

Eigenwertproblem mit Symmetrie

a) Behauptung: $G \cong \mathbb{Z}_2 \times D_3$. Es gilt

$$\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$$

$$D_3 = \{e, R, R^2, S, RS, R^2S\}$$

Für die abgebildete Figur bezeichnen wir als $\bar{R}$ die Drehung mit Winkel $2\pi/3$, $\bar{S}$ die Spiegelung durch den Mittelpunkt und $\bar{T}$ die Spiegelung an der xy -Ebene. Wir definieren dann den Isomorphismus

$$\varphi: \mathbb{Z}_2 \times D_3 \rightarrow G, \quad (n, R^i S^j) \mapsto \bar{T}^n \bar{R}^i \bar{S}^j \\ i \in \{0, 1, 2\}, j \in \{0, 1\}$$

Es ist klar, dass $\bar{T}^n \bar{R}^i \bar{S}^j \in K$.

• Homomorphismeigenschaft: Es gilt $\bar{R}\bar{T} = \bar{T}\bar{R}$ und $\bar{S}\bar{T} = \bar{T}\bar{S}$. Es folgt

$$\begin{aligned} \varphi(n, R^i S^j) \varphi(m, R^k S^l) &= \bar{T}^n \bar{R}^i \bar{S}^j \bar{T}^m \bar{R}^k \bar{S}^l \\ &= \bar{T}^{n+m} \bar{R}^i \bar{S}^j \bar{R}^k \bar{S}^l \\ &= \varphi(n+m, R^i S^j R^k S^l) \end{aligned}$$

• Bijektivität: Bahnformel besagt

$$|G| = |\text{Orbit}_{p_0}| \cdot |\text{Stab}_{p_0}|$$

Es gilt

$$\text{Orbit}_{p_0} = \{p_0, p_1, p_2\}, \quad \text{Stab}_{p_0} = \{\text{id}, \bar{S}, \bar{T}, \bar{T}\bar{S}\}$$

" $\cong \subseteq$ " in Stab_{P_0} Aussage: Wenn P_0 festgehalten wird, muss

$$P_2 \longleftrightarrow P_1$$

$$P_3 \hookrightarrow P_4$$

Da diese Vektoren eine Basis sind, haben wir mit $\{Id, \bar{S}, \bar{T}, \bar{T}\bar{S}\}$ tatsächlich alle Möglichkeiten abgedeckt.

(Kann nicht sein, dass P_0, P_1, P_2 auf P_3 oder P_4 abgebildet werden – schliesslich haben sie alle 4 Varianten statt 3).

Es gilt somit $|G| = 12$, wie $|\mathbb{Z}_2 \times D_3|$.

Es reicht nun, Injektivität zu zeigen. Sei

$$\bar{T}^n \bar{R}^i \bar{S}^j = Id,$$

es gilt aber, dass für $n=1$ und egal welche i, j gilt

$$\bar{T} \bar{R}^i \bar{S}^j P_3 = P_4,$$

Somit muss $n=0$. Auch gilt

$$\bar{R}^i P_k = P_{k+i} \quad \& \quad \bar{R}^i \bar{S} P_k = P_{-k+i}$$

$\Rightarrow i=j=0. \Rightarrow \varphi$ ist inj. $\Rightarrow \varphi$ bijektiv.

b) Wir wissen, dass die irred. Darstellungen von $\mathbb{Z}_2 \times D_3$ gegeben sind durch $\rho_1 \boxtimes \rho_2$, wobei ρ_1 eine irred. Darst. von $\mathbb{Z}_2$, ρ_2 irrep von D_3 . Sie sind definiert durch

$$(\rho_1 \boxtimes \rho_2)(g_1, g_2)(v_1 \otimes v_2) = \rho_1(g_1)v_1 \otimes \rho_2(g_2)v_2$$

Und somit $\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2}(g_1, g_2) = \chi_{\rho_1}(g_1) \chi_{\rho_2}(g_2)$.

Charaktertafeln: (Benutze $D_3 \cong S_3$)

$\mathbb{Z}_2$	$[0]$	$[\overset{\overline{1}}{1}]$
$\chi_1 = \chi_{\text{triv}}$	1	1
χ_e	1	-1

S_3	$[e]$	$3[\overset{\overline{1}}{(12)}]$	$2[\overset{\overline{1}}{(123)}]$
$\chi_1 = \chi_{\text{triv}}$	1	1	1
χ_e	1	-1	1
$\chi_2 = \chi_{\text{std.}}$	2	0	-1

