

Aufgabe 3 (Eigenwertproblem mit Symmetrie). (17 Punkte)

Betrachten Sie ein gleichseitiges Dreieck Δ in $\mathbb{R}^3$, das in der xy -Ebene liegt und im Ursprung zentriert ist; die Eckpunkte seien

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Symmetriegruppe G von Δ ist die Untergruppe der orthogonalen Gruppe $O(3)$, die Δ auf sich selbst abbildet.

a) (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass G isomorph ist zur Gruppe $D_3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

(Hinweis: Sie dürfen hierfür die Tatsache verwenden, dass D_3 (die Symmetriegruppe eines regelmässigen Dreiecks in der Ebene $\mathbb{R}^2$) isomorph ist zur Untergruppe $\{R^a S^b : a = 0, 1, 2, b = 0, 1\} \subset O(3)$, wobei

$$R = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Rotation um die z -Achse um 120° , bzw. die Spiegelung um die xz -Ebene bezeichnen.)

b) (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Charaktertafel von G .

c) (6 Punkte)

Betrachten Sie die Darstellung $\rho : G \rightarrow GL(\mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^3)$ mit

$$\rho(g)(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = (g\mathbf{x}_{\sigma^{-1}(1)}, g\mathbf{x}_{\sigma^{-1}(2)}, g\mathbf{x}_{\sigma^{-1}(3)}),$$

wobei $g \in G$, und $\sigma \in S_3$ ist durch $gp_i = p_{\sigma(i)}$ gegeben. (Hierbei ist $g\mathbf{x}$ für $g \in G$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^3$ durch Matrix-Vektor-Multiplikation definiert. Die Permutation σ beschreibt, wie die Ecken von Δ unter Anwendung von $g \in G$ vertauschen.) Bestimmen Sie die Dimensionen und Vielfachheiten der irreduziblen Darstellungen, die in der Zerlegung von ρ in irreduzible Darstellungen von G vorkommen.

d) (2 Punkte)

Sei A eine komplexe diagonalisierbare 9×9 Matrix mit der Eigenschaft

$$\rho(g)A = A\rho(g)$$

für alle $g \in G$.

Wie viele verschiedene Eigenwerte hat A höchstens?

Lösung 3.

a) Wir schreiben $T \in O(3)$ für die Spiegelung um die xy -Ebene; beachten Sie, dass T das Dreieck Δ auf sich selbst abbildet.

Wir behaupten:

$$G = \{T^c R^a S^b : a = 0, 1, 2, b = 0, 1, c = 0, 1\}.$$

Zuerst ' $\supset$ ': Da sicher $R, S, T \in G$ gilt, gilt auch $R^a S^b T^c \in G$ für alle a, b, c .

Nun ' $\subset$ ': Sei umgekehrt $A \in G \subset O(3)$. Die Einschränkung von A auf

die xy -Ebene ist eine orthogonale Transformation, die Δ auf sich selbst abbildet, aber das sind ja gerade die D_3 -Elemente und man kann einfach den in der Aufgabenstellung gegebene Isomorphismus verwenden; also ist A gleich der Einschränkung eines Elementes $R^a S^b$ auf die xy -Ebene. Daher ist die Einschränkung von $A' := A(R^a S^b)^{-1} \in O(3)$ auf die xy -Ebene die Identitätsabbildung, und bildet die z -Achse auf sich selbst ab. Sei also $e_3 = (0, 0, 1)$. Falls $A'e_3 = e_3$ ist $A' = I$ und daher $A = R^a S^b$; im verbleibenden Fall $A'e_3 = -e_3$ gilt $A' = T$, also $A = TR^a S^b$.

Schliesslich ist der Isomorphismus $G \cong D_3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ gegeben durch $\phi : T^c R^a S^b \mapsto (R^a S^b, c)$.

Um zu prüfen, dass ϕ wirklich ein Isomorphismus ist, müssen wir nur die Homomorphismus-Eigenschaft zeigen. Wir beobachten, dass T mit R und S kommutiert, also gilt

$$\begin{aligned}\phi(T^c R^a S^b \circ T^{c'} R^{a'} S^{b'}) &= \phi(T^{c+c'} R^a S^b R^{a'} S^{b'}) \\ &= (R^a S^b R^{a'} S^{b'}, c + c') \\ &= \phi(T^c R^a S^b) \circ \phi(T^{c'} R^{a'} S^{b'}).\end{aligned}$$

(Beachten Sie, dass die Gruppenoperation auf $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ durch Addition modulo 2 gegeben ist).

