frac{1}{2}f = \phi(e_2) = \phi([e_2, e_3])$$

$$[\phi(e_3), \phi(e_1)] = [\frac{1}{2}h, e] = \frac{1}{2}[h, e] = e = \phi(e_1) = \phi([e_3, e_1])$$

- ϕ ist ein Isomorphismus, weil es eine Basis auf eine Basis abbildet.

Lösung 4.

- a) Wir zerlegen zuerst S^2V_3 . Mit Clebsch Gordan gilt $V_3 \otimes V_3 \simeq V_0 \oplus V_2 \oplus V_4 \oplus V_6$ mit Dimensionen 1, 3, 5, 7. Mit $\dim S^2V_3 = 10$ folgt $S^2V_3 \simeq V_2 \oplus V_6$. Wieder mit Clebsch Gordan folgt

$$V_2 \otimes S^2V_3 \simeq V_2 \otimes (V_2 \oplus V_6) \simeq V_0 \oplus V_2 \oplus 2V_4 \oplus V_6 \oplus V_8$$

- b) Ja. In der Zerlegung von V in irreduzible Darstellungen kommen nur Darstellungen mit ungerader Dimension vor. Diese setzen fort zu einer Darstellung von $SO(3)$, und daher auch V . (*Beweis dieser Aussage wird nicht verlangt.*)
- c) In der Zerlegung $V = V_0 \oplus V_2 \oplus 2V_4 \oplus V_6 \oplus V_8$ sind 4 Darstellungen mit Multiplizität 1 und eine Darstellung mit Multiplizität 2 enthalten. Mit dem Lemma von Schur folgt $\dim W = 1 + 1 + 1 + 1 + 2^2 = 8$.

Lösung 5.

- a) Die Ordnung von G ist $|G| = 24$. Weil es 5 Konjugationsklassen gibt, hat es genau 5 irreduzible Darstellungen. Seien $d_1, \dots, d_5$ deren Dimensionen mit $d_1 = 1$ (triviale Darstellung). Aus der Dimensionsformel

$$24 = 1 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2$$

folgt $d_2 = 1, d_3 = 2, d_4 = 3, d_5 = 3$.

- b) Weil in jeder Zeile und Spalte genau ein Eintrag verschieden von 0 ist gilt für $A, B \in G$ und $i, j = 1, 2, 3$

$$|(AB)_{ij}| = \sum_{\ell=1}^3 |A_{i\ell}| |B_{\ell j}|$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \tau(AB) &= \det((|(AB)_{ij}|)_{i,j=1,2,3}) = \det((\sum_{\ell} |A_{i\ell}| |B_{\ell j}|)_{i,j=1,2,3}) \\ &= \det((|A_{i\ell}|)_{i,\ell=1,2,3}) \det((|B_{\ell j}|)_{\ell,j=1,2,3}) = \tau(A)\tau(B) \end{aligned}$$

c) Der Charakter χ_3 von ρ ist

$$\begin{aligned}\chi_3(C_1) &= \text{tr}(\mathbb{1}) = 3 \\ \chi_3(C_2) &= \text{tr}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = -1 \\ \chi_3(C_3) &= \text{tr}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1 \\ \chi_3(C_4) &= \text{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 \\ \chi_3(C_5) &= \text{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0\end{aligned}$$

Irreduzibilität folgt aus

$$(\chi_3, \chi_3) = \frac{1}{24} (3^2 + 3 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 1) = 1$$

d) Die zwei eindimensionalen Darstellungen sind die triviale Darstellung ρ_1 und die Darstellung τ aus (b). Deren Charaktere sind:

$$\begin{array}{cccccc}\chi_1(C_1) = 1 & \chi_1(C_2) = 1 & \chi_1(C_3) = 1 & \chi_1(C_4) = 1 & \chi_1(C_5) = 1 \\ \chi_\tau(C_1) = 1 & \chi_\tau(C_2) = 1 & \chi_\tau(C_3) = -1 & \chi_\tau(C_4) = -1 & \chi_\tau(C_5) = 1\end{array}$$

Die 3-dim Darstellung ρ in (c) ist irreduzibel. Die zweite 3-dim Darstellung ist dann $\rho' = \tau \otimes \rho$ mit Charakter $\chi_{3'} = \chi_3 \chi_\tau$. Irreduzibilität folgt aus $(\chi', \chi') = (\chi_3 \chi_\tau, \chi_3 \chi_\tau) = (\chi_3, \chi_3) = 1$. Es gilt

$$\chi_{3'}(C_1) = 3 \quad \chi_{3'}(C_2) = -1 \quad \chi_{3'}(C_3) = 1 \quad \chi_{3'}(C_4) = -1 \quad \chi_{3'}(C_5) = 0$$

Insbesondere ist $\chi_3 \neq \chi_{3'}$ und daher sind ρ und ρ' inequivalent.

Sei nun χ_2 der Charakter der irreduziblen 2-dimensionalen Darstellung. Spaltenorthogonalität der Charaktertafel liefert

$$\chi_2(C_1) = 2 \quad \chi_2(C_2) = 2 \quad \chi_2(C_3) = 0 \quad \chi_2(C_4) = 0 \quad \chi_2(C_5) = -1$$

Zusammenfassend:

$24G$	$1C_1$	$3C_2$	$6C_3$	$6C_4$	$8C_5$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_τ	1	1	-1	-1	1
χ_3	3	-1	-1	1	0
$\chi_{3'}$	3	-1	1	-1	0
χ_2	2	2	0	0	-1