Konjugationsklassen sind direkte Produkte aus Konjugationsklassen, also:

$$(12) \cong \overline{S}$$

$$(123) \cong \overline{R}$$

$\mathbb{Z}_2 \times D_3$	$[\overset{\text{Id}}{(0,e)}]$	$2[\overset{\text{Id}}{(0,\overline{R})}]$	$3[\overset{\text{Id}}{(0,\overline{S})}]$	$[\overset{\overline{1}}{(1,e)}]$	$2[\overset{\overline{1}}{(1,\overline{R})}]$	$3[\overset{\overline{1}}{(1,\overline{S})}]$
$\chi_{1,1}$	1	1	1	1	1	1
$\chi_{1,e}$	1	1	-1	1	1	1
$\chi_{1,2}$	2	-1	0	2	-1	0
$\chi_{e,1}$	1	1	1	-1	-1	-1
$\chi_{e,e}$	1	1	-1	-1	-1	1
$\chi_{e,2}$	2	-1	0	-2	1	0

c) Die Darstellung ist wie immer gegeben durch

$$\rho(g)(x_0, \dots, x_4) = (g^{x_0^{-1}(0)}, \dots, g^{x_0^{-1}(4)})$$

wobei $\sigma \in S_5$ gegeben ist durch $g p_i = p_{\sigma(i)}$. Wir benutzen die

Fixpunktformel:

$$\chi(g) = \text{tr}(g) N_g$$

Es gilt

$$N_e = 5, N_{\bar{R}} = 2, N_{\bar{S}} = 3, N_{\bar{T}} = 3, N_{\bar{T}\bar{R}} = 0, N_{\bar{T}\bar{S}} = 1$$

Um $\text{tr}(\rho)$ zu berechnen, wählen wir p_0, p_1, p_3 als Basis von $\mathbb{R}^3$. Wir verwenden, dass $p_0 + p_1 + p_2 = 0 \Leftrightarrow p_2 = -p_0 - p_1$.

Dann gilt:

$$\textcircled{\star} \text{Id} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{S} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{T} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{T}\bar{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{T}\bar{S} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Somit,

$$\begin{aligned} \text{tr}(e) &= 3, & \text{tr}(\bar{R}) &= 0, & \text{tr}(\bar{S}) &= 1 \\ \text{tr}(\bar{T}) &= 1, & \text{tr}(\bar{T}\bar{R}) &= -2, & \text{tr}(\bar{T}\bar{S}) &= -1 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \chi(e) &= 15, & \chi(\bar{R}) &= 0, & \chi(\bar{S}) &= 3 \\ \chi(\bar{T}) &= 3, & \chi(\bar{T}\bar{R}) &= 0, & \chi(\bar{T}\bar{S}) &= -1. \end{aligned}$$

$$d) \quad (\chi, \chi_{1,1}) = \frac{1}{12} (1 \cdot 15 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1)) = 2$$

$$(\chi, \chi_{1,e}) = 1, \quad (\chi, \chi_{1,2}) = 3, \quad (\chi, \chi_{e,1}) = 2, \quad (\chi, \chi_{e,e}) = 0$$

$$(\chi, \chi_{e,2}) = 2$$

$$\Rightarrow \rho = 2\rho_{1,1} \oplus 1\rho_{1,e} \oplus 3\rho_{1,2} \oplus 2\rho_{e,1} \oplus 2\rho_{e,2}.$$

$\Rightarrow$ Höchstens $2+1+3+2+2=10$ Eigenwerte.

Wir müssen noch die Eigenwerte / Darstellungen, die aufgrund der Translations- und Rotationsinvarianz existieren wegzählen. Die dazugehörigen Darstellungen sind

$$\rho_T(g) = g, \quad \rho_R(g) = \det(g)g$$

$g \in \mathbb{Z}_2 \times D_3$ (als Matrix aufgefasst, wie $M(\star)$). Es gilt

- $\chi_T(e) = 3, \chi_T(\bar{e}) = 0, \chi_T(\bar{s}) = 1, \chi_T(\bar{t}) = 1, \chi_T(\bar{t}\bar{r}) = (-2)$
 $\chi_T(\bar{t}\bar{s}) = -1$
- $\chi_R(e) = 3, \chi_R(\bar{e}) = 0, \chi_R(\bar{s}) = -1, \chi_R(\bar{t}) = -1, \chi_R(\bar{t}\bar{r}) = 2$
 $\chi_R(\bar{t}\bar{s}) = 1$

Wir finden

$$(\chi_T, \chi_{1,2}) = 1, \quad (\chi_T, \chi_{\epsilon,1}) = 1$$

und

$$(\chi_R, \chi_{1,\epsilon}) = 1, \quad (\chi_R, \chi_{\epsilon,2}) = 1$$

und somit ist der interessante Charakter bloss gegeben durch

$$2\chi_{1,1} + 2\chi_{1,2} + 1\chi_{\epsilon,1} + 1\chi_{\epsilon,2}$$

$\Rightarrow 2+2+1+1=6$ Eigenfrequenzen.