- b) Die irreduziblen Darstellungen von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sind die triviale Darstellung ρ_0 und die Darstellung $\rho_1 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, gegeben durch $\rho_1(0) = 1$ und $\rho_1(1) = -1$.

Wir betrachten nun die Darstellungen von $D_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, die Produkte von irreduziblen Darstellungen von D_3 und von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sind; ist χ_j ($j = 0, 1, 2$) der Charakter der Darstellung von D_3 und ω_k ($k = 0, 1$) der Charakter der Darstellung ρ_k , so ist der Charakter $\chi_{j,k}$ der Produktdarstellung gerade

$$\chi_{j,k}(T^c R^a S^b) = \chi_j(R^a S^b) \omega_k(c).$$

(vergleichen Sie auch Serie 6 Aufgabe 3 und Aufgabe 1b) dieser Prüfung).

Die Charaktertafel von $D_3 \cong S_3$ ist vorgegeben. Sind $[C_1] = [I]$ (ein Element), $[C_2] = [R]$ (zwei Elemente), $[C_3] = [S]$ (3 Elemente) die Konjugationsklassen von D_3 , so sind die Konjugationsklassen von G gegeben durch $[C_j^0] = \{g : g \in C_j\}$ und $[C_j^1] = \{Tg : g \in C_j\}$ für $j = 1, 2, 3$ (ebenfalls analog zum Vorgehen von Serie 6 Aufgabe 3).

Wir erhalten also:

	$[C_1^0] = [I] \ (1)$	$[C_2^0] = [S] \ (3)$	$[C_3^0] = [R] \ (2)$	$[C_1^1] = [T] \ (1)$	$[C_2^1] = [TS] \ (3)$	$[C_3^1] = [TR] \ (2)$
$\chi_{1,1}$	1	1	1	1	1	1
$\chi_{1,2}$	1	1	1	-1	-1	-1
$\chi_{2,1}$	1	-1	1	1	-1	1
$\chi_{2,2}$	1	-1	1	-1	1	-1
$\chi_{3,1}$	2	0	-1	2	0	-1
$\chi_{3,2}$	2	0	-1	-2	0	1

- c) Wir berechnen zunächst den Charakter χ_ρ von ρ .
Für $g \in G \subset O(3)$ gilt $\text{tr } \rho(g) = (\text{tr } g)N$, wobei N die Anzahl der Fixpunkte der zu g gehörigen Permutation $\sigma \in S_3$ ist. (Siehe z.B. Felder-Skript, pg. 28.)
Für $g = I, S, R, T, TS, TR$ gilt dann $\text{tr } g = 3, 1, 0, 1, -1, -2$, und $N =$

Irreduzible Darstellungen von S_n

→ Wie kann man die irred. Darstellungen von den Young Diagrammen konstruieren?

- 1) $S_\lambda, a_\lambda \leadsto C_\lambda$ bestimmen.
- 2) Dimension der irred. Darstellung mit Hook-Längenformel bestimmen → so viele Basisvektoren suchen wir.
- 3) $V_\lambda = \mathbb{C}[G] \otimes C_\lambda$ bestimmen: Nicht das ganze Produkt berechnen. Da

$$\mathbb{C}[G] = a_0 g_0 + a_1 g_1 + \dots$$

ist, ist das Resultat von der Form:

$$V_\lambda = a_0 g_0 C_\lambda + a_1 g_1 C_\lambda + \dots$$

Sei $g_0 = e$ (neutrales Element). Dann nehmen wir C_λ als ersten Basisvektor für V_λ . Dann betrachten wir $g_1 C_\lambda$. Ist dieser linear unabh. von C_λ ? Wenn ja → streichen, sonst ist $g_1 C_\lambda$ zweiter Basisvektor. Dies machen wir solange, bis wir so viele Basisvektoren haben, wie die Dimension von V_λ (s. b.)

4) Sobald wir V_λ bestimmt haben (durch Basisvektoren), können wir die Darstellungsmatrizen berechnen. (die Darstellung ist ja einfach Linksmultiplikation; das Theorem versichert uns, dass die Basisvektoren ineinander transformieren, da V_λ invariant ist).

5) Wenn wir herausfinden möchten, zu welcher ^{irred.} Darstellung $\rho|_{V_\lambda}$ äquivalent ist, können wir einfach

i) Den Charakter χ_ρ berechnen und $(\chi_\rho, \chi_0) = 1$

überprüfen

ii) Einen expliziten Darstellungsisomorphismus φ

finden,

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & V_\lambda \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \rho|_{V_\lambda} \\ V & \xrightarrow{\varphi} & V_\lambda \end{array}$$

Beispiel: S_3 .

3 Diagramme: 

$$\boxed{1|2|3} : S_\lambda = \sum_{\sigma \in S_3} \sigma, a_\lambda = e \Rightarrow C_\lambda = \sum_{\sigma \in S_3} \sigma$$

Laut HLF ist $\dim(V_\lambda) = 1$. Insb. ist dann C_λ ein / der Basisvektor.

Da $\rho(g)C_\lambda = C_\lambda$ für alle $g \in S_3$
ist dies sicher die triviale Darstellung von S_3 .

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} : S_\lambda = e, a_\lambda = \sum_{\sigma \in S_3} \text{sgn}(\sigma) \sigma \Rightarrow C_\lambda = \sum_{\sigma \in S_3} \text{sgn}(\sigma) \sigma$$

Wieder $\dim(V_\lambda) = 1 \Rightarrow C_\lambda$ ist Basisvektor.

Es gilt hier

$$\rho(g)C_\lambda = \text{sgn}(g)C_\lambda$$

$\Rightarrow$ Signumdarstellung.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} : S_\lambda = e + e_{(12)} \quad a_\lambda = e - e_{(13)}$$

$$\Rightarrow C_1 = (e + e_{(12)})(e - e_{(13)})$$

$$= e + e_{(12)} - e_{(13)} - e_{(132)}$$

hier gilt $\dim(V_1) = 2$. Als ersten Basisvektor wählen wir wieder C_1 , aber wir brauchen einen zweiten. Probieren wir $g_1 = (12)$. Dann gilt

$$(12)C_1 = e_{(12)} + e - e_{(132)} - e_{(13)} = C_1$$

$(12)C_1$ ist von C_1 lin. abhängig $\Rightarrow$ verwerfen. Nächster

Versuch: $g_2 = (23)$

$$(23)C_1 = e_{(23)} + e_{(132)} - e_{(123)} - e_{(12)}$$

was nicht lin. abhängig von C_1 ist $\Rightarrow (23)C_1$ ist zweite Basisvektor.

Wir wissen bereits, dass diese Kred. Darstellung die Standarddarstellung von S_3 sein muss. Wir können dies auf zwei Arten überprüfen:

i) wir überprüfen, dass

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{\rho|V_1} & C_1 \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ & (23)C_1 \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \rho_{\text{standard}}$$

ein Darstellungsisomorphismus ist, oder

ii) Wir berechnen den Charakter ~~$\rho|_{V_\lambda}$~~ $\chi_{\rho|_{V_\lambda}}$.

$$\chi(e) = 2, \text{ klar.}$$

$$\chi(12): (12)C_\lambda = C_\lambda$$

$$\begin{aligned} (12)(23)C_\lambda &= e_{(231)} + e_{(13)} - e_{(23)} - e \\ &= -C_\lambda - (23)C_\lambda \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \rho(12) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi(12) = 0$$

$$\begin{aligned} \chi(123): (123)C_\lambda &= e_{(123)} + e_{(13)} - e_{(23)} - e \\ &= -C_\lambda - (23)C_\lambda \end{aligned}$$

$$(123)(23)C_\lambda = (21)C_\lambda - (12)C_\lambda = C_\lambda$$

$$\Rightarrow \rho(123) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi(123) = -1.$$

Somit

	$[e]$	$[(12)]$	$[(123)]$
$\chi_{\rho _{V_\lambda}}$	2	0	-1

Vergleich mit S_3 Tabelle:

$$(\rho|_{V_\lambda}, V_\lambda) \cong (\rho_{\text{std.}}, V_{\text{std.}}).$$